



**HAL**  
open science

## Enchevêtrements et polynôme de Jones modulaire

Guillaume Pagel

► **To cite this version:**

Guillaume Pagel. Enchevêtrements et polynôme de Jones modulaire. Physique mathématique [math-ph]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2021. Français. ⟨NNT : 2021DUNK0605⟩. ⟨tel-03621946⟩

**HAL Id: tel-03621946**

**<https://theses.hal.science/tel-03621946v1>**

Submitted on 28 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



# Thèse de Doctorat

*Mathématiques*  
*Mathématiques et leurs interactions*

Présentée à l'École Doctorale en Sciences Technologie et Santé (ED 585)

de l'UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

par

**Guillaume PAGEL**

pour obtenir le grade de Docteur de l'UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

*Enchevêtrements et polynôme de Jones modulaire*

Soutenue le 6 décembre 2021, après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen :

M <sup>r</sup> J. L. RAMÍREZ ALFONSÍN	Professeur, Université de Montpellier	Rapporteur
M <sup>r</sup> P. BELLINGERI	Maître de conférences HDR, Université de Caen	Rapporteur
M <sup>r</sup> P. DÈBES	Professeur, Université de Lille 1	Examineur (Président)
M <sup>r</sup> P.-L. GISCARD	Maître de conférences, ULCO	Examineur
M <sup>r</sup> S. ELIAHOU	Professeur, ULCO	Directeur de thèse
M <sup>r</sup> J. FROMENTIN	Maître de conférences HDR, ULCO	Co-Directeur

## COLOPHON

Mémoire de thèse intitulé « Enchevêtrements et polynôme de Jones modulaire », écrit par Guillaume PAGEL, achevé le 22 février 2022, composé au moyen du système de préparation de document  $\text{\LaTeX}$  et de la classe yathesis dédiée aux thèses préparées en France.



# Thèse de Doctorat

*Mathématiques*  
*Mathématiques et leurs interactions*

Présentée à l'École Doctorale en Sciences Technologie et Santé (ED 585)

de l'UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

par

**Guillaume PAGEL**

pour obtenir le grade de Docteur de l'UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE

*Enchevêtrements et polynôme de Jones modulaire*

Soutenue le 6 décembre 2021, après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen :

M <sup>r</sup> J. L. RAMÍREZ ALFONSÍN	Professeur, Université de Montpellier	Rapporteur
M <sup>r</sup> P. BELLINGERI	Maître de conférences HDR, Université de Caen	Rapporteur
M <sup>r</sup> P. DÈBES	Professeur, Université de Lille 1	Examineur (Président)
M <sup>r</sup> P.-L. GISCARD	Maître de conférences, ULCO	Examineur
M <sup>r</sup> S. ELIAHOU	Professeur, ULCO	Directeur de thèse
M <sup>r</sup> J. FROMENTIN	Maître de conférences HDR, ULCO	Co-Directeur





# Doctoral Thesis

*Mathematics  
Mathematics and their interactions*

Presented at *École Doctorale en Sciences Technologie et Santé (ED 585)*

from **UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE**

by

**Guillaume PAGEL**

in order to become Doctor from **UNIVERSITÉ DU LITTORAL CÔTE D'OPALE**

*Tangles and modular Jones polynomial*

Defended on December 6, 2021, after review from the referees, with the committee:

Mr J. L. RAMÍREZ ALFONSÍN	Professor, Université de Montpellier	Referee
Mr P. BELLINGERI	Associate Professor, Université de Caen	Referee
Mr P. DÈBES	Professor, Université de Lille 1	Examiner (Présidente)
Mr P.-L. GISCARD	Associate Professor, ULCO	Examiner
Mr S. ELIAHOU	Professor, ULCO	Supervisor
Mr J. FROMENTIN	Associate Professor, ULCO	Co-Supervisor



Cette thèse a été préparée au

**LMPA Joseph Liouville**

Maison de la Recherche Blaise Pascal  
50, rue Ferdinand Buisson  
CS 80699  
62100 Calais Cedex  
France

☎ (33) 03 21 46 55 86

🖨 (33) 03 21 46 55 75

✉ [secretariat@lmpa.univ-littoral.fr](mailto:secretariat@lmpa.univ-littoral.fr)

🖱 <https://lmpa.univ-littoral.fr>





*À ceux qui m'ont fait découvrir l'univers  
et qui ont essayé de le comprendre  
pour tenter de me l'expliquer*



---

## Remerciements

---

Mon aventure a débuté en grande partie grâce à mes deux directeurs de thèse, Shalom ELIAHOU et Jean FROMENTIN, alors que je n'étais encore qu'étudiant en première année de licence. Ils m'ont tous deux fait découvrir les fondamentaux de l'algèbre et je garde de bons souvenirs de leurs cours. Le stage de recherche réalisé en troisième année de licence avec Jean sur la théorie des tresses et l'ordre de DEHORNOY m'a ouvert l'esprit quant à l'immensité que peut représenter les mathématiques. Si durant la thèse Shalom m'a toujours encouragé à aller chercher le meilleur de moi-même et à perfectionner mes écrits, Jean m'a apporté une vision étendue de mes possibilités de recherche ainsi qu'un sacré coup de pouce en programmation. Je les remercie tous les deux pour leurs conseils et pour m'avoir permis de vivre cette épopée.

Envers les rapporteurs Jorge RAMÍREZ ALFONSÍN et Paolo BELLINGERI, je suis tout aussi reconnaissant. Si j'ai eu la chance de pouvoir rencontrer brièvement Paolo à Caen avant que mes soucis de santé me rattrapent, ce n'est malheureusement pas le cas de Jorge. La situation mondiale n'ayant pas arrangé les choses, j'espère avoir plus de temps lors de la soutenance pour faire plus ample connaissance. En attendant, j'admire leur dévouement pour relire mon manuscrit alors qu'ils me connaissent à peine de par ces malheureuses circonstances.

Rien n'aurait été pareil sans Pierre DÈBES et Pierre-Louis GISCARD, qui ont tous deux suivis à leur manière mon parcours de thèse. Pierre a suivi mes avancées grâce au comité de suivi de thèse dont il faisait partie ; son enthousiasme et son intérêt visible pour mes présentations m'ont toujours touché. Pierre-Louis, voisin de bureau de Jean, a lui aussi été particulièrement réceptif lors de mes échanges avec mon directeur. D'ailleurs, je n'oublie pas ma promesse : tu resteras l'un des premiers à admirer un nœud 6-trivial, si j'en trouve un. Dans tous les cas, je suis heureux qu'ils aient accepté de faire partie de mon jury de thèse. J'exprime aussi ma gratitude envers Dominique SCHNEIDER pour avoir été membre de mon comité de suivi de thèse.

Ce travail s'est tenu dans un environnement incroyablement chaleureux, ainsi je tiens à remercier le LMPA pour cette ambiance familiale si prospère qui me marquera à jamais. Je garde notamment un bon souvenir de nos pauses repas avec le plus souvent Antoine BENOIT, Romuald ERNST, Loïc FOISSY, Bruno MARTIN, Christian MIEBACH, et je n'oublie pas Christophe BOUREL pour ses invitations de soirées jeux de carte ou pour le week-end barbecue. Je n'oublierai pas non plus ses bons moments de rigolades avec mes collègues doctorants, notamment Julie WETZER, mais aussi Pierre CATOIRE, Vincent GOZE, Romain LOYER et Manon RYCKEBUSH qui avaient terminé leur première année de master lorsque je commençais ma thèse. Je leur souhaite de réussir leur parcours. Je tiens aussi à remercier Denis BITOUZÉ pour m'avoir fait découvrir l'un des outils les plus improbables mais diablement utiles qu'est  $\LaTeX$ .

Indépendamment des mathématiques, je dois tout aussi ce mémoire à mes parents qui m'ont donné toutes mes chances pour aller au bout de mes études peu importe le prix. Et même lorsque je travaillais sur ce qui s'apparente pour eux à du charabia mathémagique, ils continuaient de me proposer leur aide, notamment ma mère qui a relu nombres de mes productions pour l'orthographe sans rien comprendre

au sens de mes phrases. Je ne pourrai jamais aussi bien les remercier qu'avec ce mémoire. Je remercie aussi ma sœur pour ses partages de photos, vidéos et autres bêtises qui m'ont permis de changer d'air plus d'une fois, et je suis également reconnaissant envers ma famille en général. Enfin, je tiens aussi à dire merci à mes amis, notamment Lucas et Julien qui m'épaulent depuis 7 et 12 ans maintenant, et qui ont toujours été là pour m'aider à affronter mes problèmes, mais aussi des flottes de bateaux en tant que corsaire, des armées de chars premium, des aliens perturbant les opérations de minage sur Hoxxes IV, des réussites comme des échecs critiques, ces fichus creepers, . . .



Ah oui, j'allais oublier : merci de ne pas vous servir de ce manuscrit comme cale pour table ou chaise bancale. Ce n'est pas très respectueux. Et vous avez certainement d'autres livres qui conviennent mieux pour ça.

---

## Sommaire

---

<b>Remerciements</b>	<b>xi</b>
<b>Sommaire</b>	<b>xiii</b>
<b>Acronymes</b>	<b>xv</b>
<b>Symboles</b>	<b>xvii</b>
<b>Résumé</b>	<b>xix</b>
<b>Aparté historique</b>	<b>xxi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Généralités sur la théorie des nœuds</b>	<b>13</b>
1 Introduction à la théorie des nœuds	15
2 Distinguer les nœuds entre eux	41
<b>II Approche modulaire et étude du polynôme de JONES</b>	<b>65</b>
3 Le polynôme de JONES modulaire	67
4 Étude du crochet de KAUFFMAN	87
5 Étude du monoïde diagrammatique de KAUFFMAN	121
<b>* Annexes</b>	<b>151</b>
A Théories en lien avec les nœuds	153
B Outils annexes	169

---

<b>Table des figures</b>	<b>179</b>
<b>Liste des définitions</b>	<b>181</b>
<b>Liste des théorèmes</b>	<b>185</b>
<b>Liste des pseudo-codes</b>	<b>187</b>
<b>Index</b>	<b>189</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>191</b>
<b>Table des matières</b>	<b>199</b>

---

## Acronymes

---

### A | D | H | L | N | P | S | U

#### A

**ADN** Acide DésoxyriboNucléique. xxii, 35

#### D

**DT** DOWKER-THISTLETHWAITE. 58, 59

#### H

**HOMFLY** HOSTE, OCNEANU, MILLETT, FREYD, LICKORISH, YETTER. xviii, 2, 47, 49, 51, 52, 56, 57, 68, 164, 190

**HOMFLYPT** HOMFLY, PRZYTYCKI, TRACZYK. 56

#### L

**LMPA** Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées. vii, xi, xix, 204

#### N

**NE** Nord Est. 60, 75, 77, 94

**NO** Nord Ouest. 7, 60, 61, 75, 77, 94

#### P

**PGCD** Plus Grand Diviseur Commun. xvii, 71, 83, 84

#### S

**SE** Sud Est. 7, 60, 61, 75, 77, 94

**SO** Sud Ouest. 60, 75, 77, 94

#### U

**ULCO** Université du Littoral Côte d'Opale. i, iii, v



## Symboles

Les pages référencées en gras indiquent le ou les pages où le symbole correspondant est (re)défini.

Symbole	Nom	Définition(s)	Page(s)
$TL_n$	Algèbre de TEMPERLEY-LIEB de dimension $n$	<b>*.25</b>	98, <b>166</b>
$\Sigma_{\mathcal{B}}$	$\mathcal{B}$ -somme	<i>II.101</i>	<b>116</b>
Card	Cardinal d'un ensemble		88, 112, 171
$Cl_W$	Clôture de type $W$	<i>II.53 et II.82</i>	<b>93, 95, 106</b>
den	Clôture du dénominateur	<i>I.102</i>	<b>61, 94</b>
num	Clôture du numérateur	<i>I.102</i>	<b>61, 94</b>
$Cl_W^{\pm b}$	Clôture partielle pour $b$ brins de type $W$	<i>II.59</i>	<b>96</b>
$\widehat{\beta}$	Clôture de la tresse $\beta$	<i>I.103</i>	<b>62, 82</b>
$\langle \cdot \rangle$	Crochet de KAUFFMAN	<i>I.71</i>	<b>52, 95</b>
$\langle \cdot \cdot \rangle$	Crochet de KAUFFMAN non clos	<i>II.42</i>	<b>89, 95</b>
cr	Nombre minimal de croisement	<i>I.32</i>	<b>27</b>
$\deg_{\Sigma_{\max}}$	Degré maximal d'un polynôme		117, 143
$\deg_{\Sigma_{\min}}$	Degré minimal d'un polynôme		117, 143
$\mathcal{D}_-$	Diagramme d'écheveau négatif	<i>I.64</i>	<b>49, 54, 57</b>
$\mathcal{D}_+$	Diagramme d'écheveau positif	<i>I.64</i>	<b>49, 54, 57</b>
$\mathcal{D}_0$	Diagramme d'écheveau nul	<i>I.64</i>	<b>49, 54, 57</b>
$\widehat{\mathcal{T}}$	Enchevêtrement $T$	<i>I.99</i>	<b>60, 78, 79</b>
$\mathcal{T}_n$	Ensemble des $n$ -enchevêtrements	<i>I.99</i>	<b>60, 89, 98</b>
wr	Entortillement d'un entrelac	<i>I.26</i>	<b>24, 54, 77</b>
$\textcircled{n}$	Entrelac trivial à $n$ composantes	<i>I.8</i>	<b>17, 55, 112</b>
$\langle \cdot   S \rangle$	État $S$ du crochet de KAUFFMAN	<i>I.72 et II.30</i>	<b>53, 79</b>
$\langle \cdot \cdot   S \rangle$	État $S$ du crochet de KAUFFMAN non clos	<i>II.45</i>	<b>90</b>
$\mathfrak{S}_n$	Groupe des permutations de $n$ éléments		129, 131, 135
$B_n$	Groupe des tresses à $n$ brins	<b>*.9</b>	81, 99, <b>157</b>
$\mathcal{I}_n$	Inversion des générateurs des tresses à $n$ brins	<i>II.149</i>	<b>145</b>
$M_{\mathcal{D}}$	Matrice diagrammatique	<i>II.69 et II.74</i>	<b>100, 102</b>
$\mathcal{MD}_n^K$	Moduloïde diagrammatique de KAUFFMAN à $n$ brins	<i>II.40</i>	<b>88</b>
$\mathcal{D}_n^K$	Monoïde diagrammatique de KAUFFMAN à $n$ brins	<b>*.16</b>	<b>160</b>
$\mathcal{B}_n^K$	Monoïde diagrammatique tressé de KAUFFMAN à $n$ brins	<b>*.23</b>	99, <b>164</b>
$\bigcirc$	Nœud trivial	<i>I.7</i>	<b>17, 43, 68</b>
Cat( $n$ )	$n^{\text{e}}$ nombre de CATALAN	Défini comme $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$	163
pgcd	Plus grand diviseur commun (PGCD)		6, 74, 84

Symbole	Nom	Définition(s)	Page(s)
$\rho_v$	Poids d'un paramètre pondéré ayant comme variable $v$	<b>*.31</b>	<b>171</b>
$\Delta_L$	Polynôme d'ALEXANDER de l'entrelac $L$	<i>I.61</i>	<b>48</b>
$\nabla_L$	Polynôme de CONWAY de l'entrelac $L$	<i>I.66</i>	<b>50</b>
$P_L$	Polynôme de HOMFLY de l'entrelac $L$	<i>I.92</i>	<b>57</b>
$V_L$	Polynôme de JONES de l'entrelac $L$	<i>I.79</i>	<b>54, 70, 112</b>
$\Leftrightarrow$	Produit ping-pong	<i>II.126</i>	<b>131, 134, 137</b>
$\pi_{\mathcal{D}_n^K}$	Projection canonique du monoïde diagrammatique à $n$ brins	<i>II.120</i>	<b>129, 130, 135</b>
$\pi_{B_n}$	Projection canonique du groupe des tresses à $n$ brins	<b>*.14</b>	<b>84, 158</b>
$\pi_r^{\text{shift}}$	Projection décalée de $r$ brins	<i>II.57</i>	<b>96, 107</b>
$\mathfrak{S}_n$	Renversement des tresses à $n$ brins	<i>II.151</i>	<b>146</b>
$\mathfrak{S}_n$	Retournement des tresses à $n$ brins	<i>II.153</i>	<b>146</b>
sign	Signe d'un entier (retourne 1 ou $-1$ )		<b>81</b>
$\#$	Somme connexe ou recollement	<i>I.46</i>	<b>33, 56, 74</b>
$\#(K, n)$	Recollement de $n$ copies du nœud $K$	<i>I.46</i>	<b>33, 73</b>
Supp	Support d'une fonction		<b>142</b>
$\mathbb{1}_n$	Tresse triviale à $n$ brins	<b>*.5, *.16 et *.23</b>	<b>155, 160, 164</b>
$i$	Unité imaginaire des complexes		<b>110–112</b>

**ENCHEVÊTREMENTS ET POLYNÔME DE JONES MODULAIRE****Résumé**

Un nœud est un cercle noué dans l'espace à trois dimensions qu'il est possible de déformer continûment. Afin de pouvoir distinguer les nœuds entre eux, divers invariants ont été développés. Parmi eux, le polynôme de JONES (1985) est l'un des plus connus et étudiés, mais à ce jour sa capacité à détecter le nœud trivial reste non décidée. Récemment des travaux de ELIAHOU et FROMENTIN (2017) ont présenté ce problème sous un nouvel angle. En considérant le polynôme de JONES modulo un entier  $m$ , la question de l'existence de nœuds non triviaux vus comme triviaux par cet invariant polynomial est plus abordable. Leur travail présente d'ailleurs une construction pour répondre aux cas  $m = 2^r$ . Nous montrons dans ce mémoire qu'il est possible de construire des nœuds pour répondre aux cas  $m^r$  à partir d'un nœud non trivial ayant un polynôme de JONES trivial modulo  $m$ . Cela permet de répondre d'une autre manière aux cas  $m = 2^r$  mais aussi aux cas  $m = 3^r$ . Nous donnons également une tentative de généralisation de la construction donnée par ELIAHOU et FROMENTIN, mais le manque d'exemple limite notre résultat à une vision uniquement théorique.

Le crochet de KAUFFMAN (1987) est un outil permettant de construire le polynôme de JONES à partir d'un diagramme de nœud. Ses liens avec les générateurs de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB, qui engendrent aussi le monoïde diagrammatique, et la théorie des tresses ont déjà été étudiés, notamment par KAUFFMAN lui-même (1990). Nous continuons d'investiguer ses différents liens pour en apprendre plus sur le polynôme de JONES, mais aussi sur ces théories annexes. Nous apportons entre autres une nouvelle représentation matricielle des tresses, qui permet également de calculer le polynôme de JONES associé à ces tresses suivant différentes clôtures. Nous étudions aussi le monoïde diagrammatique grâce à un plongement dans les permutations, et développons à ce titre un nouveau produit sur les permutations dérivé de la composition classique.

**Mots clés :** Nœuds, Polynôme de Jones, Polynôme de Jones modulaire, Nœuds  $m$ -trivial, Crochet de Kauffman, Tresses, Enchevêtrements, Algèbre de Temperley-Lieb, Permutations

**TANGLES AND MODULAR JONES POLYNOMIAL****Abstract**

A knot is a circle tied in the three dimensional space which can be deformed continuously. In order to distinguish knots, a bundle of invariants have been developed. Among them, the Jones polynomial (1985) is one of the most famous and studied. Surprisingly, its ability to detect the unknot is not decided yet. Recently, a paper from Eliahou and Fromentin (2017) shows a new point of view for this problem. By considering the Jones polynomial modulo an integer  $m$ , the existence of non-trivial knots seen as the unknot by this polynomial invariant is more approachable. Their work also presents an answer for the cases  $m = 2^r$ . In this memoir, we show that it is possible to construct knots to answer cases  $m^r$  from one having a trivial Jones polynomial modulo  $m$ . That allows to give an other answer for cases  $m = 2^r$ , but also for cases  $m = 3^r$ . We try to give a generalized construction of the Eliahou and Fromentin one too, but the lack of examples make this only theoretical so far.

The Kauffman bracket (1987) is a tool to construct the Jones polynomial from a knot diagram. Its connections with generators of the Temperley-Lieb algebra, which also span the diagram monoid, and the braid theory have already been studied, notably by Kauffman himself (1990). We continue to investigate these different connections so that we can learn more on the Jones polynomial, and on these connected theories too. We bring as example a new matrix representation of braids, which provide a new method to compute the Jones polynomial associated to these braids closed in various way. We also study the diagram monoid thank to an embedding inside permutations, and develop as such a new product for permutations similar to the classical composition.

**Keywords:** Knot, Jones polynomial, Modular Jones polynomial,  $m$ -trivial knot, Kauffman bracket, Braids, Tangles, Temperley-Lieb algebra, Permutations

**LMPA Joseph Liouville**

Maison de la Recherche Blaise Pascal – 50, rue Ferdinand Buisson – CS 80699 – 62100 Calais Cedex – France



---

## Aparté historique

---

Les nœuds ont toujours fasciné ceux qui ont été assez curieux pour les représenter. Depuis des siècles nous faisons des nœuds, aussi bien pour lier des objets entre eux que pour les sublimer dans des œuvres d'art. Nous citerons bien sûr les nœuds que tout bon marin doit connaître, ou encore les nœuds celtiques avec une empreinte artistique extrêmement connue. Pourtant, bien que nous connaissions les nœuds depuis bien longtemps, la théorie des nœuds est une discipline récente des mathématiques, qui doit beaucoup à la physique. La première mention des nœuds apparaît en 1771, dans un écrit de VANDERMONDE [Van71], qui commence par ce paragraphe :

Quelles que soient les circonvolutions d'un ou de plusieurs fils de l'espace, on peut toujours en avoir une expression par le calcul des grandeurs ; mais cette expression ne serait d'aucun usage dans les Arts. L'ouvrier qui fait une *tresse*, un *réseau*, des *nœuds*, ne les conçoit pas par les rapports de grandeurs, mais par ceux de situations : ce qu'il y voit, c'est l'ordre dans lequel sont entrelacés les fils. Il serait donc utile d'avoir un système de calcul plus conforme à la marche de l'esprit de l'ouvrier, une notation qui ne représente que l'idée qu'il se forme de son ouvrage, et qui peut suffire pour en refaire un semblable dans tous les temps.

Nous sommes ici aux débuts de la notion de topologie. La suite de cet article traitera principalement du *problème du cavalier*, qui consiste à déplacer le cavalier sur un échiquier de sorte qu'il le visite entièrement sans passer deux fois par la même case. Étrangement, ce problème peut être associé à un nœud lorsqu'on le généralise à trois dimensions et que l'on souhaite retourner le cavalier à son emplacement de départ. Cependant même s'ils semblent présents, et même représentés en partie dans une illustration accompagnant l'article, l'idée d'une théorie rigoureuse à propos des nœuds est encore lointaine.

On retrouve plus tard l'un des premiers résultats sur les entrelacs, découvert par GAUSS [Gau67, 4. p. 605], alors qu'il étudiait l'électromagnétisme. Il s'agit d'une note datée de 1833 dans laquelle il introduisit une intégrale permettant d'évaluer l'enlacement<sup>1</sup> de deux courbes. La tabulation des nœuds et entrelacs a, quant à elle, démarré avec les travaux de THOMSON [Tho69] plus connu sous le nom de Lord KELVIN. Celui-ci était motivé par l'idée que les atomes seraient des nœuds formés dans l'éther ; suivi par TAIT [Tai98] qui est considéré comme le père de la théorie des nœuds. C'est en grande partie grâce à cette première tabulation que l'étude des nœuds rigoureuse et scientifique a véritablement commencé. Sa première version contenait une partie des nœuds jusqu'à 7 croisements, puis les travaux de KIRKMAN [Kir84] suivi par LITTLE [Lit85] vinrent la compléter jusqu'à 10 croisements, même 11 croisements pour le cas des nœuds alternants. À ce stade, leur tabulation est encore incomplète et présente des doublons, des erreurs difficilement évitables puisque tout est fait à la main dans un domaine de recherche très jeune. Lorsqu'il a été montré que l'éther n'existait pas en 1887, la théorie des nœuds d'éther est tombée dans

---

1. L'appellation « enlacement » est encore de vigueur aujourd'hui, même si d'autres méthodes permettent de la calculer plus simplement.

l'oubli, mais la théorie des nœuds mathématiques était née et elle reste encore aujourd'hui un domaine d'étude très actif. Elle apporte notamment des applications topologiques, algébriques, combinatoires ; mais a également des retombées en physique théorique, par exemple pour étudier la chiralité de certaines molécules ; en physique quantique, pour comprendre les trajectoires nouées des particules ; et aussi en biologie, pour expliquer l'action de certaines enzymes dont le but est de dénouer l'ADN.

Cette thèse est dédiée à l'approfondissement de la vision modulaire sur le problème de la détection du non-nœud par le polynôme de JONES, introduite par mes directeurs. Notamment, nous présentons diverses méthodes et tentatives de constructions ou de recherches de nœuds particuliers en lien avec cette problématique, et nous décrivons les réflexions annexes portant sur le modèle des états de KAUFFMAN appliqué aux tresses et aux enchevêtrements.

### Contexte général et théories connexes

Du point de vue mathématique et de ce mémoire, un *nœud* est une courbe simple fermée dans l'espace, déformable sans déchirures. C'est un objet en apparence si abordable, réalisable avec juste une corde, mais qui soulève tant de questions et de problèmes depuis que nous avons pris la peine d'y accorder un peu de réflexion. Commençons ironiquement par le nœud le plus « dénoué » de tous, que l'on appelle le *nœud trivial*. Si sa représentation la plus simple consiste en une boucle, on peut s'amuser à le déformer de sorte à le rendre méconnaissable, comme en figure 1.

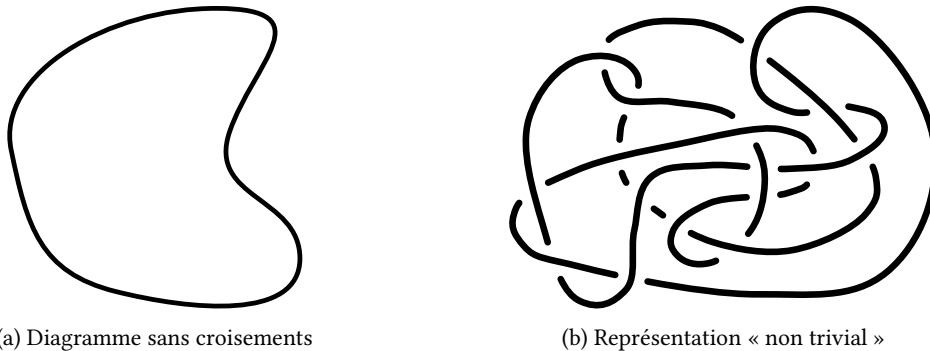


FIGURE 1 – Voici deux diagrammes du nœud trivial, celui de gauche sans croisements, celui de droite donné par OCHIAI [Och90, Figure 1].

Cela illustre à merveille la complexité que peut exprimer un nœud, au point même que nous ne reconnaissons pas le plus simple d'entre eux sans outils pour nous aider. Depuis sa création, l'une des plus grandes motivations de la théorie des nœuds est de pouvoir distinguer, énumérer et classer les nœuds à déformations près. En vérité, pas seulement les nœuds, mais aussi les *entrelacs* qui sont une collection de courbes simples et fermées dans un même espace, généralisation naturelle des nœuds.

Depuis la première tabulation travaillée successivement par TAIT [Tai98], KIRKMAN [Kir84] et LITTLE [Lit85], et avec le développement de la topologie notamment grâce à POINCARÉ [Poi95] et son célèbre « Analysis Situs », de grands topologistes se sont intéressés aux nœuds et ont contribué à compléter cette table. Nous citons entre autres DEHN [Deh10] qui a introduit une opération appelée “Dehn’s surgery” permettant de relier les nœuds aux variétés de dimension 3 ; il a aussi montré que le nœud de trèfle est *chiral* [Deh14], c’est-à-dire que le nœud de trèfle n’est pas équivalent à son image dans un miroir.

Pour revenir à la tabulation des nœuds, en 1927 les travaux de ALEXANDER et BRIGGS [AB27] en apportent une jusqu’à 9 croisements, entièrement vérifiée sauf pour trois paires qu’ils n’ont pu distinguer. C’est quasiment au même moment que sont introduits les mouvements de REIDEMEISTER [Rei27], définissant les transformations élémentaires possibles sur un diagramme pour respecter l’*isotopie* des entrelacs, c’est-à-dire les déformations qu’il est possible de leur appliquer dans l’espace. C’est aussi dans cette période que l’on voit apparaître le premier *invariant polynomial*, introduit par ALEXANDER [Ale28], inspiré de la méthode qu’il a utilisée avec son coauteur pour tabuler les nœuds. Ces *invariants* de nœuds sont des outils essentiels, ils nous permettent de distinguer les nœuds et entrelacs entre eux, même si très souvent ils ne sont pas *complets* : ils ne peuvent distinguer parfaitement chaque nœud. Le polynôme d’ALEXANDER reste une référence encore utilisée aujourd’hui, même si d’autres invariants polynomiaux plus complets sont apparus après lui.

En 1961, un article de HAKEN [Hak61] propose un algorithme permettant de reconnaître le nœud trivial, décrit sur près de 130 pages ! Il faudra ensuite attendre 1970 pour voir apparaître une nouvelle notation permettant d’étudier les nœuds et entrelacs, dans un article de CONWAY [Con70]. Cette notation utilise ce que l’on appelle des *enchevêtrements*, des portions de diagrammes ayant un nombre pair d’extrémités. Cela permet d’écrire la plupart des entrelacs et des nœuds sous une expression algébrique, encodant la façon dont sont agencés les croisements les uns par rapport aux autres. Celle-ci lui aurait permis, d’après ses dires, de lister les nœuds jusqu’à 11 croisements et les entrelacs jusqu’à 10 croisements, à la main et en une après-midi ; bien qu’il se soit avéré que cette liste contenait des erreurs. Une tabulation de référence sera publiée en 1976 par ROLFSEN [Rol03] pour les nœuds jusqu’à 10 croisements et les entrelacs jusqu’à 9 croisements. Celle-ci contient encore des erreurs, la plus connue étant celle relevée par PERKO [Per74] concernant deux nœuds à 10 croisements, cette paire portant désormais son nom. À ce jour, la tabulation la plus complète publiée est celle de HOSTE, THISTLETHWAITE et WEEKS [HTW98], classant tous les nœuds jusqu’à 16 croisements ; cela en représente tout de même 1 701 936 !

## Le polynôme de JONES

En 1985 a été publié l’un des articles, ou sinon le principal article, qui a amené une grande partie de la communauté des mathématiciens à se pencher sur la théorie des nœuds : c’est la découverte du *polynôme de JONES* [Jon85]. L’article introduit un nouvel invariant polynomial, généralisant le polynôme d’ALEXANDER, et faisant le lien avec les algèbres de VON NEUMANN. Il remet au grand jour les *relations d’écheveaux*, permettant de construire le polynôme à partir de relations entre différents diagrammes, et a l’étonnante habilité de distinguer sans mal les nœuds chiraux. L’impact sur la communauté est tel que seulement quelques mois après, quatre groupes de chercheurs indépendants publièrent quasiment en même temps le même résultat concernant encore un nouvel invariant polynomial, inspiré par celui de JONES. Leurs raisonnements furent publiés dans un même article [Fre+85], et le polynôme est depuis appelé HOMFLY, combinaisons des initiales des noms de chaque auteur en leur hommage.

Bien d’autres articles ont été motivés par l’apparition du polynôme de JONES. Un papier écrit par KANENOBU [Kan86] montre alors que les invariants polynomiaux connus jusqu’alors ne peuvent pas être complets, donnant des exemples de nœuds différents ayant les mêmes invariants polynomiaux, c’est-à-dire le même polynôme d’ALEXANDER, de JONES et HOMFLY. L’apparition du *crochet de KAUFFMAN* [Kau87] permet de calculer le polynôme de JONES à partir d’un diagramme, via ce qu’il appelle le « modèle des états ». Les travaux de MORTON et TRACZYK [MT90] apportent la notion de *mutation*, permettant

de créer des nœuds et entrelacs différents ayant le même polynôme de JONES simplement en pivotant des morceaux de leur diagramme. De manière annexe, on voit également des études sur le degré du polynôme de JONES, comme celle de FIEDLER [Fie91]. Mais assez vite l'une des plus grandes questions encore non répondues à ce jour vient poindre :

**■ Problème I.87 (cf. p.55) – Est-ce que le polynôme de JONES détecte le nœud trivial ?**

Si à l'origine la question incluait également les entrelacs de manière générale, leur cas a été élucidé dès qu'il dispose d'au moins deux composantes. Deux exemples ont été trouvés par THISTLETHWAITE [Thi01] en 2001 pour deux et trois composantes, puis une généralisation a été faite à tous les entrelacs par ELIAHOU, KAUFFMAN et THISTLETHWAITE [EKT03] en 2003, fournissant une infinité d'exemples d'entrelacs non triviaux vus comme tels par le polynôme de JONES. Mais le cas des nœuds, entrelacs à une seule composante, reste-lui bien ouvert.

Si nous connaissons plusieurs exemples de paires de nœuds différents non distinguées par le polynôme de JONES, aucune de ces paires ne contient un nœud trivial. Plusieurs approches pour tenter de répondre à cette question ont été essayées. L'une d'elle, présentée par ANSTEE, PRZYTYCKI et ROLFSEN [APR89], consiste à partir d'un diagramme compliqué du nœud trivial, puis d'opérer sur celui-ci des mutations dans l'espoir d'obtenir un nœud non trivial avec un polynôme de JONES trivial. Une autre, plus brutale, est de tester tous les nœuds jusqu'à espérer trouver un exemple répondant à la question. Cela a été fait jusqu'à 17 croisements par DASBACH et HOGARDY [DH97] en 1997, puis par TUZUN et SIKORA [TS18] jusqu'à 22 croisements. En 2021, tous les nœuds jusqu'à 24 croisements ont été vérifiés, toujours par TUZUN et SIKORA [TS21].

## Le polynôme de JONES modulaire

La dernière idée en date, à ma connaissance, pour étudier le problème liant le polynôme de JONES et le nœud trivial est à l'initiative de ELIAHOU et FROMENTIN [EF17]. La question originelle est, comme le témoigne ces longues années sans réponse à celle-ci, extrêmement difficile. Pour simplifier le problème, on peut étudier une contrainte moins forte que la détection du nœud trivial. Le polynôme de JONES étant un polynôme de LAURENT à coefficients entiers, celui-ci peut parfaitement être étudié suivant les classes d'équivalence correspondant au reste d'une division entière par un entier  $m \geq 2$ . En réduisant ainsi le polynôme de JONES modulo un entier bien choisi, il est ainsi possible de faire disparaître une bonne partie des monômes qui le compose. Il vient alors cette nouvelle question, dérivée de la première :

**■ Problème II.12 (cf. p.70) – Étant donné un entier  $m \geq 2$ , existe-t-il un nœud non trivial  $K$  pour lequel le polynôme de JONES satisfait  $V_K \equiv 1 \pmod{m}$  ?**

Les cas  $m = 2^r$  pour  $r \geq 1$  sont résolus, la construction des nœuds correspondants étant décrite dans l'article introduisant l'idée du *polynôme de JONES modulaire*. Nous connaissons ainsi une infinité de nœuds non triviaux pour lesquels leur polynôme de JONES est trivial modulo une puissance de 2. Ces nœuds sont de plus *premiers*, c'est-à-dire indécomposables par somme connexe. L'existence d'autres exemples de nœuds répondant à la question ont été trouvés en recherchant dans les tabulations maintenant bien établies. Les auteurs en ont ainsi relevé 770 correspondant au seul cas  $m = 2$  ayant au plus 16 croisements, ainsi que quelques exemples répondant au cas  $m = 3$  et un seul à 15 croisements pour le cas  $m = 4$ . Si ces réponses montrent que cette approche est légitime et mérite d'être regardée, elles posent d'autres questions. Parmi celles écrites en fin de [EF17], il serait bon de réfléchir à la conséquence d'un nœud non trivial répondant au problème II.12 pour tout  $m \geq 2$ .

Cet article et cet axe de recherche constituent l'origine de cette thèse. Peut-on généraliser la construction de ELIAHOU et FROMENTIN pour les cas  $m = 3^r$  avec  $r \geq 1$  en connaissant un exemple de nœud répondant au cas  $m = 3$ ? Que dire des autres entiers  $m \geq 3$ ? Quelles sont les conséquences sur le polynôme de JONES original? Nous allons tenter d'apporter des réponses à ces questions dans ce mémoire. Avant de présenter les résultats de ce travail, il convient de mentionner certains domaines

connexes auxquels nous ferons référence.

## Liens avec les tresses

La théorie des tresses est certainement aussi vieille que celle des nœuds. Une *tresse*, c'est un ensemble de brins qui se croisent en suivant une direction générale, sans faire demi-tour. L'un des travaux les plus marquants a été publié en 1925 par ARTIN [Art25], définissant une structure de groupe et donc une vision algébrique des tresses. Quelques années auparavant en 1923, ALEXANDER [Ale23] établit un premier lien entre les tresses et les entrelacs. Il montre que tout entrelacs et tout nœud est la *clôture* d'une tresse, obtenu en identifiant chaque paire d'extrémités de la tresse se faisant face. Ce lien est très profond, d'autant que les tresses sont étudiables algébriquement grâce à ARTIN tandis que les nœuds restent encore essentiellement des objets topologiques pour le moment.

En 1936 est publié un autre théorème important, rapprochant davantage l'étude des nœuds avec celle des tresses. En effet, le théorème de MARKOFF [Mar36] donne les conditions nécessaires et suffisantes sur les tresses pour que leur clôture donne le même entrelacs orienté. Parmi ces conditions, nous avons la *conjugaison* des tresses, grand problème de cette théorie que nous n'allons pas développer ici ; et nous retrouvons aussi l'isotopie des tresses et une dernière condition rappelant l'un des mouvements de REIDEMEISTER, permettant de faire varier le nombre de brins. Bien que le problème de conjugaison des tresses ait trouvé une solution algorithmique grâce à GARSIDE [Gar69], l'application du théorème de MARKOFF en pratique est difficile ; aucun algorithme n'a été élaboré à partir des conditions permettant de résoudre l'équivalence entre deux entrelacs.

D'autres liens sont découverts au fur et à mesure entre les tresses et les nœuds. Un exemple notable est apparu avec la représentation de BURAU [Bur35] des tresses, en effet la matrice représentant une tresse de cette façon peut être utilisée pour calculer le polynôme d'ALEXANDER de l'entrelacs associé à cette même tresse. De même, lorsque JONES a introduit son polynôme en 1985, il s'est appuyé sur une autre représentation des tresses dans l'*algèbre de TEMPERLEY-LIEB*, que nous présentons dans la sous-section suivante.

## L'algèbre de TEMPERLEY-LIEB et le monoïde diagrammatique de KAUFFMAN

L'apparition de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB dans l'article de TEMPERLEY et LIEB [TL71] est motivée au départ par des intérêts de modélisation de problèmes physiques. La représentation de ses générateurs sous forme de diagramme composé de brins, rappelant les tresses à la différence près qu'au lieu de se croiser ceux-ci font des demi-tours, est due en grande partie à KAUFFMAN [Kau90]. Ce dernier article propose même un ensemble ne contenant uniquement que ces générateurs munis d'une loi de concaténation, qu'il appelle le *monoïde diagrammatique*<sup>2</sup>. La ressemblance du diagramme de ces éléments avec les diagrammes de tresses n'est pas une coïncidence. En fait, il y a un fort lien entre le monoïde diagrammatique et les tresses, visible grâce au crochet de KAUFFMAN.

Aussi une autre manière d'étudier le problème I.87 est d'étudier en détails la représentation des tresses intervenant dans la définition du polynôme de JONES, en particulier il s'agit de savoir si celle-ci est fidèle ou non. L'article de BIGELOW [Big02] traite de ce sujet, et pose diverses conjectures permettant d'avancer dans cette approche. Il y est également présent le lien avec la représentation de BURAU [Bur35], pour laquelle sa fidélité n'est pas non plus connue dans le cas des tresses à quatre brins. L'une des conjectures a été démontrée par ITO [Ito15] et renforce l'idée que si la représentation utilisée par le polynôme de JONES n'est pas fidèle, alors celui-ci ne détecte pas le nœud trivial.

2. Nommé "diagram monoid" en langue originelle.

## Résultats de ce travail

Cette thèse apporte de nouvelles réponses à la question de ELIAHOU et FROMENTIN [EF17] notamment pour les cas  $m = 3^r$ , une étude du polynôme de JONES et du crochet de KAUFFMAN menant à une nouvelle représentation matricielle des tresses, ainsi que la description d'un plongement des générateurs de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB dans les permutations.

### Recherches de solutions et appellation de celles-ci

Les seuls exemples connus de nœuds répondant au problème II.12 sont ceux construits dans les travaux de ELIAHOU et FROMENTIN [EF17], ou ceux déjà répertoriés dans les différentes tabulations existantes comme *KnotInfo* [LCM04] au moment où ce travail commence. Cependant, cet axe de recherche étant extrêmement jeune, ces nœuds si particuliers ne sont pas identifiés dans ces bases de données, ils n'ont même pas de nom rappelant leur propriété. Nous introduisons ainsi la notion de *nœuds  $m$ -triviaux* :

#### Définition II.2 (cf. p.68) – *Nœuds $m$ -triviaux*.

Pour  $m \geq 2$  un entier, un *nœud  $m$ -trivial*  $K$  est un nœud non trivial ayant un polynôme de JONES modulaire de rang  $m$  trivial. Autrement dit :

$$K \neq \bigcirc \quad \text{et} \quad V_K \equiv 1 \pmod{m}.$$

Un problème actuel est que la collection d'exemples de nœuds  $m$ -triviaux à notre disposition est limitée, notamment par le nombre de croisements. La tabulation de HOSTE, THISTLETHWAITE et WEEKS [HTW98] est la plus complète à ce jour et ne comporte qu'au maximum 16 croisements; les nœuds  $m$ -triviaux présents dans cette table ont déjà été comptés dans [EF17], ainsi nous savons que l'on dispose que de nœuds 2-triviaux, 3-triviaux et un 4-trivial. Afin de tenter de trouver d'autres exemples pour d'autres valeurs de  $m$ , l'élaboration d'un petit programme informatique générant arbitrairement des nœuds nous apparaît nécessaire. Le choix d'une génération aléatoire, en dépit des risques évidents de non résultat, reste indispensable pour ne pas être limité par le nombre de croisements. Pour la génération, nous pouvons utiliser les liens qu'ont les nœuds avec les tresses, ces dernières pouvant être générées de manière intuitive. Ce choix est discutable, surtout en termes d'efficacité, mais l'avantage a été la simplicité et la rapidité de son implémentation sur machine.

Malheureusement aucun nœud  $m$ -trivial pour  $m \geq 5$  n'a été trouvé de cette manière. Une autre tentative d'exploration a été effectuée en collaboration avec FROMENTIN dans son projet<sup>3</sup> d'énumérer les tresses jusque 25 croisements. L'objectif était d'obtenir des exemples pour  $m = 5$  ou  $m = 6$ , mais cela fut tout aussi infructueux que la première méthode. Cependant ces recherches autour de l'élaboration de ces programmes n'ont pas été vaines, fournissant une multitude de mots de tresses formant un nœud  $m$ -trivial après clôture pour  $m \leq 4$ , ainsi que l'étude de critères entre les tresses et les nœuds comme la proposition suivante :

**Proposition II.36 (cf. p.82).** *Pour  $w$  un mot de tresse réduit représentant une tresse  $\beta$  à  $n$  brins, si la clôture  $\widehat{\beta}$  est un nœud alors la longueur  $l$  de  $w$  vérifie les deux conditions suivantes :*

- (i)  $l \geq n - 1$ ,
- (ii)  $l \equiv n - 1 \pmod{2}$ .

Nous détaillerons aussi l'ouverture d'autres axes de recherches inspirés par cette partie, aboutissant par exemple sur les *matrices diagrammatiques* qui permettent de représenter les tresses matriciellement, ou encore le *produit ping-pong* dans les permutations qui se rapporte à la projection de la loi de concaténation du monoïde diagrammatique.

3. L'article associé est référencé [Fro21] mais cette collaboration n'est pas mentionnée dans celui-ci.

## Construction de nœuds $m^r$ -triviaux

Parmi les résultats présents dans l'article de JONES [Jon85] se trouve un théorème précisant le comportement de celui-ci avec le *recollement de nœuds*, opération semblable à une somme connexe. Étant donné que le polynôme de JONES d'un recollement correspond au produit des polynômes de JONES des entrelacs impliqués, ce théorème nous fournit une construction à étudier dans le cas des nœuds  $m$ -triviaux. Le recollement d'une famille de nœuds  $m$ -triviaux quelconque n'apporte pas de grandes avancées, comme le décrit la proposition suivante :

**Proposition II.20 (cf. p.74).** *Pour  $K_1$  et  $K_2$  deux nœuds respectivement  $m_1$ -trivial et  $m_2$ -trivial, où  $m_1$  et  $m_2$  sont supérieurs ou égaux à 2, on a :*

$$V_{K_1 \# K_2} \equiv 1 \pmod{\text{pgcd}(m_1, m_2)}.$$

Cependant le recollement de plusieurs copies d'un même nœud apporte des résultats plus intéressants. En particulier, nous remarquons sans mal que le recollement de deux copies d'un même nœud 2-trivial engendre un nœud 4-trivial. Pour obtenir un nœud 9-trivial, dont on voit un exemple de représentation en figure 2, il nous faut recoller trois copies d'un même nœud 3-trivial.

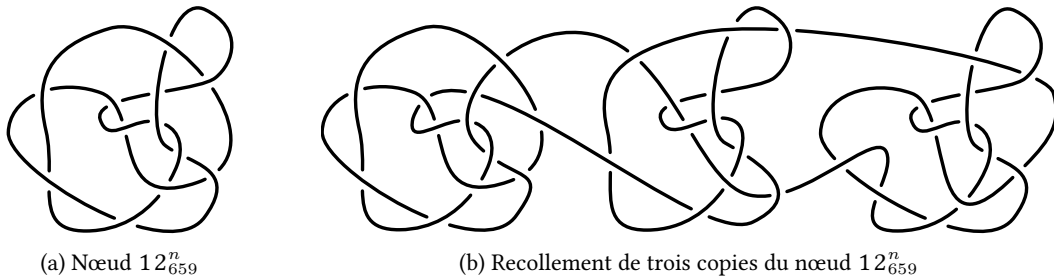


FIGURE 2 – Le nœud  $12^n_{659}$  est 3-trivial et premier avec 12 croisements [LCM04, knot 12n659]. Lorsqu'il est recollé en trois exemplaires, on obtient un nœud 9-trivial.

La particularité de recoller le même nœud amène à multiplier le même polynôme de JONES, et donc d'en calculer une puissance. Les polynômes de JONES des nœuds  $m$ -triviaux ont une forme particulière, ils sont exprimables comme  $1 + m^P$  avec  $P$  un polynôme adéquat. Le calcul d'une puissance de ce type de polynôme fait immédiatement penser au binôme de NEWTON. Nous pouvons alors utiliser les coefficients binomiaux qui y sont présents pour construire des nœuds  $m^r$ -triviaux, et ceux-ci peuvent être contrôlés en agissant sur le nombre de copies à recoller. Cette idée nous amène à notre tout premier résultat :

### **Théorème II.16 (cf. p.73) – Construction de nœuds $m^r$ -triviaux.**

S'il existe un nœud  $m$ -trivial pour un certain  $m \geq 2$ , alors quel que soit  $r \geq 1$  il existe une infinité de nœuds deux à deux distincts non premiers  $m^r$ -triviaux.

**PAGEL (2020)** – [Pag20, Theorem 3 p. 904]

Si la preuve donnée dans l'article [Pag20] de ce théorème est assez longue et reflète le temps passé à comprendre dans les moindres détails comment il fonctionne, ce mémoire propose une autre preuve<sup>4</sup>, beaucoup plus courte en la présence d'une simple récurrence. Au final, les deux preuves se complètent, l'une détaille un maximum ce qu'il se passe au niveau arithmétique, l'autre présente le plus simplement possible l'astuce combinatoire. En corollaire de ce théorème, puisque des exemples de nœuds 2-triviaux et 3-triviaux sont connus, nous avons des réponses à apporter au problème II.12 :

4. Cette preuve alternative a été découverte lors de l'écriture de ce mémoire.

**Corollaire II.18 (cf. p.74).** *Pour tout  $r \geq 1$ , il existe des nœuds  $2^r$ -triviaux et  $3^r$ -triviaux non premiers.*

Si les cas  $m = 2^r$  avec  $r \geq 1$  étaient déjà clarifiés, nous y apportons une nouvelle réponse par une méthode différente. En effet, le théorème II.16 n'est pas une généralisation du résultat de ELIAHOU et FROMENTIN, puisque d'une part les nœuds concernés ne sont clairement pas premiers, et d'autre part la méthode de construction est complètement différente.

## Construction par substitution dans un modèle

L'article de ELIAHOU et FROMENTIN [EF17] étant le point de départ de ce travail, nous méritons de nous pencher un peu sur leur méthode de construction des nœuds  $2^r$ -triviaux. Celle-ci repose essentiellement sur la répétition d'un enchevêtrement de base, qu'ils notent  $T_{20}$ , ayant une particularité analogue à celle des nœuds 2-triviaux, mais au niveau du crochet de KAUFFMAN en version non clos. Afin d'essayer de généraliser ce concept, nous pouvons étudier le comportement d'un remplacement des croisements présents dans un diagramme  $D$ , qui sera le modèle, par un enchevêtrement  $T$ . Nous devons établir des règles pour que la substitution ait un sens, notamment  $T$  doit être un 2-enchevêtrement, et la substitution de chaque croisement doit être cohérente de façon générale.

L'évolution du nombre de composantes ou encore le caractère premier du résultat d'une substitution s'étudie sans difficulté. Cependant nous sommes surtout intéressés ici par la possible construction de nœuds  $m$ -triviaux. La substitution par  $T$  des croisements de  $D$  change le crochet de KAUFFMAN de  $D$  au sens où les coefficients régissant la séparation d'un croisement sont alors dictés par  $T$ . Ainsi, en choisissant un 2-enchevêtrement  $T$  ayant un crochet de KAUFFMAN non clos particulier, c'est-à-dire composé de polynômes multiples ou presque multiples d'un entier  $m \geq 2$ , et sous d'autres conditions un peu techniques, nous pouvons effectivement obtenir un nœud  $m$ -trivial à partir d'un modèle  $D$  en substituant ces croisements par  $T$ . Ce résultat s'exprime à travers le théorème suivant, qui nécessite un certain nombre de notations définies dans ce mémoire.

### Théorème II.32 (cf. p.79) – Construction de nœuds $m$ -triviaux par substitution dans un modèle.

Soient  $D$  un diagramme de nœud orienté avec  $n$  croisements d'entortillement nul,  $m \geq 2$  un entier et  $T$  un 2-enchevêtrement croisé ne contenant pas de composante interne tel que la somme des signes des croisements impliquant le même brin soit nulle, et :

$$\langle \cdot \langle \mathcal{T} \rangle \cdot \rangle = (1 + mf(\tau)) \langle \cdot \langle \curvearrowright \rangle \cdot \rangle + mg(\tau) \langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle$$

On note  $D_T$  la substitution uniforme de  $T$  dans le modèle  $D$ . Si l'état  $S = (0, \dots, 0)$  du crochet de KAUFFMAN non clos de  $D_T$  ne présente qu'une seule composante après séparation, alors  $D_T$  est un nœud  $m$ -trivial.

Sous des hypothèses supplémentaires, nous pouvons demander à construire des nœuds  $m$ -triviaux premiers, ce que la méthode utilisée par le théorème II.16 avec les recollements ne permet pas. Nous ne pouvons en revanche affirmer qu'il est possible de construire des nœuds  $mm'$ -triviaux avec cette méthode, cela nécessite une étude plus poussée et certainement davantage d'hypothèses sur le modèle  $D$ . Il y a un autre souci avec cette méthode, c'est que nous ne connaissons pas d'enchevêtrements  $T$  qui répondent aux hypothèses du théorème II.32. Même l'enchevêtrement  $T_{20}$  n'y répond pas, il ne vérifie pas l'hypothèse du brin démarrant en NO pour finir en SE, ce qui assure normalement le croisement des brins composant  $T$ . Leur recherche n'ayant pas été entreprise dans ce travail, par manque de temps et par crainte de ne pas obtenir de résultats comme pour la recherche de nœuds  $m$ -triviaux, l'existence souhaitable de ces enchevêtrements reste donc pour le moment non décidée.

## Étude du crochet de KAUFFMAN non clos

Le travail retranscrit dans ce mémoire utilise beaucoup le crochet de KAUFFMAN, cependant ce dernier est originellement défini sur des diagrammes fermés, typiquement de nœuds ou même d'entrelacs. Même si dans la littérature on trouve l'utilisation de ce crochet sur des diagrammes non clos, ce qui n'est pas un problème en soi si les calculs sont rigoureux, définir cette version non close proprement a suscité certaines questions. Commençons par la plus naturelle, celle de la clôture. En calculant le crochet de KAUFFMAN non clos d'un diagramme disposant de  $2n$  extrémités, nous devons considérer une clôture de ce diagramme, c'est-à-dire une reliure entre  $n$  paires de points choisies sans créer de croisements, pour revenir au crochet défini par KAUFFMAN [Kau87]. Par exemple la clôture d'une tresse à  $n$  brins est définie et conçue de la même façon par tous en identifiant chaque extrémité de brins opposées. La situation se complique déjà lorsque l'on considère un 2-enchevêtrement, puisque deux clôtures distinctes peuvent être utilisées. Que dire alors d'un diagramme quelconque disposant de  $n$  paires d'extrémités? Nous pouvons en fait répondre à la question en faisant le lien avec les éléments du monoïde diagrammatique, qui consistent par définition à relier des paires de points sans croisements, ce qu'une clôture fait. Nous pouvons voir un exemple en figure 3. Nous pouvons même considérer des clôtures partielles, permettant de réduire le nombre d'extrémités sans fermer totalement le diagramme.

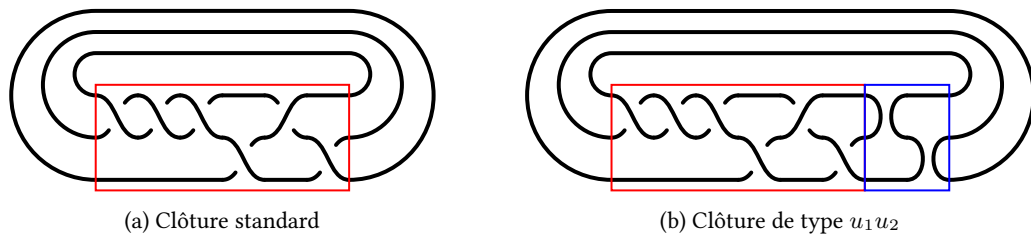


FIGURE 3 – Nous voyons ici deux façons différentes de clôturer une tresse à 3 brins, encadrée en rouge. Celle de gauche est standard, celle de droite est liée à l'élément du monoïde diagrammatique  $u_1u_2$  encadré en bleu.

Un autre pan de l'étude de ce crochet dans sa version non close est aussi de comprendre la signification de son résultat. N'oublions pas que le crochet de KAUFFMAN résulte en un unique polynôme grâce à sa première règle de calcul, qui identifie le crochet du nœud trivial à 1. Dans le cadre non clos, cette règle ne peut s'appliquer, nous obtenons ainsi une somme de polynômes chacun associés à un élément du monoïde diagrammatique. Ces polynômes, appelés *polynômes de choix* dans ce mémoire, reflètent la structure du diagramme duquel ils proviennent. Ce lien est en fait si fort que nous sommes amenés à penser que l'ensemble de ces polynômes pourrait être unique pour chaque diagramme, nous menant à cette question :

**■ Problème II.52 (cf. p.92) – Pour  $D$  et  $D'$  des diagrammes ayant  $n \geq 2$  paires d'extrémités, les crochets de KAUFFMAN non clos de  $D$  et  $D'$  sont-ils égaux si et seulement si  $D$  et  $D'$  sont isotopes pour l'isotopie régulière?**

Cette observation provient de l'écriture sous forme d'une somme d'états, notion déjà introduite par KAUFFMAN dans son article, et qui reste valable pour sa version non close. Les polynômes de choix sont définis et font apparaître une grande quantité d'informations à propos de ces états, c'est aussi de cette manière qu'ils nous renseignent sur la structure du diagramme duquel ils proviennent. Cette remarque nous permet de mieux comprendre les termes du polynôme obtenu via le crochet, et nul doute qu'une meilleure compréhension encore de ces polynômes de choix permettrait de mieux comprendre la transformation de certaines structures de croisements en polynôme via ce crochet. De plus, le problème II.52 est proche de la question de la fidélité de la représentation définissant le polynôme

de JONES, nous allons le voir avec les matrices diagrammatiques.

## Les matrices diagrammatiques

En plus du crochet de KAUFFMAN, les tresses prennent part à une place non négligeable dans cette thèse. L'étude du crochet de KAUFFMAN non clos pour le cas particulier des tresses nous amène sur la représentation utilisée pour la construction du polynôme de JONES. En effet, les tresses formant un groupe muni de la concaténation, l'étude de l'action de ce produit sur le crochet non clos peut se traduire par la multiplication des polynômes de choix et de leur élément diagrammatique associé. Après quelques vérifications nécessaires, nous en arrivons à la conclusion que le crochet de KAUFFMAN peut être vu comme un morphisme de groupes entre les tresses et un sous-groupe de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB. Cette vision était déjà connue de KAUFFMAN :

---

### **Théorème II.65 (cf. p.98) – Vision morphique du crochet de KAUFFMAN non clos.**

Pour  $n \geq 1$  un entier, on considère  $G$  le sous-groupe de  $TL_n(\delta)$  engendré par les éléments de la forme  $\tau^{-e} \mathbb{1}_n + \tau^e u_i$  avec  $e = \pm 1$  et  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  muni de la multiplication. Alors le crochet de KAUFFMAN non clos  $\langle \cdot \cdot \rangle$  est un morphisme de groupe de  $B_n$  vers  $G$ .

**KAUFFMAN (1990)** – [Kau90, Proposition 3.6 p. 435]

---

Si cette observation en elle-même n'apporte pas beaucoup de nouveautés, elle n'est pas sans conséquences. Sachant qu'il est possible de représenter l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB par des matrices, et notamment ses générateurs, la vision du crochet de KAUFFMAN comme un morphisme permet à toute représentation matricielle de cette algèbre d'engendrer une représentation matricielle du groupe des tresses. En effet, pour  $\sigma_i^e$  le  $i^e$  générateur ou son inverse du groupe des tresses, nous pouvons construire la matrice qui le représente  $M_D(\sigma_i^e)$  comme  $M_D(\sigma_i^e) = \tau^{-e} M_D(\mathbb{1}) + \tau^e M_D(u_i)$  où  $M_D(\mathbb{1})$  représente la tresse triviale et est donc l'identité, et  $M_D(u_i)$  représente le  $i^e$  générateur de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB. L'une des représentations de cette algèbre, engendrée par l'encodage dans une matrice de la table de multiplication à gauche d'un élément diagrammatique, mérite notre attention. Comme la construction des matrices représentant les générateurs des tresses  $M_D(\sigma_i^e)$  dépend de celles représentant les éléments diagrammatiques, nous constatons que les entrées des matrices  $M_D(\beta)$  représentant une tresse  $\beta$  sont ou dépendent des polynômes de choix. Nous les appellerons *matrices diagrammatiques*, et celles-ci présentent deux aspects importants.

Tout d'abord elles permettent de calculer le crochet de KAUFFMAN non clos, mais aussi le polynôme de JONES, grâce à la présence des polynômes de choix dans ses entrées. Nous devons pour cela caractériser l'action de clôturer matriciellement, ce qui se fait naturellement avec les matrices diagrammatiques. Ces matrices se comportent si bien avec l'action de clôture qu'il est possible de calculer le polynôme de JONES d'une tresse suivant toutes les clôtures possibles de celle-ci en une seule multiplication matricielle. Ces matrices apportent aussi un résultat étonnant sur le polynôme de JONES :

---

### **Théorème II.91 (cf. p.112) – Forme générale du polynôme de JONES.**

Quel que soit  $L$  un diagramme d'entrelacs, le polynôme de JONES de  $L$  s'écrit sous la forme :

$$V_L(t) = 1 + \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right) R(t)$$

avec  $R$  un polynôme de reste. Si  $L = \textcircled{k}$  est l'entrelacs trivial à  $k$  composantes, alors son polynôme de JONES s'écrit exactement comme :

$$V_{\textcircled{k}}(t) = 1 + \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right) \sum_{i=1}^{k-1} \left[ \binom{k-1}{i} (-\sqrt{t})^i \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right)^{i-1} \right]$$


---

Si une forme plus précise avait été donnée par JONES [Jon85] dans le cas des nœuds, rien n'était connu dans le cadre général des entrelacs.

Le second aspect vient aussi de la présence des polynômes de choix dans les matrices diagrammatiques. En effet ces matrices représentent le groupe des tresses, mais la fidélité de cette représentation est à déterminer et dépend beaucoup du problème II.52 qui concerne ces mêmes polynômes de choix. Nous en venons alors au problème suivant :

**■ Problème II.94 (cf. p.113) – Pour  $n \geq 2$ , la représentation associant à chaque tresse de  $B_n$  sa matrice diagrammatique est-elle fidèle ?**

Si cette représentation est effectivement fidèle, alors les matrices diagrammatiques donneraient une autre preuve de la linéarité du groupe des tresses, déjà démontrée indépendamment par BIGELOW [Big00] et par KRAMMER [Kra02]. Cela pourrait aussi répondre à la question de la détection du nœud trivial par le polynôme de JONES au vu de la proximité avec la représentation utilisée dans la définition de ce polynôme.

### Projection des éléments diagrammatiques dans les permutations

Les *éléments diagrammatiques*, faisant partie du monoïde du même nom, se retrouvent naturellement dans le résultat du crochet de KAUFFMAN non clos, notamment si son diagramme d'entrée est une tresse. Ils sont de manière générale liés au polynôme de JONES, et l'étude présente dans ce mémoire à leur propos a été motivée par le calcul sur machine de cet invariant polynomial. Nous nous intéressons notamment à la détermination efficace du nombre de composantes d'un élément diagrammatique après clôture, à la variation de ce nombre par action de concaténation ; mais aussi à une méthode permettant de calculer la concaténation de deux éléments diagrammatiques quelconques ainsi que leur réduction.

Cet axe de recherche nous amène à considérer une autre façon de représenter ces éléments que via des diagrammes ou des mots algébriques. En s'inspirant de la projection canonique d'une tresse sur les permutations, nous présentons une projection du monoïde diagrammatique dans les permutations, introduisant une nouvelle opération sur les permutations résultant de la loi de concaténation du monoïde diagrammatique. Ce nouveau produit rappelle un peu la composition usuelle, à la grande différence que le sens de lecture pour cette composition est variable. Nous présentons ainsi le *produit ping-pong* :

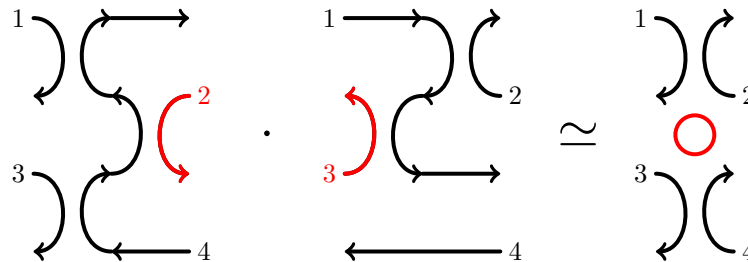


FIGURE 4 – Ce schéma explique comment les éléments diagrammatiques sont représentés par les permutations. Le principe consiste à suivre les brins. Ainsi l'image d'un élément, ici représenté par des numéros, est donnée par la position finale du brin orienté. La partie en rouge n'est pas « visible » par le produit ping-pong. Dans l'ordre de gauche à droite, les permutations associées sont  $(1\ 2\ 3\ 4)$ , puis  $(1\ 3\ 2)(4)$  et finalement  $(1\ 2\ 3\ 4) \rightleftharpoons (1\ 3\ 2)(4) = (1\ 2)(3\ 4)$ .

#### Définition II.126 (cf. p.131) – *Produit ping-pong.*

On définit pour  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  des permutations de  $\mathfrak{S}_n$  le *produit ping-pong*  $\sigma_1 \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons \sigma_k$  comme la composition avec un sens de lecture variable dépendant de la parité de l'élément actuellement calculé.

Ainsi pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , si l'image d'un élément par  $\sigma_i$  est impaire, il doit être évalué ensuite par  $\sigma_{i+1}$ , sinon par  $\sigma_{i-1}$ . Le paramètre est évalué en premier par  $\sigma_1$  s'il est impair, sinon par  $\sigma_k$ , et le résultat final est obtenu lorsque  $\sigma_1$  renvoie une image paire, ou lorsque  $\sigma_k$  renvoie une image impaire.

On peut se référer à la figure 4 pour avoir un aperçu visuel du plongement et du produit ping-pong. Cette opération un peu étrange au premier abord décrit exactement l'action des demi-tours  $\left( \begin{array}{c} \text{composant les éléments diagrammatiques.} \\ \text{L'étude du monoïde diagrammatique via les permutations} \end{array} \right)$  apporte plusieurs résultats intéressants, à propos des motivations listées précédemment et notamment concernant le calcul de la concaténation et de la réduction d'éléments diagrammatiques. L'étude du nombre de composantes après clôture est également plus abordable grâce aux permutations. Une dernière découverte est de révéler des applications agissant sur les tresses préservant totalement ou presque le polynôme de JONES qui leur est associé, mais pas forcément l'entrelacs sous-jacent. Ces applications sont au nombre de trois, l'une consiste à inverser les croisements individuellement, notée  $\mathcal{I}$ ; la deuxième renverse l'ordre des croisements et est notée  $\mathcal{N}$ ; et la dernière retourne la tresse et est aussi connue sous le nom d'*automorphisme de GARSIDE*, notée  $\mathcal{S}$  dans ce mémoire. Ces trois applications sont des involutions formant un groupe, qui peuvent être interprétées comme des rotations du diagramme de la tresse.

## Organisation de ce mémoire

Ce mémoire est composé de deux parties, la première est introductive et consiste à poser les définitions et notations déjà connues, la deuxième rassemble les résultats et réflexions propres à cette thèse. Le premier chapitre reprend les bases de la théorie des nœuds, ainsi que quelques-unes de ses propriétés fondamentales, le second introduit plus précisément les invariants et les différentes notations de nœuds utilisés dans la littérature. Ces deux premiers chapitres sont écrits de manière à présenter le plus de notions possibles, pour servir de première référence au lecteur non aguerri. La deuxième partie se divise en trois chapitres. Le troisième chapitre est dédié aux liens entre le polynôme de JONES et sa version modulaire, mais aussi à la construction des nœuds  $m$ -triviaux. Le quatrième chapitre se consacre exclusivement à l'étude du crochet de KAUFFMAN non clos et à ses applications, comme notamment les matrices diagrammatiques. Le cinquième chapitre se concentre sur le monoïde diagrammatique et en particulier son plongement dans les permutations. On trouvera en annexe deux derniers chapitres, le premier concerne les théories annexes que nous retrouverons dans ce mémoire, dont celle des tresses, et le deuxième se consacre à divers outils utilisés et calculs supplémentaires.



**Première partie**

**Généralités sur la théorie des nœuds**



---

## Introduction à la théorie des nœuds

---

### Sommaire du présent chapitre

<b>1.1 Premières définitions</b>	<b>16</b>
1.1.1 Diagrammes de nœuds . . . . .	17
1.1.2 Les mouvements de REIDEMEISTER . . . . .	20
<b>1.2 Propriétés fondamentales</b>	<b>23</b>
1.2.1 Orientabilité des nœuds et chiralité . . . . .	23
1.2.2 Nœuds alternants et les conjectures de TAIT . . . . .	26
1.2.3 D'autres propriétés . . . . .	30
<b>1.3 Opérations avec les nœuds</b>	<b>32</b>
1.3.1 Recollement de nœuds . . . . .	33
1.3.2 Mutation . . . . .	35
1.3.3 Nœuds satellites . . . . .	36
<b>1.4 Bibliographie de ce chapitre</b>	<b>38</b>

Il est important de distinguer le « nœud de la vie courante » du « nœud mathématique », bien que si l'on donne une définition informelle de ces deux objets, la seule différence entre eux est, *a priori*, minime :

- le premier nœud est l'enlacement d'une corde avec elle-même, et est pourvu de deux extrémités distinctes. On peut faire l'analogie d'une trajectoire continue dans l'espace ne s'intersectant pas avec elle-même avec un point de départ et d'arrivée différents ;
- le deuxième nœud est <sup>1</sup> l'enlacement d'une corde avec elle-même dont les extrémités ont été recolées. On peut de même faire l'analogie d'une trajectoire continue dans l'espace ne s'intersectant pas avec elle-même et revenant à son point de départ.

Comme on peut le constater, la seule différence entre les deux définitions est le caractère *fermé* de la trajectoire du nœud. Cette différence, qui peut sembler insignifiante au lecteur découvrant la théorie des

---

1. Bien que la définition I.1 est bien plus rigoureuse, celle donnée ici est parfaitement juste, mais moins formelle afin de simplifier la comparaison.

nœuds, change en réalité profondément la nature, notamment topologique, de ces deux types d'objets. Dans le premier cas, il est toujours possible de dénouer le nœud, il suffit pour l'une des extrémités de rebrousser chemin, au contraire dans le deuxième il n'est souvent pas possible de déformer le nœud pour obtenir une boucle simple.

Ainsi, le problème de dénouement a une solution triviale pour la première définition, mais extrêmement difficile pour la deuxième. Cette observation, parmi tant d'autres, ont amené en mathématique à étudier la *théorie des nœuds*.

## 1.1 Premières définitions

En introduction de ce chapitre, nous avons donné une définition du nœud grâce à une corde afin de pouvoir visualiser facilement ce qu'est cet objet. Afin de pouvoir travailler dessus et de l'étudier, il nous faut une définition plus formelle et l'énoncer avec des outils mathématiques déjà connus. Puisqu'un nœud amène des idées de déformations et qu'il semble évoluer dans notre espace à trois dimensions, nous pouvons nous appuyer sur des notions de topologie.

Nous définissons ainsi les nœuds de cette façon.

### Définition I.1 – Nœud.

On appelle *nœud* l'image à déformation près du cercle unité  $\mathcal{S}^1$  par un plongement  $\phi : \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dans l'espace réel à trois dimensions.

Il est important de noter la mention « à déformation près », ainsi un nœud, d'un point de vue plus abstrait, correspond à une classe d'équivalence suivant la relation d'isotopie de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Deux plongements du cercle donnent donc le même nœud si leurs images sont isotopes de manière ambiante, c'est-à-dire :

### Définition I.2 – Isotopie ambiante.

Pour  $E, F$  deux espaces topologiques et  $\phi_1 : E \rightarrow F$  et  $\phi_2 : E \rightarrow F$  deux plongements de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont *isotopes de manière ambiante* s'il existe une application continue  $h : F \times [0, 1] \rightarrow F$  telle que :

- (i) l'application  $h(\cdot, 0)$  est l'identité de  $F$ ,
- (ii) pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'application  $h(\cdot, t)$  est un homéomorphisme,
- (iii) pour tout  $x \in E$ , on a  $h(\phi_1(x), 1) = \phi_2(x)$ .

*Remarque I.3.* Dans l'intégralité du mémoire et sauf mention contraire, le terme *isotopie* désignera toujours l'isotopie ambiante.

Nous pouvons aussi observer que tous les nœuds sont, avant plongement, un simple cercle. Cela amène des propriétés intéressantes que nous verrons plus tard, mais surtout nous pouvons nous demander ce qu'il en est des « nœuds » utilisant plusieurs cordes différentes, objets que l'on retrouve parfois dans la vie courante. Nous pouvons parfaitement généraliser notre définition, mais nous ne pouvons plus appeler ces nouveaux objets des nœuds<sup>2</sup>.

Cette généralisation a été nommée *entrelacs* à  $n$  composantes,  $n$  représentant en quelque sorte le nombre de cordes nécessaires à son élaboration, ou d'un point de vue plus formel,  $n$  correspond au nombre de cercles plongés.

### Définition I.4 – Entrelacs.

On appelle *entrelacs à  $n$  composantes* l'image à déformation près de  $n$  cercles unités  $\mathcal{S}^1 \times \dots \times \mathcal{S}^1$

2. Sinon on serait amené à dire qu'il existe des emmêlements de nœuds, cela n'a pas de sens.

par un plongement  $\phi : \mathcal{S}^1 \times \cdots \times \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dans l'espace réel à trois dimensions.

*Remarque I.5.* On retrouve bien la définition I.1 dans le cas d'un entrelacs à 1 composante.

Il peut arriver que l'une des composantes d'un entrelacs (ou plusieurs) ne soit pas vraiment en interaction avec les autres, nous pouvons même en déformant l'espace les séparer complètement. Nous dirons, lorsque c'est le cas, que cette ou ces composantes ne sont pas *liées*, il convient également d'utiliser le symbole d'union disjointe pour le symboliser explicitement dans les raisonnements.

#### **Définition I.6 – Composante liée.**

Pour  $L$  un entrelacs et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux composantes différentes de  $L$ , on dit que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  ne sont pas liées directement s'il existe, quitte à déformer  $L$  par isotopie, un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$  qui sépare  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  dans deux sous-espaces distincts. Dans le cas contraire, on dira que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont liées directement. D'un autre côté, on dit que deux composantes différentes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  de  $L$  sont liées par chaîne s'ils existent des composantes  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$  de  $L$  toutes différentes deux à deux et différentes de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  tels que  $\mathcal{C}$  est directement lié à  $\mathcal{C}_1$ , qui est directement lié à  $\mathcal{C}_2$ , et ainsi de suite jusqu'à  $\mathcal{C}_k$  qui est directement lié à  $\mathcal{C}'$ . Finalement, on dit que les composantes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont liées si elles sont liées soit directement soit par chaîne.

De même on dit que deux ensembles de composantes liées (ou entrelacs ayant toutes leurs composantes liées)

$$L = \{\mathcal{C}_k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket = I \mid \forall i, j \in I, i \neq j, \mathcal{C}_i \text{ est liée à } \mathcal{C}_j\},$$

$$L' = \{\mathcal{C}_k, k \in \llbracket 1, n' \rrbracket = I' \mid \forall i, j \in I', i \neq j, \mathcal{C}_i \text{ est liée à } \mathcal{C}_j\}$$

sont liés s'ils existent  $\mathcal{C}$  une composante de  $L$  et  $\mathcal{C}'$  une composante de  $L'$  qui soient liées.

Maintenant que nous avons correctement défini nos objets d'études, nous pouvons revenir sur le problème de dénouement donné en introduction de ce chapitre. Le but est de déterminer si nous pouvons ou non dénouer un nœud donné, aussi il faudrait définir exactement ce but : qu'entendons-nous par un « nœud dénoué » ? L'analogie donnée était une *boucle simple*, c'est en effet un bon point de départ. Une corde n'est pas nouée<sup>3</sup> si on peut la placer de façon à avoir une ligne droite, nous pouvons faire de même avec les nœuds, ils ne sont pas noués s'ils ressemblent à un cercle.

Nous introduisons donc le *non-nœud* ou appelé plus souvent *nœud trivial*.

#### **Définition I.7 – Nœud trivial.**

Le *nœud trivial* est le seul nœud isotope à un cercle dans  $\mathbb{R}^3$ . Il est obtenu grâce au plongement canonique. On le note  $\bigcirc$ .

De la même façon, pour les entrelacs, nous avons le cas particulier où les composantes d'un entrelacs ne sont pas liées et peuvent être détachées, si de plus elles se révèlent être toutes individuellement isotopes au cercle, alors on peut considérer avoir dénoué notre entrelacs. Nous appellerons cet entrelacs dénoué *entrelacs trivial*, et sa définition est également une généralisation de la définition I.7.

#### **Définition I.8 – Entrelacs trivial.**

L'entrelacs trivial à  $n$  composantes, noté  $\bigcirc(n)$ , est le seul entrelacs isotope à une union disjointe de  $n$  cercles dans  $\mathbb{R}^3$ . Il est également obtenu grâce au plongement canonique de  $n$  cercles.

### 1.1.1 Diagrammes de nœuds

Les nœuds et entrelacs sont des objets vivant naturellement dans  $\mathbb{R}^3$ , cependant nous sommes habitués à travailler, et notamment dessiner<sup>4</sup>, dans  $\mathbb{R}^2$ . Nous pouvons bien sûr effectuer une simple

3. Au sens de la vie courante.

4. Bien qu'il est maintenant possible de dessiner en trois dimensions grâce à la réalité virtuelle.

projection de ces objets, mais afin de les visualiser correctement, et surtout de pouvoir lire la projection aisément, il est préférable de respecter quelques règles.

Il est évident que notre projection ne doit pas contenir un nombre de collisions trop important, autrement dit il faut éviter que plusieurs points de l'entrelacs ou du nœud ne soit projeté au même endroit. Il y aura très probablement des collisions, mais les minimiser rendra la projection plus claire. Par ailleurs, il faut toujours limiter le nombre de points en collision à 2 au maximum. On peut aussi symboliser la profondeur, et notamment la superposition des points lorsque c'est le cas, en estompant ceux se trouvant en dessous, mettant ainsi en valeur les points étant au-dessus des autres.

Toutes ces règles permettent de représenter les nœuds ou les entrelacs avec des *diagrammes* comprenant des *croisements*.

#### **Définition I.9 – Diagramme d'entrelacs.**

Pour  $L$  un entrelacs, on appelle *diagramme* de  $L$  une projection de  $L$  sur  $\mathbb{R}^2$  vérifiant les conditions suivantes :

- (i) chaque point de la projection n'a au plus que deux antécédents dans  $L$ ,
- (ii) les points de la projection ayant plusieurs antécédents forment un ensemble discret de  $\mathbb{R}^2$ .

Les croisements sont bien sûr les points de la projection où il y a eu collision.

#### **Définition I.10 – Croisement.**

Pour  $D$  un diagramme d'un entrelacs  $L$ , on appelle *croisement* chaque voisinage d'un point de  $D$  ayant plusieurs antécédents dans  $L$ .

*Remarques I.11.*

1. Comme expliqué brièvement auparavant, il est courant de mettre en valeur les points présentés comme « au-dessus » au niveau d'un croisement en effaçant légèrement ceux se trouvant « en dessous » dans un voisinage proche. Il existe dans la littérature d'autres « décorations » ou « notations » pour marquer la différence de hauteur.
2. Dans la suite de ce manuscrit, nous dirons que nous *invertissons* un croisement lorsque l'on échange le rôle des points se trouvant au-dessus et ceux se trouvant en dessous. À noter que cette transformation ne respecte pas en général l'isotopie ambiante.

Grâce aux définitions précédentes, nous pouvons maintenant représenter les nœuds et entrelacs sur un plan, on peut ainsi voir des exemples de diagrammes en figure 1.1.

Nous pouvons définir deux dernières notions autour des diagrammes. Commençons par remarquer qu'à cause des décorations au niveau des croisements, le tracé du diagramme est décomposé en plusieurs *arcs*, c'est-à-dire des morceaux de chemin limités aux extrémités par un point se trouvant au niveau d'un croisement.

#### **Définition I.12 – Arc.**

Pour  $D$  un diagramme d'un entrelacs, on appelle *arc* tout sous-ensemble connexe de  $D$  ayant comme extrémité des points situé au niveau d'un croisement et ne contenant pas de tels points ailleurs.

Il existe une variante de la définition I.12 correspondant aux portions du tracé passant au-dessus des autres. On les appelle des *ponts*.

#### **Définition I.13 – Pont.**

Pour  $D$  un diagramme d'un entrelacs, on appelle *pont* tout ensemble connexe de  $D$  ayant comme extrémités des points situé en dessous d'un croisement, n'en ayant pas ailleurs et contenant au moins un point situé au-dessus d'un croisement.

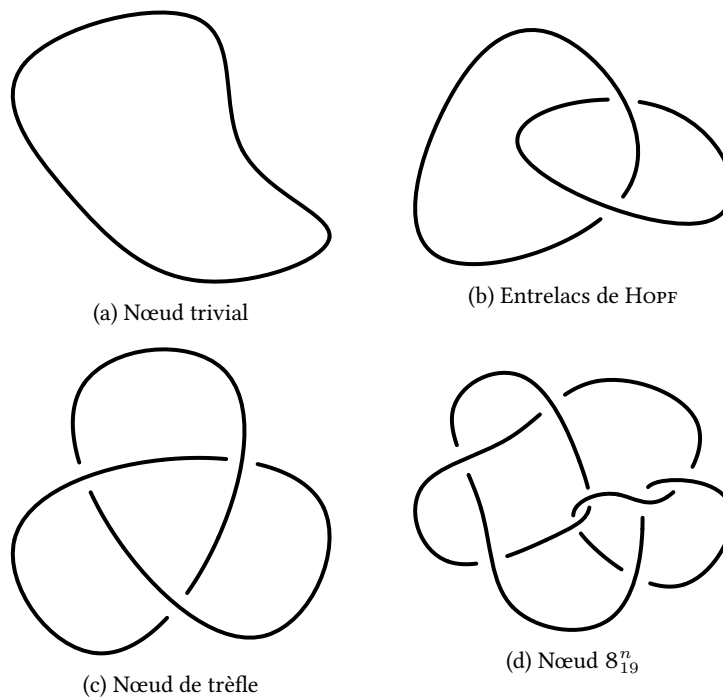


FIGURE 1.1 – Voici quelques diagrammes d’entrelacs. On voit notamment au niveau des croisements les parties effacées de la projection pour différencier le dessus du dessous.

À présent si nous oublions un instant que certaines parties du diagramme sont effacées, nous remarquons que celui-ci divise le plan en plusieurs zones délimitées par les arcs. Ces zones sont appelées *régions* ou *faces* du diagramme.

**Définition I.14 – Région.**

Pour  $D$  un diagramme d’un entrelacs, on appelle *région* ou *face* de  $D$  tout sous-ensemble connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ . La seule région non bornée est appelée *région (ou face) extérieure*.

Nous voyons à titre d’exemple que la figure 1.1c comprend 3 croisements, 6 arcs, 3 ponts et 5 régions.

*Remarques I.15.*

1. Nous pouvons faire un parallèle avec la théorie des graphes, notamment avec la relation d’EULER (Voir [Eul58, Propositio IV] pour les graphes planaires connexes. En effet, on a l’identité suivante :

$$c - a + f = 2$$

pour  $c$  le nombre de croisements,  $a$  le nombre d’arcs et  $f$  le nombre de faces. Attention toutefois au cas des entrelacs, si une des composantes ou plus n’est pas liées, l’hypothèse de connexité n’est pas vérifiée.

2. Il est aussi possible de projeter un entrelacs sur une sphère  $S^2$ , ce qui revient à considérer un point supplémentaire  $\infty$  du plan  $\mathbb{R}^2$ . Dans ce cas, toutes les faces sont bornées.

### 1.1.2 Les mouvements de REIDEMEISTER

Grâce à la sous-section 1.1.1, nous avons maintenant la possibilité de représenter les entrelacs sur un plan, mais cela amène également une nouvelle difficulté : en effet, il est parfaitement autorisé de déformer les entrelacs dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , et nous devons alors retranscrire ces déformations sur ses diagrammes. Il nous faut décrire les modifications d'un diagramme qui relève de l'isotopie dans  $\mathbb{R}^3$ , et ce pour deux raisons :

- Prenons un nœud  $K$  et considérons une méthode de projection  $\rho$  de  $K$  sur le plan  $\mathbb{R}^2$ . Nous pouvons obtenir un diagramme  $D_1$  de  $K$  avec  $\rho$ . Notons maintenant  $K'$  une déformation par isotopie de  $K$ , ainsi  $K'$  et  $K$  sont équivalents, et notons  $D_2$  le diagramme de  $K'$  obtenu avec  $\rho$ . A priori, nous avons deux diagrammes différents, même peut-être sensiblement distincts si  $K'$  a été obtenu par des déformations très prononcées. Pourtant  $D_1$  et  $D_2$  représentent toujours le même nœud.
- Posons  $L_1$  et  $L_2$  deux entrelacs et notons  $D_1$  et  $D_2$  des diagrammes les représentant respectivement. Pour savoir si  $L_1$  et  $L_2$  sont équivalents, il faudrait trouver une isotopie transformant l'un des entrelacs en l'autre. Si celle-ci existe bien, on pourrait projeter chaque étape de la déformation pour obtenir un « film » transformant un des diagrammes en l'autre. Ce « film » devrait suffire pour montrer que  $L_1$  et  $L_2$  sont équivalents.

Dans les deux cas la nécessité de déformer les diagrammes sans passer par l'isotopie de  $\mathbb{R}^3$  est présente. On peut bien sûr utiliser l'isotopie du plan pour étirer ou écourter des arcs, modifier leur courbure, même faire pivoter le diagramme, mais on ne peut pas avec cette méthode changer les interactions entre les croisements.

Ceci nous amène aux *mouvements de REIDEMEISTER*, introduit indépendamment par ALEXANDER et BRIGGS [AB27] et par REIDEMEISTER [Rei27] pour répondre à ce problème. Ces mouvements, au nombre de trois, permettent de fixer ce qu'il est possible de faire localement dans un diagramme pour le déformer, notamment au niveau des croisements, tout en préservant la nature de l'entrelacs représenté.

Le premier mouvement s'apparente à « enrouler » ou à « visser » une partie du diagramme, ou d'en faire l'opération inverse.

#### **Définition I.16 – 1<sup>er</sup> mouvement de REIDEMEISTER.**

Il est possible d'enrouler localement le diagramme sur lui-même, ou de le dérouler. Cette action permet de créer un nombre arbitraire de croisements supplémentaires, ou de retirer ceux qui correspondent à un enroulement.

Nous pouvons nous rapporter à la figure 1.2a qui représente l'une des deux transformations possibles, l'autre étant obtenue en inversant le croisement à l'origine de la boucle. Le deuxième mouvement concerne la superposition d'une partie du tracé par une autre.

#### **Définition I.17 – 2<sup>e</sup> mouvement de REIDEMEISTER.**

Il est possible de faire chevaucher localement deux parties connexes distinctes du diagramme ou de les séparer. Cette action crée deux croisements, ou supprime une telle paire de croisements.

La figure 1.2b représente une des deux situations possibles, l'autre étant obtenue en inversant les rôles de la partie au-dessus avec celle se trouvant en dessous. Le dernier mouvement permet de déplacer une partie du tracé par-dessus ou par-dessous un croisement.

#### **Définition I.18 – 3<sup>e</sup> mouvement de REIDEMEISTER.**

Il est possible de déplacer une partie connexe du diagramme par-dessus (ou par-dessous) un croisement si celle-ci est indépendante du voisinage de ce croisement.

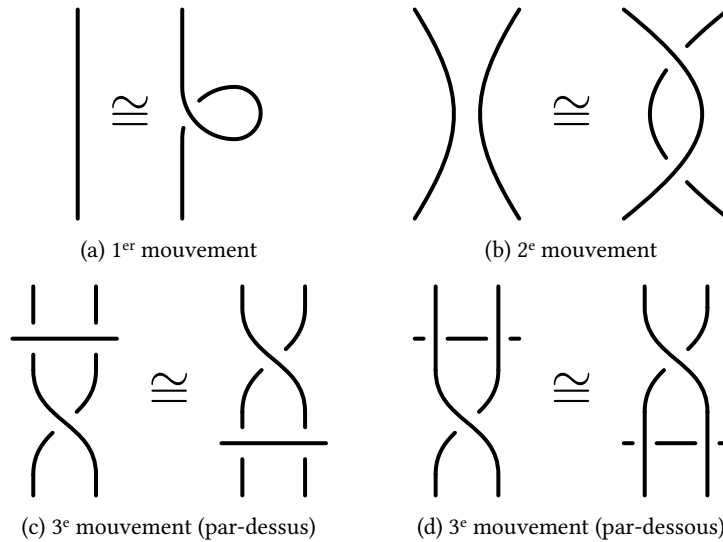


FIGURE 1.2 – Les mouvements de REIDEMEISTER. Il existe d'autres variantes de ces mouvements en changeant les rôles des parties se trouvant en dessous avec celle se trouvant au-dessus.

Nous pouvons voir en figure 1.2c et figure 1.2d ce type de mouvement, dont il existe une variante pour chacun de ces schémas où le croisement créé par les deux tracés verticaux est inversé. La figure 1.3 nous donne un exemple de déformation de diagramme.

À présent revenons au problème du dénouement introduit plus tôt. Maintenant que nous avons défini notre but et des outils permettant de retranscrire nos étapes de résolution, il nous faut trouver ces étapes. Il n'existe malheureusement pas encore de réponses satisfaisantes, pas d'algorithmes efficaces pour nous aider. La plus grosse difficulté est due au fait qu'il est parfois nécessaire de créer beaucoup de croisements avant de pouvoir établir que deux diagrammes sont équivalents, même si ces deux diagrammes ont le même nombre de croisements.

Nous avons néanmoins quelques bornes sur le nombre de mouvements à effectuer. Tout d'abord dans le cadre général, nous avons une borne du nombre de mouvements de REIDEMEISTER nécessaires pour passer d'un diagramme à un autre qui lui est équivalent.

**Théorème I.19 – Borne du nombre de mouvements de REIDEMEISTER.**

Pour deux diagrammes  $D_1$  et  $D_2$ , on note  $n$  la somme du nombre de croisements de  $D_1$  et  $D_2$ . Alors on peut obtenir  $D_2$  à partir de  $D_1$  par au plus  $\exp_2^c(n)$  mouvements de REIDEMEISTER, où  $c = 10^{1\,000\,000}$ . **COWARD et LACKENBY (2014)** – [CL14, Theorem 1.1 p. 1023]

La notation  $\exp_a^b(x)$  correspond à une tour de puissance de  $a$  de hauteur  $b$ , le tout à la puissance  $x$ , c'est-à-dire :

$$\exp_a^b(x) = a^{a^{\dots^{a^x}}} \quad \text{où } a \text{ apparaît } b \text{ fois}$$

Ainsi on se rend compte que la borne donnée par le théorème I.19 n'est pas utile en pratique, mais nous savons désormais qu'une telle borne existe. Et cela donne également une borne du nombre maximal de croisements pouvant être atteint lors des différentes étapes puisque les mouvements de REIDEMEISTER ne créent qu'un nombre fini de croisements à chaque utilisation.

Dans le cadre un peu plus précis du problème du dénouement des nœuds, nous avons une borne bien meilleure.

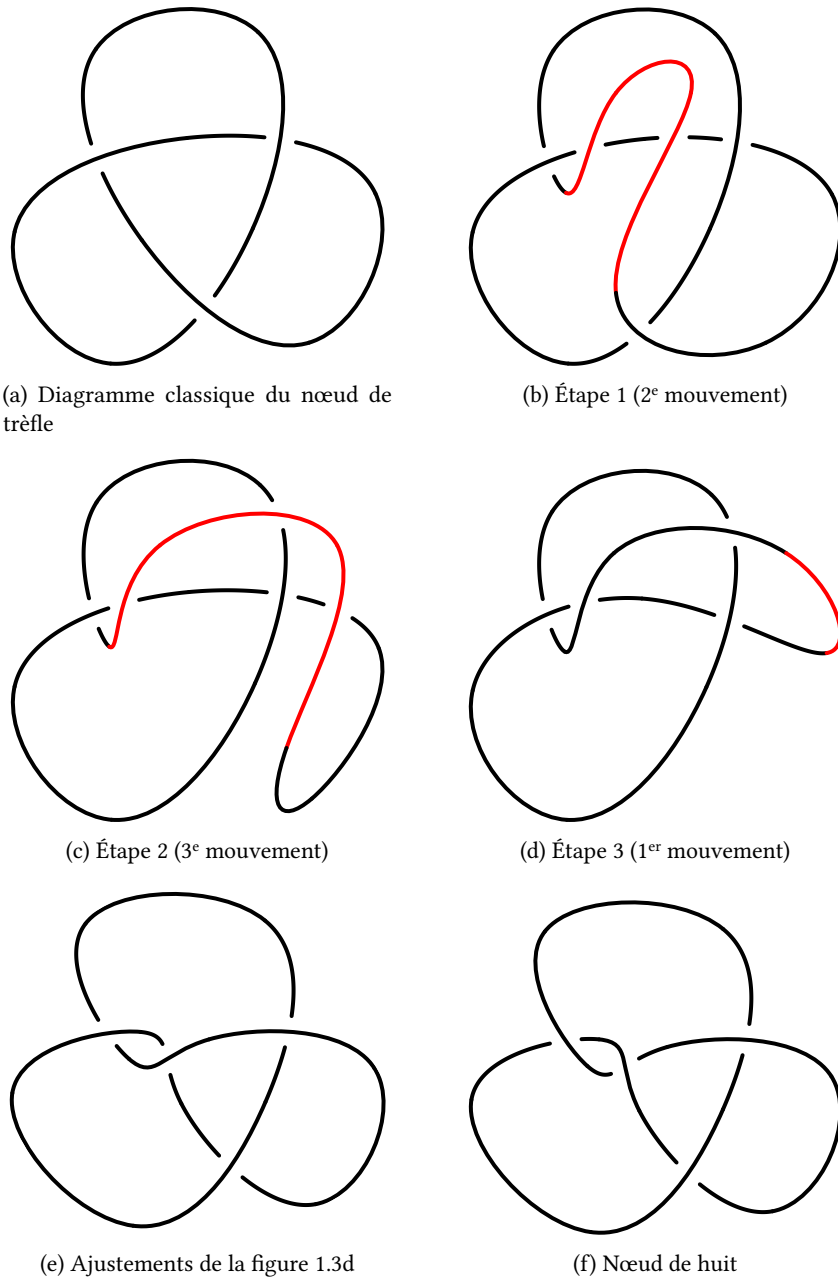


FIGURE 1.3 – On peut voir ici plusieurs étapes de déformation du nœud de trèfle en figure 1.3a avec des mouvements de REIDEMEISTER. Nous obtenons au final un diagramme ressemblant à la figure 1.3f, qui n'est pas le nœud de trèfle.

**Théorème I.20 – Borne du nombre de mouvements de REIDEMEISTER pour le nœud trivial.**

Pour  $D$  un diagramme du nœud trivial avec  $c$  croisements, la déformation de  $D$  en un diagramme canonique<sup>5</sup> du nœud trivial demande au plus  $(236c)^{11}$  mouvements de REIDEMEISTER. De plus, à chaque étape, le diagramme a au plus  $(7c)^2$  croisements.

**LACKENBY (2015)** – [Lac15, Theorem 1.1 p. 493]

Ainsi en connaissant le nombre maximum d'étapes, nous pouvons essayer toutes les combinaisons possibles pour savoir si un diagramme représente le nœud trivial. Cela représente tout de même un nombre extrêmement conséquent de combinaisons, encore une fois cette borne n'est pas utilisable en pratique. Cependant l'existence de cette borne polynomiale apporte de l'espoir quant à une possible amélioration de celle du théorème I.19.

## 1.2 Propriétés fondamentales

Il est temps de s'attarder sur les objets que l'on a définis tout le long de la section 1.1. Pour commencer nous avons, juste après la définition I.1, souligné le fait que les nœuds sont à la base des cercles et que certaines de leurs propriétés en sont héritées, par exemple les nœuds sont des variétés topologiques connexes fermées de dimension 1, comme le cercle. Cela est aussi vrai pour les entrelacs sans le caractère connexe. Nous en verrons une autre dans la sous-section 1.2.1, accompagnées d'autres en rapport. Nous nous attarderons aussi sur certaines propriétés des diagrammes en sous-section 1.2.2.

### 1.2.1 Orientabilité des nœuds et chiralité

Une propriété venant du cercle, qui sera utilisée plusieurs fois par la suite, est le caractère *orientable* des entrelacs. Sans entrer dans les détails techniques, nous choisissons une orientation pour un entrelacs en orientant toutes ses composantes, chacune ayant deux orientations possibles. Cela revient à donner un sens de parcours, une direction à suivre en tout point pour chaque composante.

**Définition I.21 – Entrelacs orienté.**

Pour  $L$  un entrelacs, on dit que  $L$  est *orienté* si chacune de ses composantes est munie d'une orientation.

*Remarque I.22.* Nous pouvons également retranscrire l'orientation d'un entrelacs sur un diagramme, ce qui mène à la définition de *diagramme orienté*.

À présent nous devons être prudents avec la notion d'équivalence, en effet un même entrelacs  $L$  peut être orienté d'au moins 2 manières différentes, et il n'est pas certain que nous puissions changer l'orientation de  $L$  en le déformant. Mais si celui-ci en est capable, nous dirons alors que  $L$  est *réversible*.

**Définition I.23 – Entrelacs réversible.**

Un entrelacs  $L$  est dit *réversible* s'il est possible, en déformant  $L$  par isotopie, d'inverser son orientation.

Nous voyons en figure 1.4 que le nœud de trèfle est réversible. La notion de réversibilité peut paraître abstraite pour le moment, nous pouvons nous demander quel est le lien entre des entrelacs qui ne peuvent pas être renversés et les problèmes de déformations évoqués auparavant. En fait, la réversibilité jouera un rôle lorsque l'on commencera à s'intéresser aux opérations définies sur les entrelacs, comme la *somme connexe*.

5. C'est-à-dire un cercle, en particulier sans croisements.

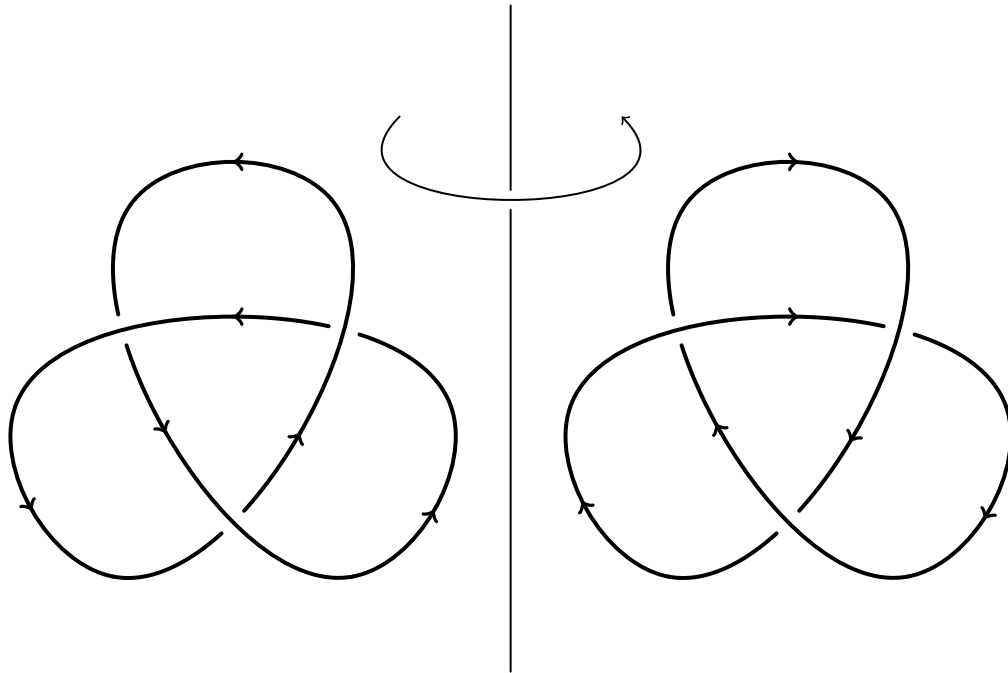


FIGURE 1.4 – Le nœud de trèfle est réversible, il suffit de le pivoter pour renverser son orientation. Il ne faut pas confondre ici la rotation du diagramme et son symétrique ; pour éviter cette ambiguïté, on peut imaginer cette scène dans  $\mathbb{R}^3$ .

Outre la réversibilité, nous pouvons maintenant distinguer les croisements d'un diagramme orienté en deux catégories. En effet si nous nous plaçons au niveau d'un point se trouvant au-dessus d'un croisement, et que nous regardons dans la même direction que l'orientation nous indique en ce point, alors le tracé passant en dessous de nous peut aller de la droite vers la gauche ou dans le sens contraire. Nous définissons ainsi le *signe* d'un croisement.

**Définition I.24 – *Signe d'un croisement.***

Pour  $c$  un croisement d'un diagramme orienté, on note  $\uparrow_c$  le point se trouvant au-dessus et  $\downarrow_c$  celui se trouvant en dessous. Alors si l'orientation au niveau de  $\uparrow_c$  indique le nord et que :

- (i) celle de  $\downarrow_c$  l'ouest, alors  $c$  est positif,
- (ii) celle de  $\downarrow_c$  l'est, alors  $c$  est négatif.

*Remarque I.25.* L'action d'inverser un croisement change son signe.

Nous pouvons voir les deux types de croisements en figure 1.5. L'appellation « signe » n'est pas un hasard ici, nous verrons cela avec les liens entre les entrelacs et les *tresses*. En attendant, si nous associons l'idée de signe d'un croisement avec le signe d'un nombre, nous pouvons nous amuser à « additionner » ces signes. Cela nous donne une quantité entière, appelée *entortillement*, que nous utiliserons plus tard.

**Définition I.26 – *Entortillement.***

Pour  $D$  un diagramme orienté, on appelle *entortillement* de  $D$  l'entier  $wr(D)$  obtenu en faisant la différence du nombre de croisements positifs avec le nombre de croisements négatifs.

En plus de l'orientation de l'entrelacs, nous pouvons aussi considérer l'orientation de l'espace  $\mathbb{R}^3$ ,

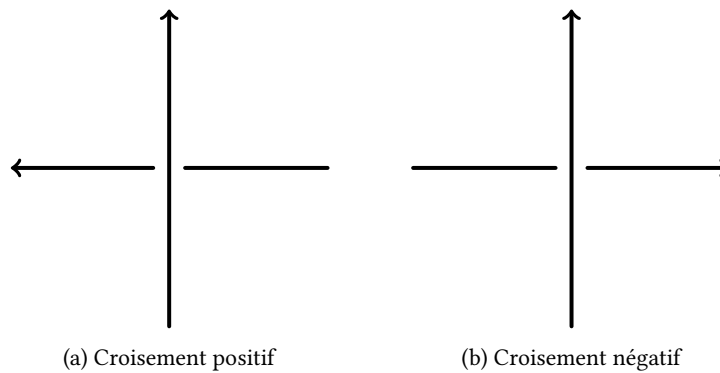


FIGURE 1.5 – Signe des croisements dans les diagrammes orientés.

et se demander ce qu'il se passe si celle-ci change. Nous savons déjà que les transformations globales comme les translations, les rotations et les homothéties relèvent de l'isotopie globale, et en particulier celles-ci préservent l'orientation, mais nous pouvons aborder le cas des symétries.

Il faut d'abord fixer la symétrie ou le type de symétrie à considérer. Par exemple dans le plan, une symétrie centrale préserve l'orientation, mais une symétrie par rapport à une droite la renverse. Si on se place dans  $\mathbb{R}^3$ , la symétrie centrale renverse cette fois l'orientation, par contre une symétrie par rapport à une droite la préserve.

Nous allons donc nous concentrer sur les symétries par rapport à un hyperplan de l'espace, ainsi elles renverseront toujours l'orientation de l'espace, exactement comme le ferait un miroir. La symétrie de l'espace affecte évidemment ce qu'il contient, et nous pouvons ainsi introduire les images miroirs des entrelacs. Nous pouvons nous poser la même question que précédemment concernant l'équivalence d'un entrelacs et de son image miroir.

#### Définition I.27 – *Entrelacs achiral.*

Un entrelacs  $L$  est dit *achiral* si l'image miroir de  $L$  est isotope à  $L$ . Dans le cas contraire, on dit que  $L$  est *chiral*.

*Remarque I.28.* On peut obtenir l'image miroir d'un diagramme d'entrelacs en inversant tous ses croisements. Pour visualiser ce phénomène, on peut dessiner un diagramme quelconque sur le recto d'une feuille puis regarder son image par transparence au verso. L'image par transparence que l'on observe a bien tous les croisements inversés. En réalité nous pouvons expliquer ceci simplement : prenons un entrelacs  $L$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , et notons  $H$  un hyperplan n'intersectant pas  $L$ , qui est en réalité notre feuille de papier. Lorsque nous effectuons une symétrie de  $L$  par rapport à  $H$  pour obtenir  $L'$  et que nous projetons  $L$  et  $L'$  sur  $H$ , nous obtenons le même ensemble. Seulement, en fonction de quel côté de  $H$  nous nous trouvons, l'orientation de l'espace change à cause de la symétrie.

**▲ Attention I.29.** Les notions *réversible* et *achiral* sont complètement différentes ! Le premier concerne l'orientation de l'entrelacs, le deuxième celle de l'espace ambiant. Un entrelacs peut très bien être réversible mais chiral, comme le nœud de trèfle.

Le nœud de huit est achiral, comme nous pouvons le voir en figure 1.6. Pour aller plus loin, nous pouvons définir quatre types de symétrie, chaque type étant défini par l'action sur l'orientation de l'espace et de l'entrelacs. De là nous pouvons parler des groupes associés, et ainsi voir quel groupe de symétries laisse un entrelacs invariant. Ce point de vue a été abordé en partie par HOSTE, THISTLETHWAITE et WEEKS [HTW98].

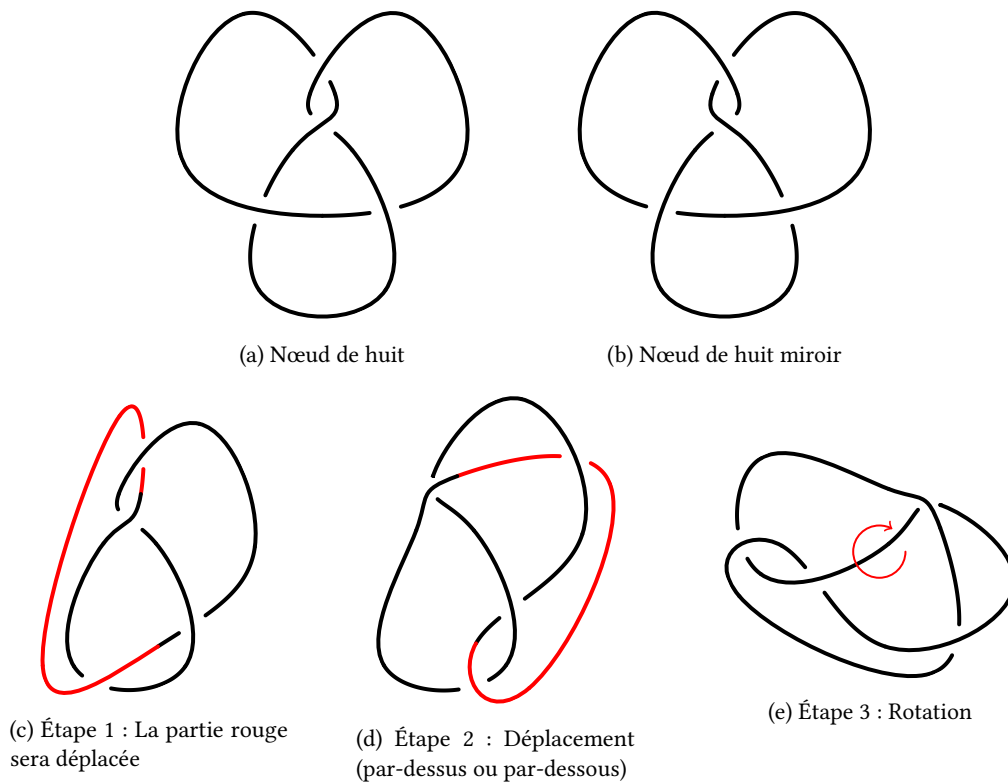


FIGURE 1.6 – Le plus petit nœud achiral, appelé « nœud de huit ».

## 1.2.2 Nœuds alternants et les conjectures de TAIT

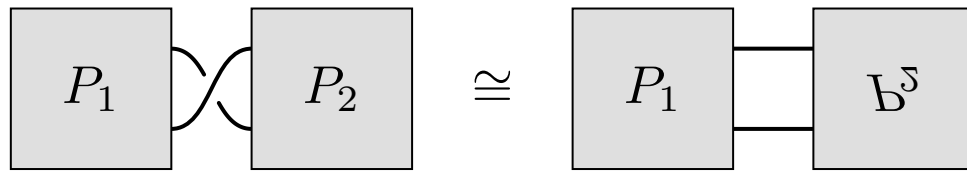
Parmi les diagrammes en figure 1.1, nous remarquons que certains d'entre eux présentent une certaine régularité lorsque l'on décide d'en suivre le tracé. En effet, nous passons alors successivement en dessous et au-dessus de chaque croisement rencontré, comme si nous alternons entre l'avant et l'arrière du diagramme. Les diagrammes ayant cette particularité ont ainsi été qualifiés d'*alternant*, et l'entrelacs correspondant également.

### Définition I.30 – *Entrelacs alternant.*

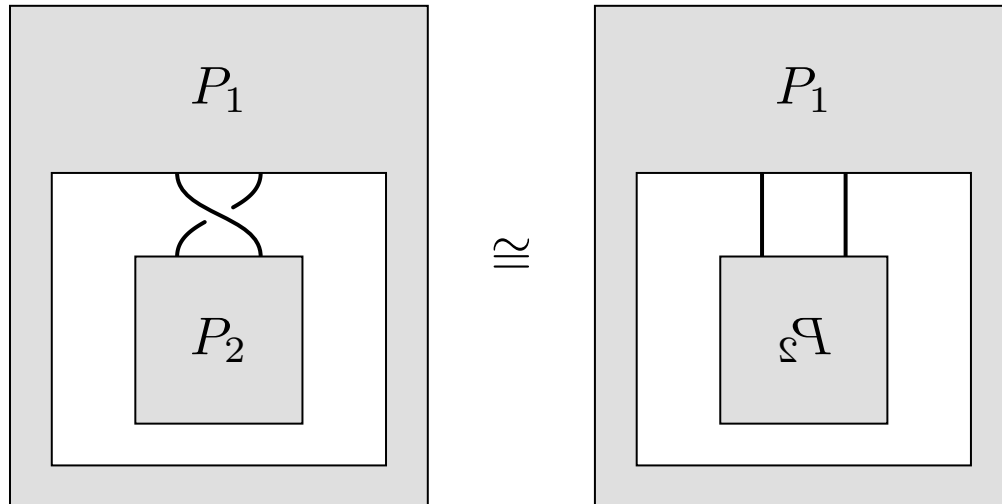
Un entrelacs est dit *alternant* s'il existe un diagramme de cet entrelacs de façon à ce que le tracé de chaque composante passe alternativement en dessous et au-dessus au niveau de chaque croisement.

**▲ Attention I.31.** Un entrelacs alternant admet également des diagrammes non alternants ! Par exemple en figure 1.3e nous avons un diagramme non alternant du nœud de trèfle, qui est pourtant un nœud alternant.

La propriété d'alternance est parmi les plus anciennes qui ont été découvertes, notamment parce que les entrelacs ayant cette propriété abondent pour un petit nombre de croisements. Au tout début de la théorie des nœuds, on retrouve même dans les écrits une négligence de l'existence d'entrelacs non alternants, laissant parfois le doute sur les énoncés des résultats. Nous pouvons même voir dans les premières lignes des travaux de TAIT [Tai98] sur les nœuds une sorte de déduction, que nous savons erronée, affirmant que tous les nœuds sont alternants. Néanmoins, si nous nous restreignons aux entrelacs alternants, ces écrits sont tout à fait valables et contiennent même des conjectures, en apparence évidentes,



(a)  $P_1$  et  $P_2$  sont reliées par un seul croisement, on peut retourner  $P_2$  verticalement pour l'enlever.



(b)  $P_2$  est entourée par  $P_1$ , les deux parties étant en interaction au travers d'un unique croisement,  $P_2$  peut être retournée horizontalement.

FIGURE 1.7 – Ces croisements peuvent être retirés en retournant certaines parties du diagramme. Lorsque  $P_2$  est juste un arc, ces réductions correspondent simplement au 1<sup>er</sup> mouvement de REIDEMEISTER.

qui sont pourtant restées sans preuve durant près d'un siècle.

La première de ces conjectures concerne le nombre de croisements minimal d'un entrelacs. Il est parfaitement raisonnable de penser que pour un entrelacs donné, le nombre de croisements nécessaire pour le représenter par un diagramme ait un minimum, puisque ce nombre est un entier positif. De plus comme les entrelacs triviaux ne nécessitent pas de croisements sur leur diagramme le plus simple, nous savons qu'un entrelacs non trivial nécessite au moins 1 croisement<sup>6</sup>, ce qui écarte la possibilité que ce minimum soit le même pour tous les entrelacs.

**Définition I.32 – Nombre minimal de croisements.**

Pour  $L$  un entrelacs, le *nombre minimal de croisements* de  $L$  est le minimum de croisements nécessaire à sa représentation par un diagramme. On le note  $cr(L)$ .

Ce nombre indique, pour un entrelacs  $L$ , que tout diagramme de  $L$  a au moins  $cr(L)$  croisements, ce qui peut servir à déterminer si on peut simplifier un diagramme de  $L$ , ou même à affirmer qu'un diagramme ne représente pas  $L$  si celui-ci comporte moins de  $cr(L)$  croisements. Il faut cependant déterminer ce nombre, et une idée naïve serait de partir d'un diagramme quelconque de  $L$  et de le simplifier autant que possible. Avant de savoir s'il s'agit d'une bonne idée, il nous faut définir ce que l'on entend par « simplifier » un diagramme.

6. En fait un entrelacs non trivial nécessite toujours au moins 2 croisements, à cause du premier mouvement de REIDEMEISTER.

**Définition I.33 – Diagramme réduit.**

Un diagramme d'entrelacs est dit *réduit* s'il ne comporte pas de croisement séparant le diagramme en deux parties indépendantes. La réduction de ces croisements est illustrée en figure 1.7.

Cette définition, reformulée avec les notions actuelles, provient de TAIT [Tai98]. Nous pourrions certes encore diminuer le nombre de croisements dans certains cas, notamment lorsque qu'une situation rappelant le deuxième mouvement de REIDEMEISTER apparaît. La définition I.33 suffit néanmoins à énoncer la première conjecture.

**Théorème I.34 – 1<sup>re</sup> conjecture de TAIT.**

Tout diagramme alternant réduit a le nombre minimal de croisements possible.

**TAIT (1898)** – [Tai98, Part I, §4 p. 277]

*À propos de la démonstration :*

La conjecture a été montrée par KAUFFMAN [Kau87, Theorem 2.10 p. 402], MURASUGI [Mur87], et THISTLETHWAITE [Thi87, Corollary 1 p. 299] en utilisant le polynôme de JONES, que nous verrons plus tard. Une autre preuve, géométrique cette fois, a été donnée par GREENE [Gre17, Theorem 1.2 p. 2].

Ainsi notre idée naïve de départ donne un résultat correct pour les diagrammes alternants, mais elle ne suffit pas à démontrer la conjecture, encore moins à déterminer si ce résultat peut être étendu. Nous pouvons voir ici que même une question simple peut parfois cacher une solution extrêmement complexe<sup>7</sup>.

TAIT a énoncé une autre conjecture sur les nœuds achiraux, il a en effet remarqué qu'il y avait un équilibre entre les croisements positifs et négatifs de ces nœuds. Plus généralement, si nous prenons l'image miroir  $L'$  d'un entrelacs  $L$ , nous avons vu avec la remarque I.28 que cela revient à inverser tous les croisements de  $L$  sur l'un de ses diagrammes, que nous prenons réduit. Nous savons aussi qu'inverser un croisement change également son signe, ainsi l'entortillement de  $L'$  est l'opposé de celui de  $L$ , c'est-à-dire  $wr(L') = -wr(L)$ . Nous en venons à la conclusion que dans le cas d'un entrelacs achiral, où  $L$  et  $L'$  sont isotopes, cet entortillement doit être nul. Énonçons cette conjecture :

**Théorème I.35 – 2<sup>e</sup> conjecture de TAIT.**

Tout diagramme alternant réduit d'un entrelacs achiral a toujours un entortillement nul.

**TAIT (1898)** – [Tai98, Part I, §13 p. 288]

*À propos de la démonstration :*

La conjecture a été montrée par les travaux de THISTLETHWAITE [Thi88, Theorem 1 p. 311], et KAUFFMAN [Kau87, Theorem 3.1 p. 403] avait énoncé une conjecture plus moderne suite à son théorème.

Tout comme la première conjecture, il aura fallu un siècle de recherche pour démontrer celle-ci. Le raisonnement que nous avons tenu pour introduire cette conjecture n'est en réalité pas assez rigoureux, nous supposons intrinsèquement que l'entortillement est constant pour chaque diagramme réduit d'un même entrelacs par exemple. Cette dernière supposition, nous allons le voir, est vraie pour les entrelacs alternants, mais il existe des contre-exemples pour le cas non alternant.

La troisième conjecture principale de TAIT est également connue sous le nom de "Tait flyping conjecture", ou de « conjecture des flypes<sup>8</sup> de TAIT ». Elle affirme qu'il est possible, à partir d'un diagramme alternant d'un entrelacs  $L$ , de le déformer par des opérations de *flype* pour obtenir n'importe quel autre diagramme alternant de  $L$ . Ces opérations dont il est question consistent simplement à retourner une partie du diagramme, c'est quasiment la même idée que pour la réduction mais le but ici n'est pas de réduire le nombre de croisements.

7. Ce qui arrive aussi (souvent) en dehors de la théorie des nœuds, et même en dehors des mathématiques.

8. Le terme « flype » est intraduisible.

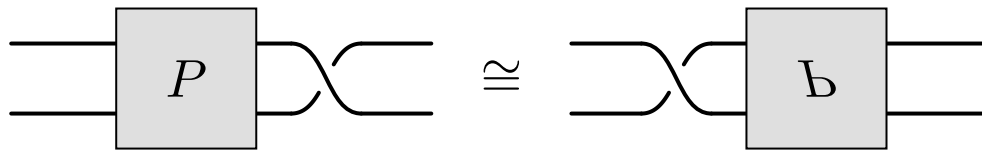


FIGURE 1.8 – Le mouvement flype consiste à retourner une partie  $P$  du diagramme, tout en préservant l'isotopie.

### Définition I.36 – *Flype*.

Pour  $D$  un diagramme, on note  $P$  une partie de  $D$ . Le mouvement de *flype* au niveau de  $P$  consiste à pivoter  $P$  d'un demi-tour, l'axe de rotation appartenant au plan contenant le diagramme  $D$ .

On se reportera à la figure 1.8 pour une illustration d'un tel mouvement. Nous remarquons que les mouvements de réduction des diagrammes sont en particulier des flypes, mais nous pouvons parfaitement choisir de retourner une partie d'un diagramme qui est fortement dépendante de son complémentaire.

Pour écrire cette conjecture, nous avons besoin de la notion de *primalité* d'un entrelacs, que nous verrons en définition I.48. Nous ne pouvons même pas résumer maintenant cette propriété avec les définitions introduites précédemment, laissons pour le moment ce terme de côté. Rappelons-nous seulement que l'hypothèse spécifiant que l'entrelacs doit être *premier* est nécessaire ici.

### Théorème I.37 – 3<sup>e</sup> conjecture de TAIT (*Conjecture des flypes*.)

Pour deux diagrammes  $D_1$  et  $D_2$  alternants réduits d'un même entrelacs premier orienté, il est possible de déformer  $D_1$  en  $D_2$  par une série de flype.

TAIT (1898) – [Tai98, Part I, §15 p. 290]

À propos de la démonstration :

Par MENASCO et THISTLETHWAITE [MT93, Main Theorem p. 116].

Ce résultat permet de prouver d'autres conjectures soulevées par TAIT, que nous énonçons ci-après.

**Corollaire I.38.** *Tous les diagrammes alternants réduits d'un même entrelacs ont le même entortillement.*

À propos de la démonstration :

Il suffit de remarquer que les flypes préservent l'entortillement. Ce résultat est mentionné par MURASUGI [Mur87, Corollary 7 p. 189] et GREENE [Gre17, Theorem 1.2 p. 2].

**Corollaire I.39.** *Le nombre minimal de croisements pour un entrelacs alternant achiral est toujours pair.*

Démonstration :

Le résultat découle du théorème I.35 et du corollaire I.38. □

Nous l'avons vu, à chaque fois ces résultats concernent les entrelacs alternants. Pour ce qui est du cas non alternant, nous avons pour la plupart des contre-exemples connus, ou alors la question est ouverte. C'est le cas de la première conjecture, encore ouverte pour les entrelacs non alternants lors de l'écriture de ce mémoire. Bien évidemment il faut préciser le terme « diagramme réduit » pour éviter des chevauchements qui peuvent être retirés avec le deuxième mouvement de REIDEMEISTER.

Concernant la deuxième conjecture, ainsi que le corollaire I.39, il existe un contre-exemple de nœud achiral avec 15 croisements découvert par HOSTE, THISTLETHWAITE et WEEKS [HTW98] alors qu'ils tabulaient les nœuds. Nous pouvons le voir en figure 1.9. Jusqu'en 2008, il s'agissait du seul contre-exemple connu, les travaux de STOIMENOW [Sto08, Theorem 5.1 p. 289] (dont la preuve complète est dans un article non publié séparé [Sto07]) ont depuis exhibés une famille infinie de tels nœuds.

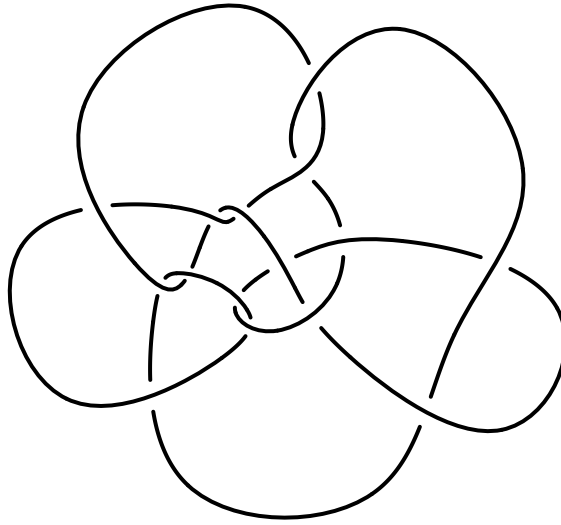


FIGURE 1.9 – Le plus petit nœud achiral avec un nombre impair de croisements.

Le corollaire I.38 est également faux dans le cas non alternant, un contre-exemple connu<sup>9</sup> est la paire de PERKO. Nous pouvons voir ces deux nœuds en figure 1.10. Cette paire est également un contre-exemple pour la troisième conjecture puisque, rappelons-le, les flypes préservent l’entortillement.

Les entrelacs alternants sont, comme nous pouvons le voir, bien plus compréhensibles à ce jour que les autres.

### 1.2.3 D’autres propriétés

Dans cette sous-section, nous allons voir d’autres propriétés principales, mais qui ne sont pas utilisées ailleurs dans ce mémoire.

Nous retrouvons dans cette catégorie les entrelacs *sauvages*<sup>10</sup>, opposés à la notion d’entrelacs *apprivoisés*. Ce sont en quelque sorte des anomalies topologiques qui peuvent servir de contre-exemple à beaucoup de notions que nous avons ou que nous allons aborder. De ce fait, beaucoup considèrent les entrelacs sauvages comme une sorte d’« extension » de la théorie des nœuds, vu ici comme l’ensemble des entrelacs apprivoisés. Ainsi il arrive dans les écrits qu’il ne soit pas précisé que l’on travaille exclusivement avec les entrelacs apprivoisés.

#### Définition I.40 – Entrelacs apprivoisé.

On dit qu’un entrelacs  $L$  est *apprivoisé* s’il peut être déformé dans  $\mathbb{R}^3$  en un polygone fermé ayant un nombre fini de segments. Dans le cas contraire, on dira que  $L$  est *sauvage*.

Nous voyons un exemple en figure 1.11. Précisons maintenant que, dans l’entièreté de ce mémoire, tous les entrelacs et nœuds considérés sont apprivoisés.

Il existe deux autres notions, plus légitimes que la précédente dirons-nous, que sont les entrelacs *toriques* et les entrelacs *hyperboliques*. La première est donnée lorsqu’un entrelacs  $L$  peut être déformé pour « reposer » sur la surface d’un tore. Cette particularité structurelle a permis, comme avec les

9. Et chargé d’un fond historique. Durant plusieurs dizaines d’années, les deux nœuds composant cette paire étaient vus comme différents, ce que le travail de PERKO [Per74] a réfuté.

10. Ne vous inquiétez pas, ils ne mordent pas. Et ils n’ont pas de lance non plus.

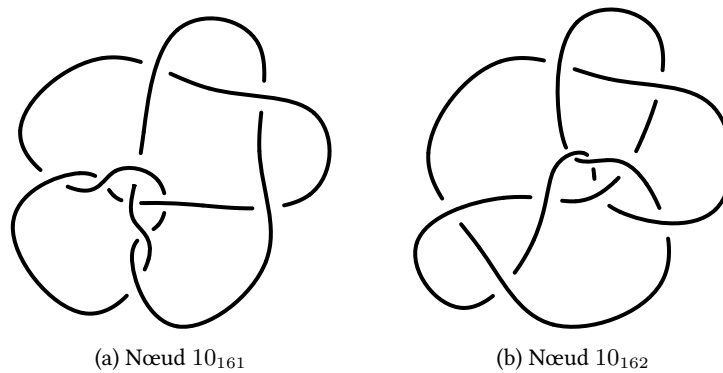


FIGURE 1.10 – La paire de PERKO. Ces deux diagrammes représentent le même nœud, mais ont un entrelacement différent. Les noms indiqués sont ceux de la table originale de ROLFSEN [Rol03], qui est depuis corrigée.

entrelacs alternants, de mieux les comprendre. Ils peuvent être représentés avec seulement deux entiers, étant donné que nous connaissons leur allure géométrique.

**Définition I.41 – Entrelacs torique.**

Un entrelacs est dit *torique* s'il peut être déformé dans  $\mathbb{R}^3$  pour être contenu dans la surface d'un tore. Lorsque c'est le cas, un tel entrelacs  $L$  peut être représenté par le nombre de rotations longitudinales, noté  $p$ , ainsi que par le nombre de rotations méridionales, noté  $q$ , autour du tore. On pourra alors préciser que  $L$  est  $(p, q)$ -torique.

La deuxième notion fait référence à d'autres champs des mathématiques que nous n'allons pas aborder ici, mais nous pourrions consulter le livre de ADAMS [Ada04] pour en savoir plus.

**Définition I.42 – Entrelacs hyperbolique.**

Un entrelacs est dit *hyperbolique* si, lorsqu'il est plongé dans la surface d'une sphère  $S^3$ , a un complémentaire admettant une métrique de RIEMANN de courbure constante égale à  $-1$ .

Les notions « torique » et « hyperbolique », avec celle des entrelacs « satellites » que nous verrons en sous-section 1.3.3, permettent de distinguer les entrelacs parmi ces trois catégories.

**Théorème I.43 – Distinction des entrelacs hyperboliques, satellites et toriques.**

Tout entrelacs appartient exclusivement à l'une de ces trois catégories : hyperbolique, satellite ou torique.

THURSTON (1982) – [Thu82, 2.5 Corollary p. 360]

À propos de la démonstration :

Annoncé comme corollaire d'un théorème concernant la classification des 3-variétés.

Une dernière propriété que nous présentons ici concerne les entrelacs *quasi alternants*. Cette notion a été introduite par ADAMS et al. [Ada+92] dans l'espoir d'étendre certains résultats connus pour les entrelacs alternants.

**Définition I.44 – Entrelacs quasi alternant.**

On dit qu'un entrelacs  $L$  est *quasi alternant* si  $L$  n'est pas alternant, et s'il existe un diagramme  $D$

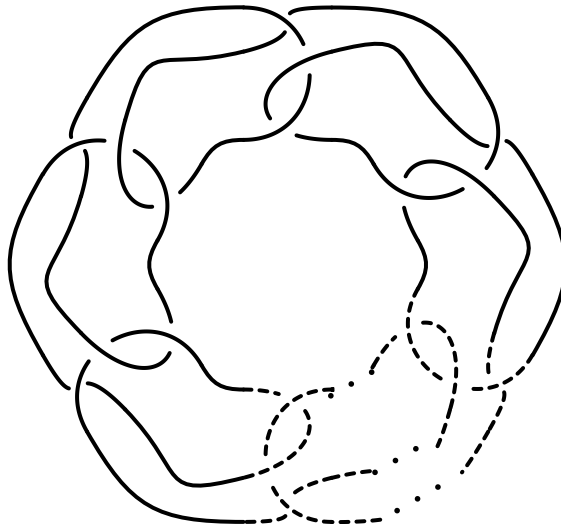


FIGURE 1.11 – Construction d'un nœud sauvage en répétant indéfiniment un modèle.

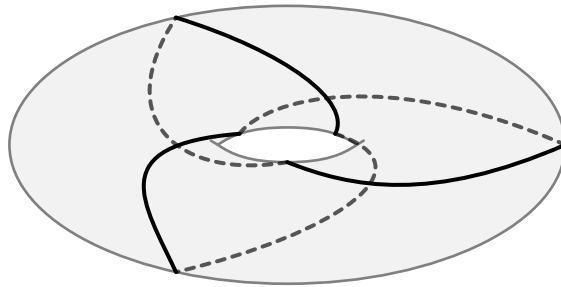


FIGURE 1.12 – Le nœud de trèfle peut reposer sur un tore, c'est un nœud torique. On peut le noter par la paire  $(2, 3)$ .

de  $L$  tel que celui-ci devient alternant si l'on inverse un seul de ses croisements.

*Remarque I.45.* La définition I.44 peut être étendue à  $m$ -quasi alternant si l'on doit inverser au minimum  $m$  croisements au lieu d'un seul.

Cette définition s'applique à la plupart des nœuds premiers non alternant jusqu'à 11 croisements, n'ayant que très peu d'exception. C'est en soi un fait amusant si l'on garde en perspective que la plupart des nœuds avec peu de croisement sont alternants. D'autres résultats sont présentés dans l'article pour le lecteur qui souhaiterait en savoir plus.

### 1.3 Opérations avec les nœuds

Nous avons à présent une définition fixée des entrelacs et nous avons énoncé certaines de leurs propriétés. Ce que nous aimerions faire maintenant, en bon mathématicien, serait de combiner des entrelacs entre eux ou de trouver des transformations (non isotopiques ici) de ces objets. Il existe plusieurs opérations de ce style dans la littérature, qui ont permis la découverte ou le raffinement de propriétés ou de relations de la théorie des nœuds.

### 1.3.1 Recollement de nœuds

Nous avons vu au début de la section 1.1 que les entrelacs reposent, par leur définition, sur des notions de topologies. En particulier, ce sont des variétés topologiques de dimension 1. Il existe en topologie une opération permettant de combiner deux variétés de même dimension, que l'on appelle *somme connexe*. Nous pouvons de ce fait considérer la somme connexe d'entrelacs, que l'on appelle également *recollement* ou *composition*. Seulement il faut faire attention à ne pas recoller n'importe comment, le but de cette opération est de fusionner les deux entrelacs, pas de les nouer ensemble.

#### **Définition I.46 – Recollement d'entrelacs.**

Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux entrelacs non liés et orientés, en particulier il existe un hyperplan  $H$  séparant  $L_1$  et  $L_2$ . On note  $P_1$  et  $P_2$  des points appartenant respectivement à  $L_1$  et  $L_2$  minimisant la distance avec  $H$ , ainsi que  $V_1$  et  $V_2$  des petits voisinages respectifs de  $P_1$  et  $P_2$ . Le *recollement* de  $L_1$  et  $L_2$  est la somme connexe de  $L_1$  et  $L_2$  le long du bord des voisinages  $V_1$  et  $V_2$  de façon à ce que les orientations de  $L_1$  et  $L_2$  coïncident.

On note cette opération  $L_1 \# L_2$ . Pour  $K$  un nœud, on notera le recollement de  $n$  copies de  $K$  comme  $\#(K, n)$ .

*Remarques I.47.*

1. Quel que soit l'entrelacs  $L$ , la somme connexe  $L \# \bigcirc$  est toujours isotope à  $L$ .
2. On peut effectuer la même opération avec les diagrammes directement. Par ailleurs, la somme connexe de nœuds est souvent définie de cette façon, la méthode étant plus simple à décrire visuellement.

Les précautions prises dans la définition I.46 ne sont pas anodines, en effet sans séparer les entrelacs membres de la somme connexe, nous pourrions les lier comme les maillons d'une chaîne. Nous voyons en figure 1.13 le recollement correct de deux nœuds ainsi que ce qu'il faut éviter.

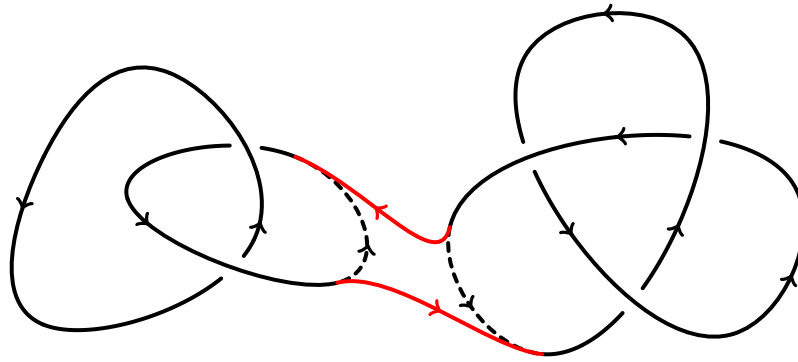
De plus nous pourrions nous demander pourquoi nous devons orienter les opérands avant recollement, mais aussi comment influe l'endroit choisi sur chaque entrelacs pour le recollement. La réponse est ici pointilleuse, et nous allons la détailler en deux temps.

Pour commencer, il faut remarquer que l'endroit où l'on recolle n'est pas important en soi. En effet, si l'on recolle deux entrelacs  $L_1$  et  $L_2$ , qui ne sont pas liés rappelons-le, nous pouvons ensuite par isotopie rétrécir  $L_2$ , pour ensuite le promener le long de  $L_1$ . Et inversement, nous pouvons de la même façon déplacer  $L_1$  le long de  $L_2$ , ce qui montre que le voisinage choisi sur les deux entrelacs pour le recollement n'a pas d'importance. Dans la définition, le choix « imposé » empêche seulement de créer des maillons ou des croisements indésirables.

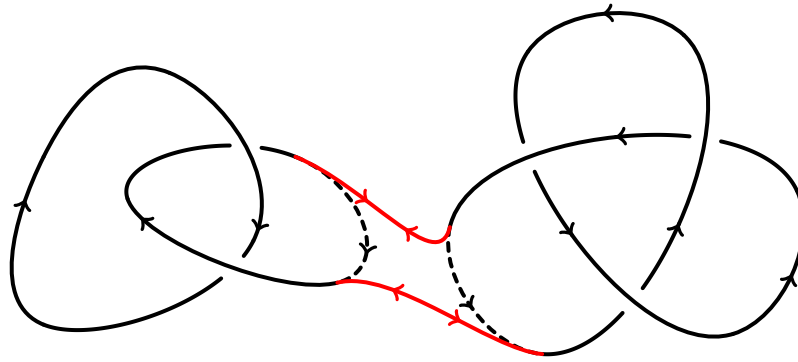
Maintenant imaginons l'expérience suivante : prenons deux entrelacs non liés  $L_1$  et  $L_2$ , et donnons-leur une orientation. Lors du recollement de  $L_1$  et  $L_2$  deux cas peuvent se produire :

- les orientations de  $L_1$  et  $L_2$  sont compatibles, autrement dit l'entrelacs obtenu admet une orientation qui, restreinte à  $L_1$  et  $L_2$ , correspond à l'orientation de  $L_1$  et  $L_2$  d'origine,
- les orientations de  $L_1$  et  $L_2$  sont opposées, nous ne pouvons alors trouver une orientation pour l'entrelacs issu du recollement qui, lorsque restreinte à  $L_1$  et  $L_2$ , respecte l'orientation d'origine de  $L_1$  et  $L_2$ .

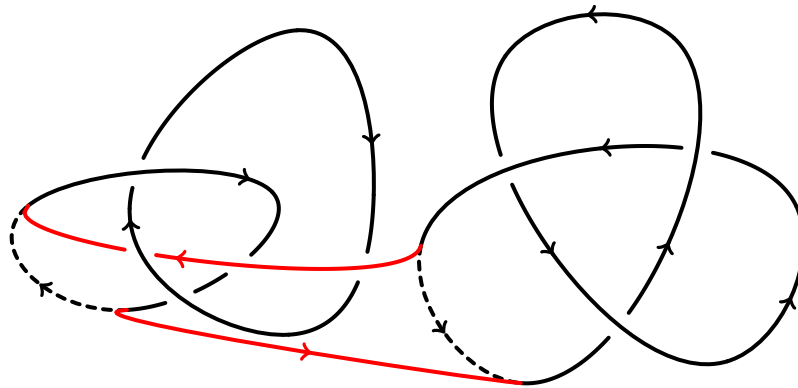
Nous remarquons ici que le recollement de deux entrelacs peut donc donner deux résultats, mais sont-ils différents ? Il reste ici un dernier facteur à prendre en compte : les entrelacs réversibles. Nous avons vu en définition I.23 que certains entrelacs pouvaient se déformer pour changer leur orientation. Ainsi, si ni  $L_1$  ni  $L_2$  n'est réversible, alors nous pouvons obtenir quatre entrelacs différents lors de leur recollement. Dans le cas où l'un des deux au moins est réversible, alors nous pourrions toujours le déformer pour que son orientation coïncide avec celle du deuxième opérande, ne laissant qu'un seul résultat possible au recollement. Pour éviter ce problème et pour que la définition soit consistante, nous devons définir avant le recollement une orientation à  $L_1$  et  $L_2$ , et faire en sorte lors du recollement, notamment au moment



(a) Recollement correct, les orientations se complètent



(b) Les orientations ne coïncident pas, cet exemple n'est pas un recollement (au sens de la théorie des nœuds)



(c) Si l'on recolle des parties éloignées, on risque de créer des croisements indésirables, altérant le résultat

FIGURE 1.13 – Recollement du nœud de trèfle et de l'entrelacs de HOPF. La figure 1.13a est un recollement correct, les deux autres ne respectent pas la définition I.46.

d'identifier les extrémités, que celles-ci se complètent.

Le recollement ou composition d'entrelacs présente un élément neutre qui est le nœud trivial, ce qui fait de l'ensemble des entrelacs muni du recollement et du nœud trivial un monoïde, comme l'ensemble des entiers naturels muni de la multiplication et de l'entier 1 comme élément neutre. Toujours dans les entiers, certains d'entre eux ne peuvent s'écrire comme la multiplication de deux autres entiers différents de 1, nous les connaissons bien et les appelons « nombres premiers ». Avec ce parallèle, nous remarquons que nous pouvons définir le même genre de propriété pour les entrelacs, certains pouvant s'écrire comme le recollement de deux autres différents du nœud trivial. Nous les appellerons également des *entrelacs premiers*.

#### **Définition I.48 – Entrelacs premier.**

On dit qu'un entrelacs  $L$  est *premier* s'il ne peut pas s'écrire comme le recollement de deux entrelacs  $L_1$  et  $L_2$  tous deux différents du nœud trivial. Dans le cas contraire,  $L$  est dit *composé*. De plus, les entrelacs triviaux ne sont pas considérés comme premiers.

Cette notion de primalité est importante notamment lorsque l'on souhaite tabuler les entrelacs, c'est-à-dire les énumérer pour ensuite les classer, suivant par exemple leur nombre de croisements minimal. En effet, si nous connaissons tous les entrelacs premiers, nous pouvons alors construire tous les entrelacs existant par recollement. Les travaux de SCHUBERT [Sch49] ont même montré que la décomposition d'un entrelacs en ses éléments premiers était unique à ordre et isotopie près.

### 1.3.2 Mutation

Sur un diagramme d'entrelacs, nous avons vu en définition I.36 une opération permettant de retourner certaines parties du diagramme. Cela permettait de naviguer à travers tous les diagrammes alternants possibles d'un entrelacs en particulier. Nous pourrions considérer une variante qui ne respecte pas l'isotopie de la façon suivante : nous choisissons une partie du diagramme que l'on notera  $T$ , de façon à ce qu'elle puisse être contenue dans un cercle du plan et que le nombre de points d'intersection du diagramme avec le cercle soit exactement 4. Nous découpons alors  $T$ , le séparant du reste du diagramme, nous le pivotons d'un demi-tour suivant l'un des trois axes possibles, en comptant celui normal au plan. Une fois cela fait, nous remettons en place  $T$  là où nous l'avions découpé, en recollant les extrémités à leur nouvelle position.

Ce que nous venons de faire s'appelle une *mutation*<sup>11</sup>, l'entrelacs obtenu est dit *mutant*.

#### **Définition I.49 – Entrelacs mutant.**

Pour un diagramme  $D$  d'un entrelacs  $L$ , une *mutation* de  $L$  est l'action de retourner une partie  $T$ , ayant 4 extrémités, de  $D$  indépendamment du reste du diagramme. L'entrelacs représenté par le nouveau diagramme est un entrelacs *mutant* de  $L$ .

*Remarques I.50.*

1. La définition I.49 peut être écrite plus simplement à l'aide de la notion d'*enchevêtrement* que nous verrons en sous-section 2.3.2.
2. Les mutations préservent le nombre de composantes.

Un exemple très connu de mutation est le nœud de KINOSHITA-TERASAKA visible en figure 1.14, qui est une mutation du nœud de CONWAY. Ce type d'opération permet de créer des dérivés d'un entrelacs, ce qui conserve la plupart de ses propriétés et donne une structure semblable. Comme nous le verrons avec les invariants en section 2.1, il peut être difficile de distinguer un entrelacs et ses mutants.

<sup>11</sup>. C'est comme si nous venions de modifier l'ADN de l'entrelacs.

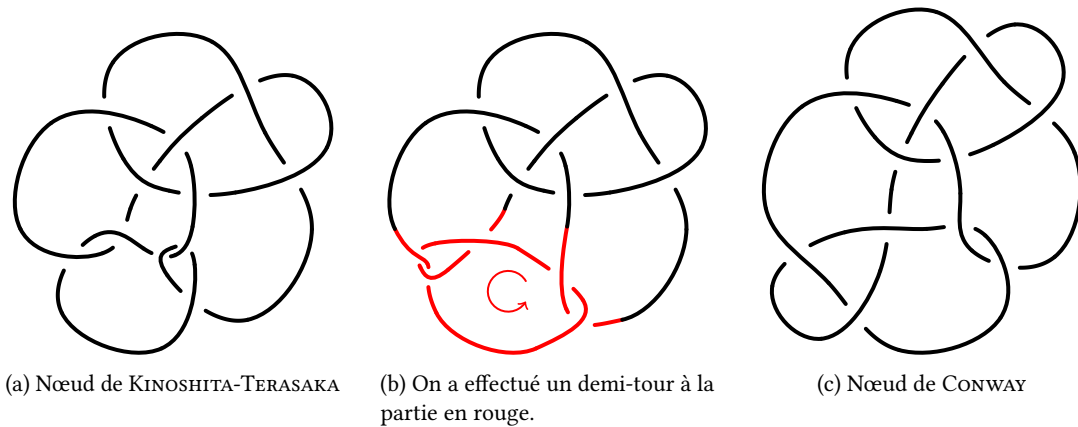


FIGURE 1.14 – L'exemple le plus connu de nœuds mutants.

### 1.3.3 Nœuds satellites

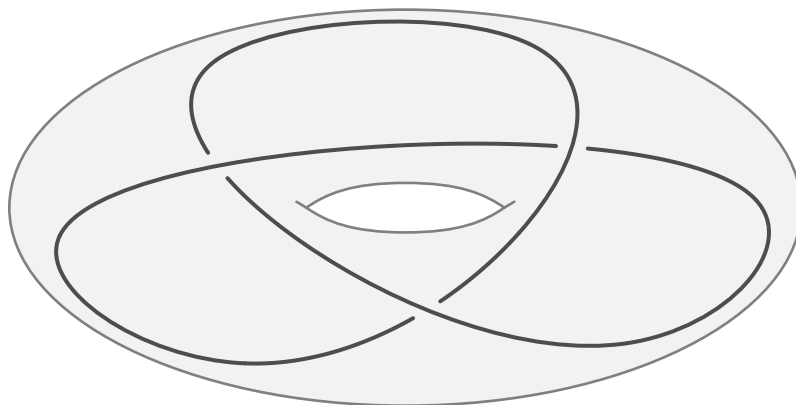
Il existe une généralisation de l'opération de recollement, découvert par SCHUBERT [Sch53, *Kapitel II p. 186*]. Il définit une nouvelle façon d'associer des entrelacs entre eux, qui parfois revient à juste les recoller. Le principe est le suivant : nous prenons un entrelacs  $L$  non trivial et un nœud  $K$ . Nous supposons que  $L$  peut être contenu dans un tore  $\mathbb{T}$  de sorte que  $L$  est présent tout autour de  $\mathbb{T}$ . La manœuvre consiste ensuite à nouer  $\mathbb{T}$  suivant le même plongement que  $K$ . Nous obtenons alors un nouvel entrelacs ayant une structure semblable à  $L$  et dessinant une orbite ressemblant au trajet de  $K$ . Nous venons de créer un entrelacs *satellite* dont  $K$  est le *compagnon*.

#### Définition I.51 – Entrelacs satellite.

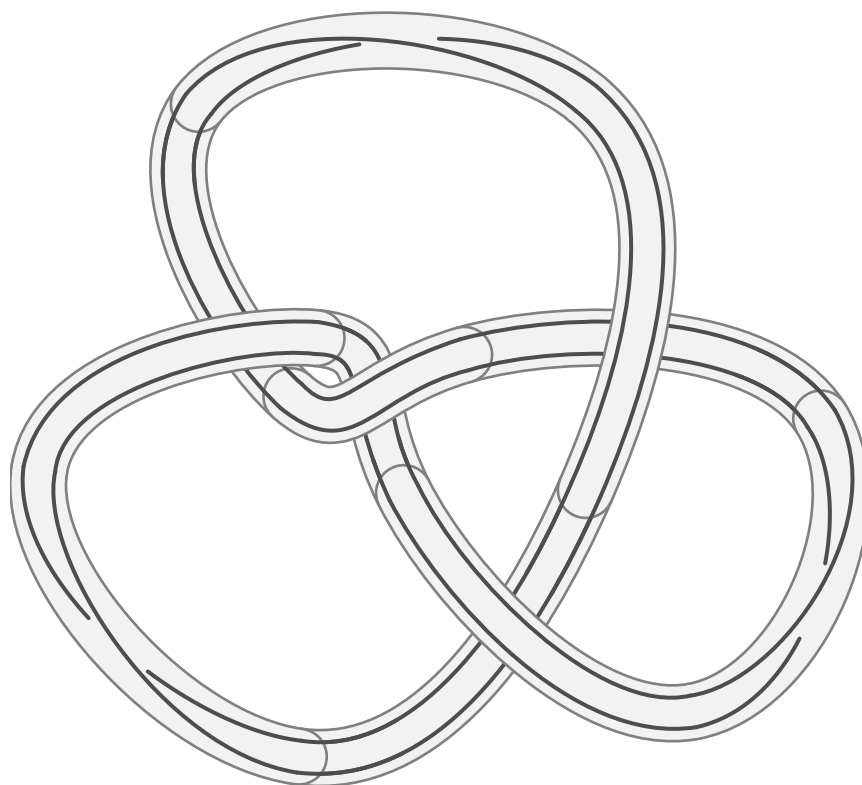
Soient  $L$  un entrelacs et  $K$  un nœud. On suppose que  $L$  est contenu dans un tore  $\mathbb{T}$  de façon que, pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{T}$  différent de  $\mathbb{T}$ ,  $U$  ne contient pas  $L$ . L'entrelacs *satellite*  $\mathcal{L}$  est obtenu en plongeant  $\mathbb{T}$  de la même manière que  $K$ , appelé nœud *compagnon* de  $\mathcal{L}$ .

*Remarque I.52.* Si la totalité de l'entrelacs  $L$  excepté un morceau d'arc peut être contenu dans un ouvert  $U$  convexe de  $\mathbb{T}$ , alors quel que soit  $K$  l'entrelacs satellite de  $L$  de compagnon  $K$  est isotope à  $L \# K$ .

En plus d'être une opération, nous avons vu au théorème I.43 que les entrelacs satellites sont un type bien distinct d'entrelacs.



(a) Une façon possible d'enfermer le nœud de trèfle dans un tore.

























(b) L'image du plongement du tore en figure 1.15a de la même façon que le nœud de huit.

FIGURE 1.15 – Un nœud satellite à partir du nœud de trèfle ayant le nœud de huit comme compagnon.

## 1.4 Bibliographie de ce chapitre

La bibliographie complète ainsi que le détail de chaque référence est accessible en page 191.

- [Ada04]  Colin Conrad ADAMS. *The knot book : an elementary introduction to the mathematical theory of knots*.
- [Ada+92]  Colin Conrad ADAMS, Jeffrey F. BROCK, John BUGBEE, Timothy D. COMAR, Keith A. FAIGIN, Amy M. HUSTON, Anne M. JOSEPH et David PESIKOFF. « Almost alternating links ». Dans : *Topology and its Applications* 46.2, p. 151-165.
- [AB27]  James Waddell ALEXANDER et Garland Baird BRIGGS. « On types of knotted curves ». Dans : *The Annals of Mathematics* 28.1, p. 562-586.
- [CL14]  Alexander COWARD et Marc LACKENBY. « An upper bound on Reidemeister moves ». Dans : *American Journal of Mathematics* 136.4, p. 1023-1066.
- [Eul58]  Leonhard EULER. « Elementa doctrinae solidorum ». Dans : *Novi commentarii academiae scientiarum petropolitanae* 4, p. 109-140.
- [Gre17]  Joshua Evan GREENE. « Alternating links and definite surfaces ». Dans : *Duke Mathematical Journal* 166.11, p. 2133-2151.
- [HTW98]  Jim HOSTE, Morwen Bernard THISTLETHWAITE et Jeff WEEKS. « The first 1,701,936 knots ». Dans : *The Mathematical Intelligencer* 20.4, p. 33-48.
- [Kau87]  Louis Hirsch KAUFFMAN. « State models and the Jones polynomial ». Dans : *Topology* 26.3, p. 395-407.
- [Lac15]  Marc LACKENBY. « A polynomial upper bound on Reidemeister moves ». Dans : *Annals of Mathematics* 182.2, p. 491-564.
- [MT93]  William MENASCO et Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « The classification of alternating links ». Dans : *The Annals of Mathematics* 138.1, p. 113-171.
- [Mur87]  Kunio MURASUGI. « Jones polynomials and classical conjectures in knot theory ». Dans : *Topology* 26.2, p. 187-194.
- [Per74]  Kenneth A. PERKO. « On the classification of knots ». Dans : *Proceedings of the American Mathematical Society* 45.2, p. 262-266.
- [Rei27]  Kurt REIDEMEISTER. « Elementare Begründung der Knotentheorie ». Dans : *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 5.1, p. 24-32.
- [Rol03]  Dale ROLFSEN. « Appendix C : Table of knots and links ». Dans : *Knots and links*, p. 388-429.
- [Sch49]  Horst SCHUBERT. « Kapitel III : Die Zerlegung eines Knotens in Primknoten ». Dans : *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten*, p. 29-50.
- [Sch53]  Horst SCHUBERT. « Knoten und Vollringe ». Dans : *Acta Mathematica* 90, p. 131-286.
- [Sto07]  Alexander STOIMENOW. « Non-triviality of the Jones polynomial and the crossing numbers of amphicheiral knots ». Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 45.2, p. 285-291.
- [Sto08]  Alexander STOIMENOW. « Tait's conjectures and odd crossing number amphicheiral knots ». Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 45.2, p. 285-291.
- [Tai98]  Peter Guthrie TAIT. « On knots Part I, II, III ». Dans : *Scientific papers*. T. I, p. 275-347.
- [Thi87]  Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « A spanning tree expansion of the Jones polynomial ». Dans : *Topology* 26.3, p. 297-309.
- [Thi88]  Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « Kauffman's polynomial and alternating links ». Dans : *Topology* 27.3, p. 311-318.

- 
- [Thu82]  William Paul THURSTON. « Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry ». Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 6.3, p. 357-381.



---

## Distinguer les nœuds entre eux

---

### Sommaire du présent chapitre

<b>2.1 Invariants de nœud</b>	<b>42</b>
2.1.1 Condition d'invariabilité . . . . .	42
2.1.2 Un exemple détaillé : la tricolorabilité . . . . .	44
2.1.3 Autres exemples d'invariants . . . . .	45
<b>2.2 Polynômes de nœud</b>	<b>46</b>
2.2.1 Introduction avec le polynôme d'ALEXANDER . . . . .	47
2.2.2 Le polynôme de JONES . . . . .	51
2.2.3 La généralisation par le polynôme HOMFLY . . . . .	56
<b>2.3 Notation des nœuds</b>	<b>57</b>
2.3.1 La notation DOWKER-THISTLETHWAITE . . . . .	57
2.3.2 La notation de CONWAY, les enchevêtrements . . . . .	59
2.3.3 La notation sous forme de mots de tresse . . . . .	62
<b>2.4 Bibliographie de ce chapitre</b>	<b>62</b>

Nous avons vu au chapitre 1 la définition et certaines propriétés des nœuds et entrelacs. Si nous regardons plus attentivement la figure 1.3, nous remarquons qu'entre la figure 1.3e et la figure 1.3f, la différence est extrêmement minime. De plus, aucune notion du chapitre 1 ne permet réellement de *distinguer* les deux. Ce n'est qu'en essayant suffisamment de déformation que nous pouvons nous persuader que les deux nœuds sont différents, mais cela ne constitue pas une preuve mathématique<sup>1</sup>.

Ce genre de problème en mathématique est courant, distinguer deux ensembles, classes d'équivalence, matrices, et dans notre cas, entrelacs. Très souvent on introduit des *invariants*, des « outils » qui permettent à chaque objet d'associer un résultat, avec la condition que deux objets équivalents doivent être associés au même résultat. Ainsi deux objets vus comme différents par un invariant sont forcément différents.

---

1. Sauf si nous testons *toutes* les possibilités de mouvements comme au théorème I.19, mais rappelons que leur nombre est gigantesque.

Mais l'inverse n'est pas vrai : deux objets ayant le même résultat par un invariant ne sont pas forcément équivalents.

Prenons par exemple le cas des entiers naturels, et considérons les deux « invariants » suivants :

$I_1$  : Donne la liste des diviseurs premiers,

$I_2$  : Donne la plus petite puissance entière de 10 majorant cet entier.

Si nous comparons 7 avec 13, les deux invariants diront que ces deux entiers sont différents. Si nous comparons maintenant 42 et 69, seul  $I_1$  permet de les différencier. Et si nous prenons maintenant 2 et 4, ni  $I_1$  ni  $I_2$  ne permet de les différencier, pourtant ils sont bien différents.

Nous allons dans ce chapitre découvrir certains invariants de nœuds, en commençant par les plus simples à comprendre, nous verrons ensuite les invariants polynomiaux puis finalement diverses façons de noter les entrelacs pour les classer, ou les tabuler.

## 2.1 Invariants de nœud

Parmi tous les invariants connus, la plupart du temps, les plus simples à comprendre sont ceux qui se lisent sur les diagrammes des entrelacs. Leur accessibilité vient de la possibilité de les voir directement sur un diagramme, au contraire d'autres plus abstraits. Nous allons les détailler dans cette section.

### 2.1.1 Condition d'invariabilité

Avant de présenter des exemples d'invariants de nœud, il serait bon de définir proprement ce que c'est, et quelles conditions ils doivent respecter. Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , les invariants doivent seulement respecter l'isotopie, c'est-à-dire être préservés par déformation. Dans le cas des diagrammes, nous savons qu'ils sont équivalents si nous pouvons déformer l'un en l'autre grâce à l'isotopie du plan et aux mouvements de REIDEMEISTER, les invariants ne doivent donc pas être altérés par ces modifications. Nous en venons à ces deux définitions :

#### **Définition I.53 – Invariant de nœud.**

Un *invariant de nœud* est une propriété  $I$  qui reste inchangée pour des entrelacs équivalents. Autrement dit, pour  $L_1$  et  $L_2$  deux entrelacs équivalents, on a  $I(L_1) = I(L_2)$ .

Dans le cas particulier où un invariant de nœud est défini sur les diagrammes, nous avons une définition équivalente.

#### **Définition I.54 – Invariant de diagramme.**

Un *invariant de diagramme* est une propriété  $I$  qui reste inchangée pour des diagrammes équivalents. Autrement dit, pour  $D_1$  et  $D_2$  deux diagrammes équivalents, on a  $I(D_1) = I(D_2)$ .

*Remarque I.55.* Un invariant peut aussi être une fonction, un algorithme, un nombre, ... Le mot *propriété* des deux définitions précédentes est ici assez large.

Nous verrons un exemple détaillé d'invariant dans la sous-section suivante. La différence entre les deux définitions ne réside que dans l'espace de travail, elles sont mises à part cela équivalentes. Nous utiliserons plus souvent dans ce mémoire la deuxième, où nous rappelons que deux diagrammes sont équivalents si nous pouvons déformer l'un en l'autre en utilisant l'isotopie du plan ainsi que les mouvements de REIDEMEISTER.

Voici un premier exemple d'invariant : la propriété d'alternance pour les entrelacs. L'alternance d'un diagramme, elle, n'est pas un invariant.

✓ *Exemple I.56.* Prenons les deux propriétés suivantes :

$I_1$  : Alternance d'un diagramme.

$I_2$  : Alternance d'un entrelacs.

La première propriété  $I_1$  n'est pas un invariant de diagramme. En effet, en utilisant le 2<sup>e</sup> mouvement de REIDEMEISTER, nous pouvons créer deux croisements successifs où le tracé passe au-dessus, ce qui retire l'aspect alternant. L'alternance d'un diagramme n'est donc pas préservée pour tous ses diagrammes équivalents.

La deuxième propriété concerne l'existence d'au moins un diagramme alternant pour un entrelacs donné. Au niveau des diagrammes, aucune transformation ne peut retirer cette existence ; en effet, si l'on déforme un diagramme alternant en un autre, alternant ou non, nous pouvons toujours revenir en arrière. Comme l'existence d'un diagramme alternant n'est pas altérée par l'isotopie du plan ni les mouvements de REIDEMEISTER, il s'agit d'un invariant de diagramme, et a fortiori, de nœud.

La différence majeure entre  $I_1$  et  $I_2$  réside sur la portée de leur définition. La propriété  $I_1$  n'est définie que sur un unique diagramme, ce qui force cette propriété à être présente pour tout diagramme équivalent, ce qui est trop contraignant. L'autre est défini sur toute la classe d'équivalence et ne demande que l'existence d'un diagramme alternant, c'est une condition beaucoup plus faible et réalisable.

Nous avons déjà vu beaucoup d'invariants dans le chapitre 1 sans que cela ne soit mentionné. Nous en listerons quelques-uns en sous-section 2.1.3. Les invariants de nœud, comme tout objet, ont également des caractéristiques. En introduction de ce chapitre, nous insistions sur le fait que les invariants ne peuvent être utilisés que pour différencier des objets. Cependant, il peut arriver qu'un invariant soit « parfait », qu'il distingue absolument tout. Dans le cadre de la théorie des nœuds, nous dirons qu'un tel invariant est *complet*.

#### **Définition I.57 – Invariant de nœud complet.**

On dit qu'un invariant de nœud est *complet* s'il distingue tous les entrelacs. Autrement dit, pour  $L_1$  et  $L_2$  différents, on a toujours  $I(L_1) \neq I(L_2)$ .

Les invariants complets sont assez souvent aussi complexes à déterminer que de directement différencier deux entrelacs grâce à l'isotopie seule. Un exemple fourni par GORDON et LUECKE [GL89, Theorem 1 p. 371] consiste à regarder simplement l'espace  $\mathbb{R}^3$  privé de l'entrelacs, c'est-à-dire le complément. Deux entrelacs équivalents ont ainsi des compléments homéomorphes, ce qui en fait un invariant, et leur article montre la réciproque, ce qui le rend complet. Bien que cet invariant soit complet, en pratique il faut encore une fois vérifier qu'un espace est une déformation d'un autre, la complexité n'a donc pas vraiment changé.

Les invariants complets permettent de répondre clairement en toutes circonstances, mais souvent nous ne voulons pas distinguer tous les entrelacs, seulement un groupe ou même un seul. Nous pouvons, par exemple, revenir au problème énoncé auparavant, qui est de savoir quand nous pouvons dénouer un nœud ou un entrelacs. Dans ce cas précis, nous voulons juste distinguer l'entrelacs trivial, ou le nœud trivial.

#### **Définition I.58 – Détection de la trivialité.**

On dit qu'un invariant de nœud  $I$  détecte le nœud trivial si pour tout nœud  $K \neq \bigcirc$  on a  $I(K) \neq I(\bigcirc)$ . De même pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on dit que  $I$  détecte l'entrelacs trivial à  $n$  composantes si pour tout entrelacs  $L \neq \bigcirc_n$  on a  $I(L) \neq I(\bigcirc_n)$ .

*Remarque I.59.* On peut reprendre de façon analogue la définition I.58 pour la détection de n'importe quel entrelacs ou groupe d'entrelacs particulier.

La plupart du temps, les invariants sont introduits pour répondre à un problème précis de distinction. Cela peut être la distinction de tous les entrelacs dans le cas le plus large, mais le but peut également être de distinguer des mutants, de déterminer si un entrelacs est chiral, ou de savoir si l'on peut le dénouer...

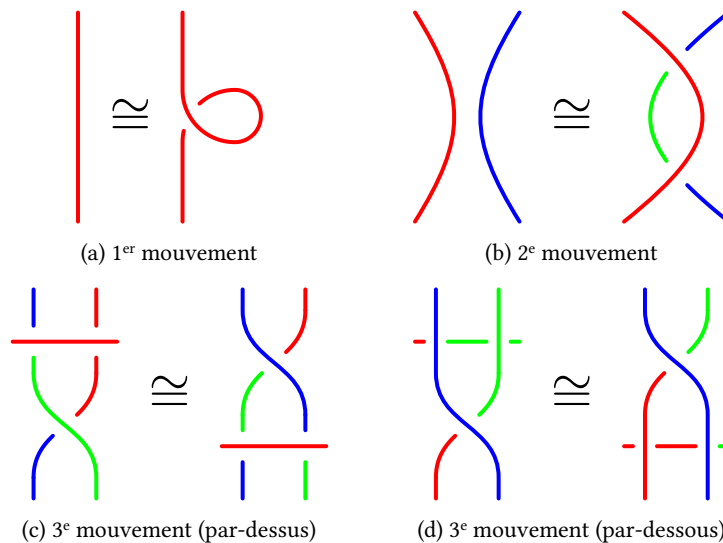


FIGURE 2.1 – Les mouvements de REIDEMEISTER préservent la tricolorabilité. Les solutions présentées utilisent un maximum de couleurs, d'autres solutions sont possibles en retirant cette condition, notamment pour le 3<sup>e</sup> mouvement.

### 2.1.2 Un exemple détaillé : la tricolorabilité

L'un des invariants de diagrammes les plus simples à appréhender est la propriété de *tricolorabilité*. Le principe consiste à colorier le diagramme d'un entrelacs avec le moins de couleurs différentes possibles, et de regarder si le diagramme peut être colorié avec au plus trois couleurs. Bien évident, nous devons utiliser au moins deux couleurs, sinon nous pouvons colorier n'importe quel diagramme avec une unique couleur. Il faut aussi une condition concernant le passage d'une couleur à une autre, comme les croisements qui délimitent les différents arcs du diagramme. Ainsi, à chaque croisement, le tracé passant en dessous doit changer de couleur, obligeant les trois couleurs demandées à être présentes. Dans le cas particulier du premier mouvement de REIDEMEISTER, c'est-à-dire lorsque le tracé du dessus est relié directement à celui passant en dessous, il faut aussi autoriser le fait qu'un croisement peut être d'une unique couleur.

#### **Définition I.60 – Entrelacs tricoloriable.**

On dit qu'un entrelacs est tricoloriable si chaque arc du diagramme de nœud peut être colorié en utilisant au plus trois couleurs différentes, de plus :

- Au moins deux couleurs doivent être utilisées,
- À chaque croisement, les deux arcs et le pont incidents doivent être soit tous de couleurs différentes, soit tous de la même couleur.

Il nous faut maintenant montrer que la tricolorabilité est bien un invariant, et de par sa définition, nous allons le démontrer en utilisant des diagrammes. Pour commencer, l'isotopie du plan n'influera pas la tricolorabilité, en effet allonger un arc ne changera pas sa couleur, de même qu'une rotation ou tout autre déformation de ce genre. La couleur étant attribué à un arc ou à un pont, la déformation par isotopie seule, qui préserve les arcs et ponts, va préserver les couleurs qui leur sont associées. Il reste à vérifier que les mouvements de REIDEMEISTER n'altèrent pas la propriété. Pour montrer cela, il faut montrer que les changements locaux apportés par ces mouvements ne provoquent pas de changements globaux. C'est effectivement le cas, comme nous le voyons en figure 2.1. Ainsi, la tricolorabilité est un invariant de diagramme, et donc de nœud.

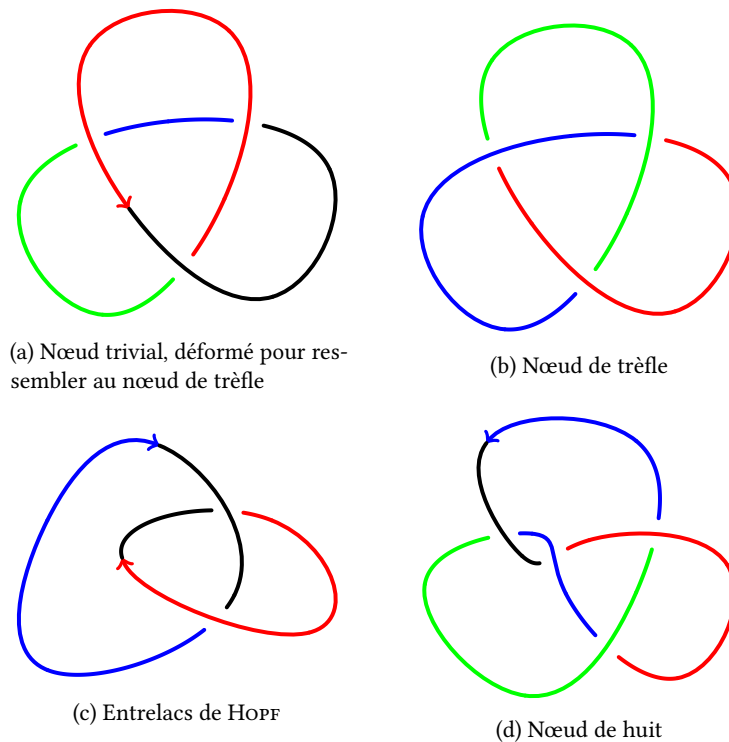


FIGURE 2.2 – Le nœud de trèfle est tricoloriable, mais le nœud trivial, l’entrelacs de HOPF et le nœud de huit ne le sont pas.

Grâce à cet invariant, nous pouvons commencer à distinguer certains nœuds que nous avons déjà abordés auparavant. Ainsi nous pouvons maintenant prouver que le nœud de trèfle n’est pas trivial et qu’il est différent du nœud de huit en figure 2.2. Cependant nous ne pouvons toujours pas différencier le nœud trivial du nœud de huit, les deux n’étant pas tricoloriables.

Nous pouvons par contre montrer assez facilement que cet invariant ne détecte pas le nœud trivial, même si nous ne pouvons pas encore vraiment distinguer les nœuds entre eux. En effet l’entrelacs de HOPF n’est pas tricoloriable, comme le nœud trivial, mais nous savons pertinemment qu’ils sont différents de par leur nombre de composantes. En prenant du recul, cet invariant simple permet de classer les entrelacs suivant deux catégories exactement. Cela permet déjà de différencier les entrelacs, mais ce n’est clairement pas suffisant pour répondre à un problème précis comme celui du dénouement.

On peut généraliser la définition I.60 à  $k$  couleurs, et se demander pour quelle valeur minimale de  $k$  un entrelacs en particulier est  $k$ -coloriable. Ceci donne un autre invariant plus précis, permettant de différencier le nœud de huit du nœud trivial en utilisant quatre couleurs par exemple.

### 2.1.3 Autres exemples d’invariants

Parmi les définitions vues au chapitre 1, la plupart peuvent être vues comme des invariants. Le nombre minimal de croisements est un invariant, l’alternance des entrelacs en est un autre, comme la chiralité, la primalité et la réversibilité. Cependant toutes ces propriétés ne sont pas forcément de bons invariants, soit par leur faible nombre de réponses différentes, comme toutes les propriétés se ramenant à un simple « oui/non », soit par leur complexité pour les déterminer, comme le nombre minimal de

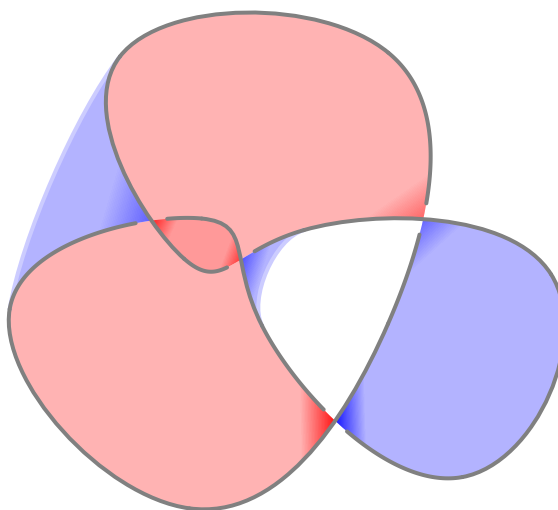


FIGURE 2.3 – Une surface de SEIFERT bordée par le nœud de huit. Le « dessus » de la surface est coloriée en rouge, le « dessous » en bleu.

croisements. Cela ne signifie pas non plus qu'ils sont « mauvais », ils peuvent être utiles suivant les données dont on dispose pour un problème fixé.

En plus de ceux-ci, nous avons entre autres pour le cas des nœuds le *nombre de dénouement*. Il s'agit du nombre minimal pour tout diagramme équivalent de croisements à inverser pour représenter le nœud trivial. Il est intéressant au sens où ce nombre représente le nombre de fois qu'un nœud doit se traverser pour être dénoué. Dans le même style, nous avons aussi le *nombre minimal de ponts* nécessaire pour représenter un entrelacs, étudié par SCHUBERT [Sch54, 2p. 247].

Nous citons également les travaux indépendants de FÁRY [Fár49, *Théorème 3 p. 136*] et MILNOR [Mil50, 4.6 *Corollary p. 256*] qui ont montré que la courbure totale d'un nœud non trivial est forcément supérieure ou égale à  $4\pi$ . En revanche la réciproque est fautive, en effet il existe des représentations du nœud trivial tel que leurs courbures totales soient supérieures ou égales à  $4\pi$ .

De façon un peu plus extrapolée, on trouve également les invariants polynomiaux, que nous détaillerons dans la section suivante. Il existe également des invariants utilisant des surfaces bordées par l'entrelacs, appelées surfaces de SEIFERT [Sei35, 1p. 572], comme le genre. Nous pouvons en voir un exemple en figure 2.3. Finalement, pour mentionner un invariant détectant le nœud trivial, on évoque l'homologie de KHOVANOV [Kho00, *Theorem 1 p. 381*]. La preuve que ce dernier détecte le nœud trivial a été apportée par KRONHEIMER et MROWKA [KM11, *Theorem 1.1 p. 97*].

Une dernière remarque à faire à propos de tous ses invariants consiste à visualiser les liens qu'ils apportent avec d'autres domaines de recherche. À travers eux, on aperçoit des correspondances profondes avec la topologie, l'algèbre, la géométrie. Ils servent certes à répondre à certaines questions de la théorie des nœuds, mais leur découverte a, la plupart du temps, ouvert d'autres problèmes plus ou moins reliés avec divers champs mathématiques.

## 2.2 Polynômes de nœud

Certains invariants de nœud particuliers se présentent sous la forme de polynôme, et l'un d'eux est au cœur même de cette thèse. Grâce à leur grand nombre de résultats possibles, ils distinguent mieux les entrelacs que la tricolorabilité ou le nombre de croisements minimal, et sont relativement simples à

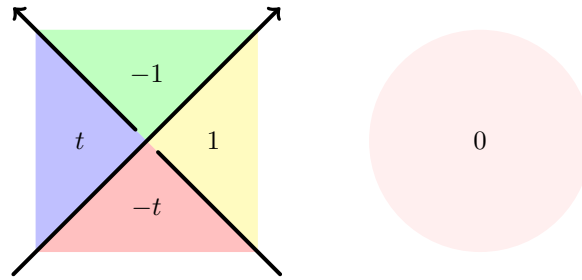


FIGURE 2.4 – Disposition des régions et de leurs coefficients pour la matrice  $M_K$  par rapport à un croisement.

calculer grâce à divers algorithmes.

Le premier d'entre eux a été décrit par ALEXANDER [Ale28], et peut distinguer tous les nœuds jusqu'à 8 croisements. Il est assez simple à déterminer à la main : il s'agit, sommairement, de retranscrire dans une matrice les relations entre les croisements et les régions d'un diagramme, puis d'en faire le déterminant. Il porte bien sûr des inconvénients, nous détaillerons tous ses aspects dans la sous-section qui suit.

Le deuxième, qui a largement contribué au développement de la théorie des nœuds ainsi qu'à la création de liens avec d'autres domaines de recherches, est le polynôme de JONES [Jon85]. Alors que sa définition est plutôt abstraite, une méthode permettant de le calculer à partir des diagrammes a été introduite par KAUFFMAN [Kau87], en plus de la relation d'écheveau fournie par JONES dans son article. Nous le présenterons plus précisément en sous-section 2.2.2.

Depuis, d'autres polynômes de nœud ont par la suite été découverts, comme le polynôme HOMFLY [Fre+85] ou celui de KAUFFMAN [Kau90].

### 2.2.1 Introduction avec le polynôme d'ALEXANDER

Découvert en 1928, le polynôme d'ALEXANDER est le tout premier polynôme de nœud. Encore aujourd'hui, on trouve des liens entre cet invariant et divers autres domaines, parfois même avec d'autres invariants de nœud.

Sa construction telle que décrite par ALEXANDER [Ale28, 2-4p. 275-281] est la suivante : à partir d'un diagramme  $D$ , nous construisons une matrice  $M$  ayant autant de lignes que de croisements de  $D$ , et autant de colonnes que de régions de  $D$ . Chaque ligne est ainsi identifiée à un croisement, et de même chaque colonne correspond à une région. Chaque entrée de la matrice représente alors l'interaction entre le croisement et la région associés ; en particulier l'entrée est nulle si les deux ne sont pas adjacents. Le détail des valeurs possibles sera donné en définition I.61 et sera représenté en figure 2.4. Une fois la matrice complète, le but est d'en calculer le déterminant, ce qui, dans l'état, n'est pas possible puisque  $M$  n'est pas une matrice carrée. Cela est dû à la présence de deux régions de plus par rapport au nombre de croisements. Heureusement, il a été montré par ALEXANDER [Ale28, property p. 280] que la suppression de deux colonnes associées à des régions adjacentes, peu importe le choix, ne change le déterminant que d'un facteur connu.

On définit le polynôme d'ALEXANDER en suivant cet algorithme de construction. Cet algorithme ne démontre pas que le polynôme d'ALEXANDER est bien un invariant de nœud, et cette justification, donnée par ALEXANDER [Ale28, 6p. 284], ne sera pas abordée ici.

#### Définition I.61 – Polynôme d'ALEXANDER.

┌ Pour  $K$  un entrelacs orienté avec  $n$  croisements, on compte  $n + 2$  régions sur le diagramme associé. On note  $M_K$  une matrice  $n \times (n + 2)$ . Les coefficients de  $M_K$  sont déterminés par la position relative

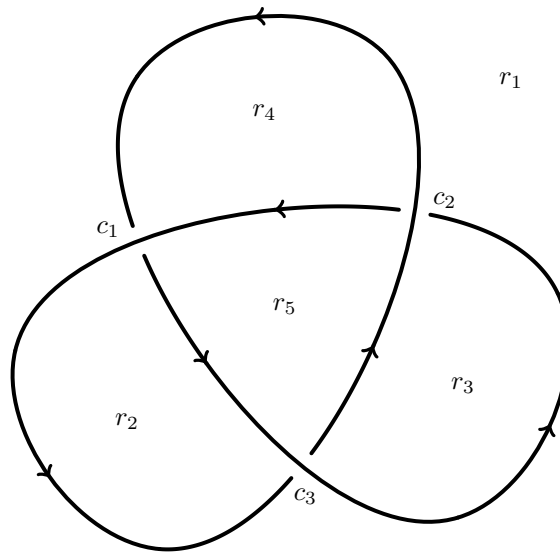


FIGURE 2.5 – Notation des régions et des croisements pour le calcul du polynôme d’ALEXANDER du nœud de trèfle.

de chaque région  $r$  par rapport à chaque croisement  $c$  (visible en figure 2.4) :

$$M_K(c, r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r \text{ n'est pas adjacent à } c, \\ -t, & \text{si } r \text{ est à gauche avant } c, \\ 1, & \text{si } r \text{ est à droite avant } c, \\ t, & \text{si } r \text{ est à gauche après } c, \\ -1, & \text{si } r \text{ est à droite après } c. \end{cases}$$

La droite et la gauche sont déterminées avec l’orientation du tracé passant en dessous au niveau de  $c$ . Après avoir retiré deux colonnes de  $M_K$  correspondant à des régions adjacentes, on peut finalement calculer son déterminant qui sera le *polynôme d’ALEXANDER*, noté  $\Delta_L$ , vivant<sup>2</sup> dans  $\mathbb{Z}[t]$ .

*Remarques I.62.*

1. Comme expliqué auparavant, nous devons retirer deux colonnes « au choix » dans la matrice, le déterminant obtenu peut alors varier d’un facteur  $\pm t^k$  avec  $k$  un entier quelconque. On peut ainsi diviser le résultat obtenu par la plus grande puissance de  $\pm t$  possible afin que le polynôme ait un terme constant égal à 1. Cela donne une forme canonique à cet invariant.
2. Il est possible de le multiplier par un facteur  $\pm t^k$  pour rendre le polynôme d’ALEXANDER symétrique avec le terme constant égal à 1, au sens où le changement de variable  $t \leftrightarrow t^{-1}$  laisse le polynôme invariant. Il faut pour cela étendre son espace de vie à  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ . C’est une autre forme canonique que l’on retrouve couramment dans la littérature.

Pour exemple, voici le calcul du polynôme d’ALEXANDER du nœud de trèfle.

✓ *Exemple I.63.* En annotant le nœud de trèfle, symbolisé  $3_1$ , suivant la figure 2.5, où les  $r_i$  représentent

2. On peut étendre cet espace à  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ , voir la remarque.

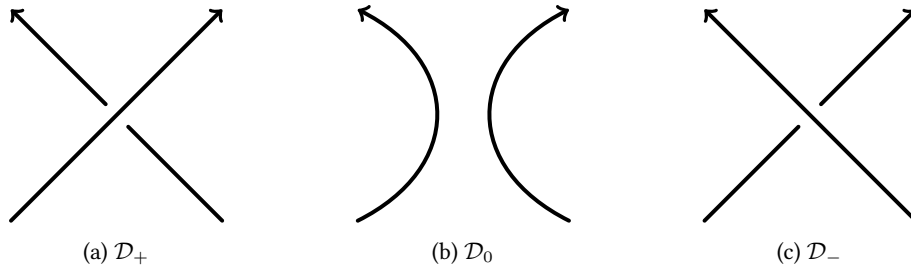


FIGURE 2.6 – Les différences locales entre chaque diagramme orienté pour les relations d'écheveau.

chacun une région et les  $c_i$  chacun un croisement, on obtient la matrice  $M_{3_1}$  suivante :

$M_{3_1}$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$
$c_1$	1	-1	0	-t	t
$c_2$	1	0	-t	-1	t
$c_3$	1	-t	-1	0	t

En retirant deux colonnes choisies dans la matrice  $M_{3_1}$  selon la définition, on peut calculer le déterminant. Les régions  $r_1$  et  $r_2$  étant adjacentes, on peut retirer leur colonne associée et obtenir :

$$|M_{3_1}|_{1,2} = -t^3 + t^2 - t$$

De même pour les régions  $r_3$  et  $r_5$  :

$$|M_{3_1}|_{3,5} = t^2 - t + 1$$

En revanche les régions  $r_1$  et  $r_5$  ne sont pas adjacentes, on ne peut pas choisir ces deux colonnes. On déduit des calculs précédents que :

$$\Delta_{3_1}(t) = t^2 - t + 1$$

En 1970, 42 ans après l'introduction du polynôme d'ALEXANDER, les travaux de CONWAY [Con70, 6p. 337] permettent d'exhiber une autre forme de ce polynôme, ainsi qu'une nouvelle façon de le construire. Le principe est de mettre en relation trois diagrammes orientés, notés  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{D}_+$  et  $\mathcal{D}_-$ , quasiment identiques, ayant comme seule différence une modification locale au niveau d'un croisement. Ces différences sont présentées en figure 2.6. Une fois cette relation déterminée, elle est utilisée récursivement pour diminuer le nombre de croisements des diagrammes impliqués dans le calcul, avec comme condition initiale qu'un diagramme représentant le nœud trivial vaut 1. On appelle ces relations des *relations d'écheveau*.

#### **Définition I.64 – Relation d'écheveau.**

Une *relation d'écheveau* est une relation liant trois diagrammes orientés, notés  $\mathcal{D}_+$ ,  $\mathcal{D}_-$  et  $\mathcal{D}_0$ . Ces différents diagrammes ne diffèrent qu'au niveau d'un croisement  $c$  :

$\mathcal{D}_+$  :  $c$  est positif,

$\mathcal{D}_-$  :  $c$  est négatif,

$\mathcal{D}_0$  :  $c$  n'est pas croisé.

On les écrit sous la forme  $F(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-, \mathcal{D}_0) = 0$  avec  $F$  une fonction donnée. La relation initiale standard est

$$F(\bigcirc) = 1.$$

Utilisées de manière récursive, elles permettent de construire un polynôme de LAURENT à partir d'un diagramme.

**▲ Attention I.65.** Jusqu'à l'introduction du polynôme HOMFLY, il n'était pas certain que ces relations permettent de définir un invariant indépendant des choix fait lors de la récursion. Ce polynôme, généra-

lisant tout polynôme calculé avec une relation d'écheveau, prouve que ces relations sont suffisantes pour définir un invariant polynomial. Nous verrons ceci en sous-section 2.2.3.

Nous pouvons maintenant décrire la relation d'écheveau donné par CONWAY. Cette relation ne donne pas exactement le polynôme d'ALEXANDER, mais nous verrons juste après que le résultat en est très proche.

**Définition I.66 – Polynôme de CONWAY.**

Le polynôme de CONWAY est défini dans  $\mathbb{Z}[z, z^{-1}]$  par la relation d'écheveau suivante :

$$\begin{cases} \nabla(\bigcirc) = 1, \\ \nabla(\mathcal{D}_+) - \nabla(\mathcal{D}_-) + z\nabla(\mathcal{D}_0) = 0. \end{cases}$$

Ce polynôme est noté  $\nabla$ , et est aussi appelé *polynôme d'ALEXANDER-CONWAY*.

*Remarque I.67.* Le lien avec le polynôme d'ALEXANDER consiste en un simple changement de variable, en effet si l'on pose  $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$  on obtient le polynôme d'ALEXANDER à partir de celui de CONWAY. On en déduit ainsi que la relation d'écheveau du polynôme d'ALEXANDER est :

$$\begin{cases} \Delta(\bigcirc) = 1, \\ \Delta(\mathcal{D}_+) - \Delta(\mathcal{D}_-) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \Delta(\mathcal{D}_0) = 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, ALEXANDER [Ale28, 12p. 299] avait remarqué cette propriété sans pour autant l'écrire sous cette forme.

Pour comparer avec la méthode précédente, recalculons le polynôme d'ALEXANDER du nœud de trèfle avec la relation d'écheveau. Nous illustrons également le lien avec le polynôme de CONWAY.

✓ *Exemple I.68.*

$$\begin{aligned} \nabla \left( \text{trèfle} \right) &= \overbrace{\nabla \left( \text{trèfle} \right)}^{=1} - z \nabla \left( \text{trèfle} \right) \\ &= 1 - z \left( \underbrace{\nabla \left( \text{trèfle} \right)}_{=0} - z \underbrace{\nabla \left( \text{trèfle} \right)}_{=1} \right) \\ &= z^2 + 1 \end{aligned}$$

car :

$$\nabla \left( \text{trèfle} \right) = \nabla \left( \text{trèfle} \right) \text{ par le 2}^{\text{e}} \text{ mouvement de REIDEMEISTER}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z} \left( \underbrace{\nabla \left( \text{diagramme} \right)}_{=1} - \underbrace{\nabla \left( \text{diagramme} \right)}_{=1} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De plus, on a pour  $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$  :

$$z^2 + 1 = \left( t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right)^2 + 1 = t - 1 + t^{-1} = t^{-1} (t^2 - t + 1)$$

On retrouve bien le polynôme d'ALEXANDER calculé à l'exemple précédent.

Dans son article original, ALEXANDER mentionne que son polynôme est symétrique, au sens où le changement de variable  $t \leftrightarrow t^{-1}$  laisse le polynôme invariant. Il précise également que celui-ci vaut 1 ou  $-1$  lorsqu'il est évalué en 1. Les travaux de KAWAUCHI [Kaw75] montrent même qu'un polynôme de LAURENT à coefficients entiers respectant ces conditions est le polynôme d'ALEXANDER d'un certain nœud.

---

**Théorème I.69 – Détermination de l'ensemble des polynômes d'ALEXANDER.**

Pour  $P$  un polynôme de LAURENT à coefficients entiers, tel que  $P(1) = \pm 1$  et  $P(t) = P(t^{-1})$ , il existe un nœud  $K$  tel que  $\Delta_K(=)P$ .

**KAWAUCHI (1975)** – [Kaw75, Theorem 1.6 p. 567]

---

La construction sous forme de relation d'écheveau apporte néanmoins quelques inconvénients. Il a en effet été montré par KANENOBU [Kan86] qu'il existe toujours des exemples de nœuds distincts ayant le même polynôme si celui-ci est défini par une relation d'écheveau. Cela implique, en particulier, que le polynôme d'ALEXANDER n'est pas complet.

---

**Théorème I.70 – Incomplétude des polynômes de nœud.**

Il existe une infinité de nœuds distincts ayant le même invariant polynomial si celui-ci peut être exprimé par une relation d'écheveau.

**KANENOBU (1986)** – [Kan86, Theorem p. 159]

---

Nous avons un exemple en figure 2.7 de deux nœuds distincts ayant le même polynôme d'ALEXANDER. Ils auront également le même polynôme de JONES et le même polynôme HOMFLY qui, nous le verrons plus en avant dans ce chapitre, sont tous deux exprimables avec une relation d'écheveau.

Une dernière remarque à propos du polynôme d'ALEXANDER est que celui-ci ne détecte pas le nœud trivial. Le nœud de KINOSHITA-TERASAKA ainsi que le nœud de CONWAY, vu en figure 1.14, ont tous deux un polynôme d'ALEXANDER égaux à 1, comme le nœud trivial.

## 2.2.2 Le polynôme de JONES

Découvert en 1985, l'introduction de ce polynôme par JONES [Jon85] au sein de la théorie des nœuds a été un réel renouveau, tant sur l'étude des entrelacs que sur les liens avec d'autres domaines de recherche. Il s'agit également de l'objet de notre étude dans cette thèse, nous le présentons donc ici avec le plus de détails possibles.

Sa définition originelle repose sur la théorie des tresses ainsi que sur les algèbres de VON NEUMANN, incluant les résultats de ALEXANDER [Ale23], MARKOFF [Mar36] et TEMPERLEY et LIEB [TL71]. Ils seront explicités en sous-section 2.3.3 et en section A.3. Elle se base sur une représentation  $\rho$  du groupe de tresses  $B_n$  dans l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB  $TL_n(-t^2 - t^{-2})$ , puis le calcul de la trace de  $\rho$  normalisée

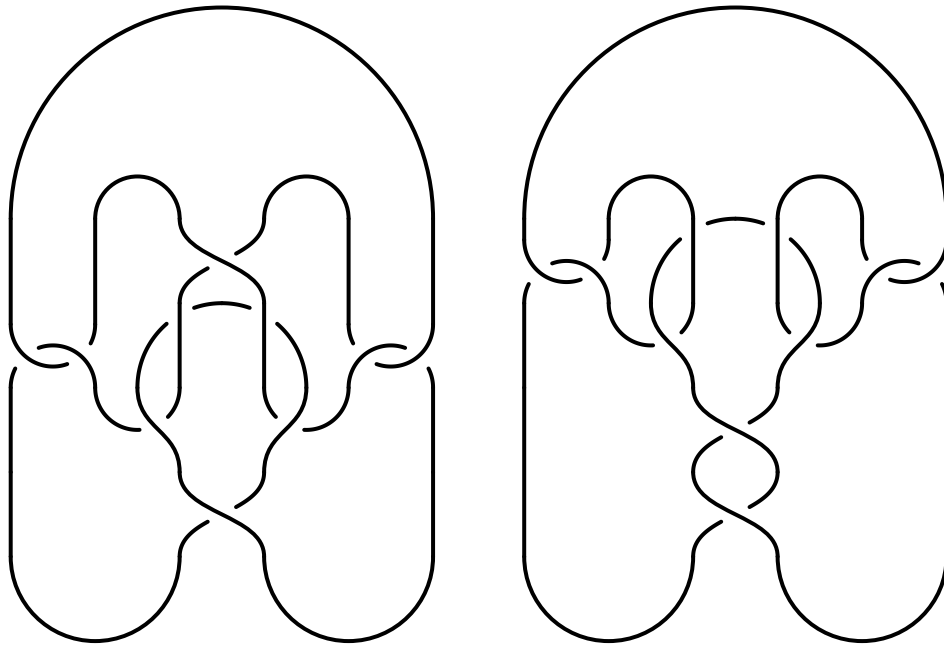


FIGURE 2.7 – Ces deux nœuds ont le même polynôme d’ALEXANDER, de JONES et HOMFLY. Pour voir leur construction de manière générale, on consultera [Kan86].

par un coefficient dépendant de  $n$  donne le polynôme attendu. C’est un peu abstrait et hors de notre contexte, elle ne sera de ce fait pas plus explicitée.

Une définition plus concrète a été fournie par KAUFFMAN [Kau87]. Elle reprend quasiment les mêmes idées que la définition de JONES mais utilise la représentation visuelle des algèbres de TEMPERLEY-LIEB au sein des diagrammes d’entrelacs. Cette approche utilise ce qu’il appelle le « modèle des états » : le diagramme est progressivement modifié en supprimant des croisements, créant à chaque fois deux nouveaux états de celui-ci. L’idée ressemble aussi aux relations d’écheveau, mais les modifications au niveau d’un croisement ne sont pas les mêmes.

Le calcul du polynôme de JONES suivant ce modèle nécessite le *crochet de KAUFFMAN*, que nous allons définir de suite.

**Définition I.71 – Crochet de KAUFFMAN.**

Pour  $D$  un diagramme d’entrelacs, le *crochet de KAUFFMAN* de  $D$ , noté  $\langle D \rangle$ , est défini dans  $\mathbb{Z} [\tau, \tau^{-1}]$  récursivement suivant les règles suivantes :

$$\begin{cases} \langle \bigcirc \rangle = 1, \\ \langle K \sqcup \bigcirc \rangle = -(\tau^2 + \tau^{-2}) \langle K \rangle, \\ \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = \tau \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle + \tau^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle. \end{cases}$$

Les nouveaux états du diagramme sont obtenus par la troisième règle, qui permet de séparer localement un croisement de deux manières différentes. La deuxième retire les composantes non nouées, et la première donne une valeur au nœud trivial. Comme le nombre de croisements diminue strictement et que les différentes composantes sont retirées au fur et à mesure, le calcul du crochet est bien déterminé. Nous savons même qu’il correspond à une somme de  $2^x$  termes, avec  $x$  le nombre de croisements du diagramme.

Les états du crochet, une fois tous les croisements séparés, peuvent en eux-mêmes être exprimés par une notation introduite par KAUFFMAN [Kau87, p. 397].

**Définition I.72 – État du crochet de KAUFFMAN.**

Pour  $D$  un diagramme d'entrelacs, un *état du crochet de KAUFFMAN* est un terme provenant de  $\langle D \rangle$  de la forme  $\tau^e \delta^c$  avec  $\delta = -\tau^2 - \tau^{-2}$  obtenu en choisissant pour chaque croisement de  $D$  une séparation. En numérotant les croisements de  $D$  de 1 à  $x$ , l'état  $\langle D | S \rangle$  est déterminé par  $S \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^x$  où 0 représente une séparation  $\underbrace{\quad}$  et 1 une séparation  $\overbrace{\quad}$  pour le croisement concerné.

*Remarques I.73.*

1. Dans la définition originelle de l'article,  $\langle D | S \rangle$  est défini comme étant seulement le coefficient  $\tau^e$ , la partie  $\delta^c$  est considérée de manière indépendante et est noté  $|S|$ . Ils ont été regroupés ici par souci de simplicité dans l'usage que nous allons en faire.
2. Toujours dans cet article, l'objet  $S$  n'y est pas interprété de la même façon et est vu comme le diagramme résultant des choix de séparation. Nous avons changé cette vision en considérant plutôt la séquence des choix effectués.
3. Si  $|S|$  désigne la somme des entiers dans la séquence  $S$ , il n'est pas difficile de voir que  $e = x - 2|S|$ , où  $x$  est le nombre de croisements de  $D$ . Cela est également mentionné dans [Kau87], attention cependant car dans cet article la notation  $|S|$  a une signification différente.

De manière naturelle, la somme des états d'un diagramme  $D$  correspond au crochet de KAUFFMAN de  $D$ , d'où le nom « modèle des états ».

**Proposition I.74.** *Pour  $D$  un diagramme d'entrelacs avec  $x$  croisements, nous avons :*

$$\langle D \rangle = \sum_{S \in \llbracket 1, n \rrbracket^x} \langle D | S \rangle$$

À propos de la démonstration :

Donnée par KAUFFMAN [Kau87, Proposition 2.2 p. 397].

Le crochet de KAUFFMAN n'est pas préservé par le premier mouvement de REIDEMEISTER, en effet ajouter des croisements avec le 1<sup>er</sup> mouvement de REIDEMEISTER a pour conséquence de multiplier l'ensemble par un facteur dépendant de  $\tau$ . En revanche, le crochet est préservé par l'*isotopie régulière* qui regroupe l'isotopie ambiante du plan et les deuxième et troisième mouvements de REIDEMEISTER.

**Définition I.75 – Isotopie régulière.**

Deux diagrammes  $D$  et  $D'$  sont dit *isotopes de manière régulière* s'il est possible de déformer  $D$  en  $D'$  sans utiliser le premier mouvement de REIDEMEISTER.

À noter que l'isotopie régulière d'un diagramme  $D$  ne décrit pas totalement l'isotopie ambiante de l'espace d'origine de l'objet représenté par  $D$ , mais deux diagrammes isotopes de manière régulière voient leur objet d'origine isotope dans l'espace à trois dimensions.

✓ *Exemple I.76.* On calcule pour  $D$  un diagramme, dont on a étiré et torsadé une partie, la variation du crochet du KAUFFMAN due au 1<sup>er</sup> mouvement de REIDEMEISTER :

$$\begin{aligned} \langle \boxed{D} \rangle &= \tau \langle \boxed{D} \rangle + \tau^{-1} \langle \boxed{D} \rangle = (-\tau^{-1} (\tau^2 + \tau^{-2}) + \tau) \langle \boxed{D} \rangle \\ &= -\tau^{-3} \langle \boxed{D} \rangle \end{aligned}$$

Si le croisement est inversé on a :

$$\langle \boxed{D} \rangle = \tau^{-1} \langle \boxed{D} \rangle + \tau \langle \boxed{D} \rangle = (-\tau (\tau^2 + \tau^{-2}) + \tau^{-1}) \langle \boxed{D} \rangle$$

$$= -\tau^3 \left\langle \boxed{D} \right\rangle$$

Dans les deux cas nous obtenons un résultat différent de  $\langle D \rangle$ .

Pour corriger ce problème, nous devons supprimer ce facteur en multipliant par son inverse, qui dépend du signe des croisements. On peut utiliser pour cela l'entortillement, puisqu'il dépend également du nombre de croisements et de leur signe. En effet, l'entortillement change de la même façon que le crochet sous l'action du 1<sup>er</sup> mouvement de REIDEMEISTER et est invariant sous l'isotopie régulière. On définit ainsi le *crochet de KAUFFMAN normalisé*

**Définition I.77 – Crochet de KAUFFMAN normalisé.**

Pour  $D$  un diagramme d'entrelacs orienté, on définit le *crochet de KAUFFMAN normalisé* par :

$$\chi_D(\tau) = (-\tau^3)^{-\text{wr}(D)} \langle D \rangle$$

Ce nouveau polynôme est, cette fois, bien un invariant de nœud.

**Théorème I.78 – Invariance du crochet de KAUFFMAN normalisé.**

Le crochet de KAUFFMAN normalisé respecte l'isotopie ambiante, et est donc un invariant de nœud. KAUFFMAN (1987) – [Kau87, Theorem 2.6 p. 399]

Il nous reste à faire le lien avec le polynôme de JONES, qui est un simple changement de variable. Cela est expliqué par KAUFFMAN [Kau87, Theorem 2.8 p. 400] et la relation d'écheveau associée au polynôme de JONES, que nous verrons en proposition I.80.

**Définition I.79 – Polynôme de JONES.**

Le *polynôme de JONES*, noté  $V$ , est défini dans  $\mathbb{Z}[\sqrt{t}, \sqrt{t^{-1}}]$  à partir du crochet de KAUFFMAN normalisé comme :

$$V_D(t) = \chi_D\left(t^{-\frac{1}{4}}\right)$$

où  $D$  est un diagramme orienté.

Nous insistons sur le fait que la définition I.79 n'est pas la définition originelle, mais celle-ci est parfaitement équivalente et ne nécessite pas de notion hors de la théorie des nœuds pour être présentée. On peut construire le polynôme de JONES aussi grâce à une relation d'écheveau.

**Proposition I.80.** *Le polynôme de JONES est défini par la relation d'écheveau suivante :*

$$\begin{cases} V_{\bigcirc} = 1, \\ t^{-1} V_{\mathcal{D}_+} - t V_{\mathcal{D}_-} + \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) V_{\mathcal{D}_0} = 0. \end{cases}$$

À propos de la démonstration :

Donnée par JONES [Jon85, Theorem 12 p. 107].

*Remarque I.81.* Dans l'article de JONES [Jon85, Theorem 12 p. 107], la relation donnée est la suivante :

$$\begin{cases} V_{\bigcirc} = 1, \\ -t V_{\mathcal{D}_+} + t^{-1} V_{\mathcal{D}_-} + \left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) V_{\mathcal{D}_0} = 0. \end{cases}$$

Celle-ci inverse le rôle de  $t$  et  $t^{-1}$  par rapport à celle de la proposition I.80, de ce fait la formule de JONES n'est pas consistante avec la définition I.71 que nous avons donnée dans ce mémoire.

Malheureusement, cette expression nous donne l'inconvénient suivant :

**Corollaire I.82.** *Le polynôme de JONES n'est pas complet.*

*Démonstration :*

Conséquence du théorème I.70. □

Cela se vérifie avec les travaux de MORTON et TRACZYK [MT90, *Theorem 1, Theorem 2 p. 627, 629*] qui montrent que le polynôme de JONES ne distingue pas les entrelacs mutants, cela se répercute même sur la construction de nœuds satellites avec des nœuds mutants. Mais bien que cet invariant soit incomplet, il peut néanmoins distinguer un entrelacs et son image miroir.

**Théorème I.83 – Détection de la chiralité par le polynôme de JONES.**

---

Pour  $L$  un entrelacs, on note  $L'$  son image miroir ; alors  $V_{L'}(t) = V_L(t^{-1})$ .

**JONES (1985)** – [Jon85, *Theorem 3 p. 105*]

---

*Démonstration :*

Avec la construction suivant le modèle des états, il suffit de remarquer que l'inversion des croisements inverse les rôles de  $\tau$  et  $\tau^{-1}$  dans la troisième relation du crochet de KAUFFMAN, et change le signe de l'entortillement. □

**Corollaire I.84.** *Le polynôme de JONES d'un entrelacs achiral  $L$  est symétrique, c'est-à-dire que :*

$$V_L(t^{-1}) = V_L(t).$$

**▲ Attention I.85.** La véracité de la réciproque du corollaire I.84 n'est pas connue, autrement dit un entrelacs ayant un polynôme de JONES symétrique n'est, a priori, pas forcément achiral.

Toujours concernant l'efficacité de ce polynôme de nœud, nous savons grâce à ELIAHOU, KAUFFMAN et THISTLETHWAITE [EKT03, *Corollary 3.3.1 p. 164*] que le polynôme de JONES ne détecte pas les entrelacs triviaux ayant au moins 2 composantes.

**Théorème I.86 – Non détection des entrelacs triviaux par le polynôme de JONES.**

---

Pour  $k \geq 2$ , il existe une infinité d'entrelacs premiers à  $k$  composantes ayant le même polynôme de JONES que l'entrelacs trivial à  $k$  composantes  $\textcircled{k}$ .

**ELIAHOU, KAUFFMAN et THISTLETHWAITE (2003)** – [EKT03, *Article complet*]

---

Il reste cependant le cas des nœuds, vu comme entrelacs à 1 composante. À ce jour, la question est encore ouverte, rien ne permet d'affirmer ou d'infirmer la détection du nœud trivial par le polynôme de JONES. Bien que le théorème I.86 nous ferait pencher vers une réponse négative, il existe un lien entre le polynôme de JONES et l'homologie de KHOVANOV [Kho00] qui, elle, détecte le nœud trivial (KRONHEIMER et MROWKA [KM11, *Theorem 1.1 p. 97*]). Le problème I.87, que nous réécrivons ici, sera d'ailleurs une des principales directions de cette thèse.

**■ Problème I.87 – Est-ce que le polynôme de JONES détecte le nœud trivial ?**

L'étude d'une version plus faible de ce problème sera développée en chapitre 3. Nous aurons besoin, pour celle-ci, de quelques propriétés du polynôme de JONES, notamment à propos de son comportement avec les nœuds.

**Théorème I.88 – Forme du polynôme de JONES.**

---

Pour  $L$  un entrelacs, si  $L$  a un nombre impair de composantes, alors  $V_L$  est un polynôme de LAURENT vivant dans  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ , sinon il s'écrit sous la forme  $V_L = \sqrt{t}P$  où  $P \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ .

**JONES (1985)** – [Jon85, *Theorem 2 p. 105*]

---

En particulier, dans le cas des nœuds, le polynôme de JONES sera toujours à puissances entières. De par le changement de variable effectué avec le crochet de KAUFFMAN normalisé, cela montre aussi que le

crochet a pour puissance de  $\tau$  que des multiples de 2 ou 4 suivant la parité du nombre de composantes. Un autre résultat dépendant aussi du nombre de composantes est le suivant :

---

**Théorème I.89 – Évaluation en l’unité du polynôme de JONES.**

---

Pour  $L$  un entrelacs avec  $k$  composantes, on a  $V_L(1) = (-2)^{k-1}$ .

**JONES (1985)** – [Jon85, Theorem 15 p. 107]

---

Pour les nœuds, nous avons ainsi un point fixe du polynôme de JONES en 1. Cette information, couplée avec d’autres résultats du même article, nous donne le théorème suivant :

---

**Théorème I.90 – Écriture du polynôme de JONES d’un nœud.**

---

Pour  $K$  un nœud on a :

$$\frac{V_K - 1}{(1 - t^3)(1 - t)} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

**JONES (1985)** – [Jon85, Theorem 14–16 p. 107]

---

Par ailleurs, si l’on définit  $W_K$  comme la fraction rationnelle du théorème I.90, on obtient en particulier  $W_K = 0$  pour  $K = \bigcirc$  et  $W_K = 1$  si  $K$  est le nœud de trèfle. Cependant cette écriture rend la compréhension de certaines propriétés, comme la détection de la chiralité, plus obscure.

Cette dernière propriété, qui sera utilisée plus tard, donne le comportement du polynôme de JONES avec le recollement d’entrelacs.

---

**Théorème I.91 – Comportement du polynôme de JONES avec le recollement.**

---

Pour  $L_1$  et  $L_2$  deux entrelacs, le recollement  $L_1 \# L_2$  a pour polynôme de JONES :

$$V_{L_1 \# L_2} = V_{L_1} V_{L_2}.$$

**JONES (1985)** – [Jon85, Theorem 6 p. 105]

---

*À propos de la démonstration :*

Ce théorème est également un corollaire de la proposition I.94.

D’autres résultats sont présents dans l’article de JONES, détaillant des relations avec d’autres invariants comme le polynôme d’ALEXANDER, ou avec les tresses comme le nombre de brins minimal pour représenter un nœud, mais ils ne seront pas abordés ici.

### 2.2.3 La généralisation par le polynôme HOMFLY

Quelque temps après l’arrivée du polynôme de JONES, la découverte d’un nouveau polynôme de nœud à deux variables<sup>3</sup> permet de généraliser le polynôme d’ALEXANDER et le polynôme de JONES, ainsi que n’importe quel polynôme de nœud ayant une relation d’écheveau. Il s’agit du polynôme HOMFLY, présenté par FREYD et al. [Fre+85]. L’origine du nom « HOMFLY » vient des initiales des mathématiciens l’ayant découvert et publié en même temps, ce qui est amusant puisqu’ils étaient répartis dans quatre groupes de recherche différents. Il est parfois appelé HOMFLYPT en raison des travaux de PRZYTYCKI et TRACZYK [PT87] qui portent sur le même polynôme mais qui sont arrivés à l’éditeur plus tard.

Le polynôme HOMFLY est défini d’autant de manières que de façons dont il a été découvert, et afin de rester cohérent avec les notions que nous avons déjà abordées, nous utiliserons la suivante :

**Définition I.92 – Polynôme HOMFLY.**

---

3. Ou trois variables suivant la définition.

Le polynôme HOMFLY, noté  $P$  et homogène de degré 0, est défini par la relation d'écheveau suivante :

$$\begin{cases} P(\bigcirc) = 1, \\ xP(\mathcal{D}_+) + yP(\mathcal{D}_-) + zP(\mathcal{D}_0) = 0. \end{cases}$$

De manière équivalente, il est aussi défini par :

$$\begin{cases} P(\bigcirc) = 1, \\ \ell P_{\mathcal{D}_+} (+)\ell^{-1} P_{\mathcal{D}_-} (+)m P_{\mathcal{D}_0} (=)0. \end{cases}$$

mais n'est pas homogène dans ce cas.

*Remarque I.93.* Due à sa définition, le polynôme HOMFLY généralise tous les polynômes de nœud ayant une description par relation d'écheveau, comme le polynôme d'ALEXANDER ou le polynôme de JONES. Il permet de montrer de plus que quel que soit le polynôme obtenu par une relation d'écheveau, celui-ci est un invariant de nœud.

Le polynôme HOMFLY dispose de propriétés qui seront hérités par les polynômes de nœud décrits comme des cas particuliers. Toutes ces propriétés sont énoncées dans l'article de FREYD et al. [Fre+85].

**Proposition I.94.** Pour  $L_1$  et  $L_2$  deux entrelacs, le recollement  $L_1 \# L_2$  a pour polynôme HOMFLY :

$$P_{L_1 \# L_2} = P_{L_1} P_{L_2}.$$

Cela permet d'expliquer d'une autre manière ce comportement vu sur le polynôme de JONES, observé aussi sur le polynôme d'ALEXANDER mais non précisé dans ce mémoire. De la même façon, la détection de la chiralité est une propriété héritée.

**Proposition I.95.** Pour  $L$  un entrelacs, on note  $L'$  son image miroir; alors  $P_{L'}(x, y, z) = P_L(y, x, z)$ .

Si l'on revoit les relations d'écheveau du polynôme de JONES et d'ALEXANDER en proposition I.80 et en définition I.66, on comprend pourquoi l'un détecte bien la chiralité et l'autre non. En effet, pour le polynôme d'ALEXANDER, les deux facteurs échangés sont identiques<sup>4</sup>, de ce fait aucune modification n'apparaît.

## 2.3 Notation des nœuds

La représentation graphique des entrelacs sous forme de diagramme est utilisée pour diverses raisons, allant de la simple visualisation aux calculs, mais n'est pas forcément la plus pratique ou la plus efficace dans certaines situations, comme leur manipulation par un ordinateur ou dans l'exploration purement théorique. Par exemple les tresses peuvent s'écrire sous forme de mots, leur apportant de plus une structure algébrique. Par ailleurs celles-ci peuvent être utilisées pour décrire les entrelacs, comme nous le verrons en sous-section 2.3.3.

Nous allons dans cette section voir d'autres manières de représenter les nœuds, sous la forme de notations. Elles peuvent prendre la forme d'une liste de lettres, de nombres ou même une suite d'opérations algébriques.

### 2.3.1 La notation DOWKER-THISTLETHWAITE

Introduite par TAIT [Tai98, Part I p. 275], modifiée par DOWKER et THISTLETHWAITE [DT83], cette notation permet de représenter les nœuds<sup>5</sup> par une suite de nombres pairs signés. Chaque nombre pair

4. Au signe près.

5. Et seulement les nœuds, c'est une de ses limitations. On citera néanmoins une généralisation en fin de sous-section.

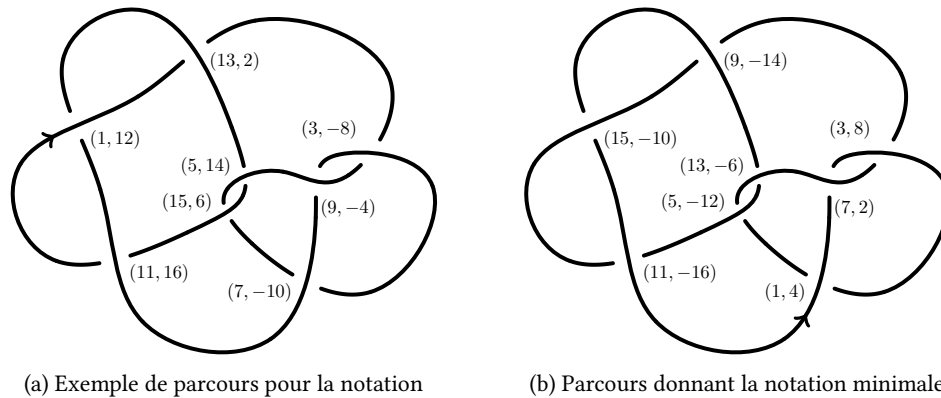


FIGURE 2.8 – Différents parcours possibles pour générer la notation DT, dont le point de départ et le sens sont indiqués par une flèche. Celui en figure 2.8a donne  $(12, -8, 14, -10, -4, 16, 2, 6)$ , tandis que la notation minimale est  $(4, 8, -12, 2, -14, -16, -6, -10)$ .

correspond à un croisement, son ordre d'apparition permet de déterminer avec quel autre croisement il est lié, et son signe détermine quel arc passe au-dessus du croisement auquel il est associé.

La notation est déterminée à partir d'un diagramme, et encode celui-ci par un algorithme qui a l'avantage d'être réversible. Il est, de ce fait, possible de dessiner le diagramme correspondant à une notation DOWKER-THISTLETHWAITE<sup>6</sup>. Nous verrons qu'une notation peut cependant représenter plusieurs nœuds, mais ce problème n'est pas gênant pour la tabulation de ceux-ci.

**Définition I.96 – Notation DOWKER-THISTLETHWAITE.**

À partir d'un diagramme  $D$  d'un nœud, la notation DT est générée comme suit :

- (i) Orienter  $D$  et définir un point de départ qui n'est pas situé au niveau d'un croisement ;
- (ii) Parcourir  $D$  suivant son orientation et numéroter les croisements rencontrés. Chaque croisement doit, à la fin du parcours, être associé à deux entiers de parités différentes ;
- (iii) Relever les entiers pairs dans l'ordre des entiers impairs qui leur sont associés, ajouter un signe moins si l'entier pair est associé au pont passant au-dessus du croisement.

On voit en figure 2.8 un exemple d'encodage d'un diagramme par la notation DT. Bien sûr en choisissant un point de départ différent ou une orientation différente, le résultat de la notation peut changer. Il convient de choisir un représentant parmi toutes les notations possibles d'un diagramme, ce sera la notation standard.

**Définition I.97 – Notation DT standard.**

La notation DT standard d'un diagramme est la notation la plus petite par rapport à l'ordre lexicographique parmi toutes les notations possibles obtenues en changeant le point de départ et l'orientation.

La notation est liée au diagramme qu'elle représente, ce qui signifie entre autres qu'elle sera certainement différente pour un diagramme équivalent. On peut facilement étudier l'action des mouvements de REIDEMEISTER sur la notation DT, mais on revient fatalement au problème d'isotopie des diagrammes.

*Remarque I.98.* On peut néanmoins étendre la définition I.97 pour choisir la notation DT la plus petite parmi tous les diagrammes équivalents en plus des précédentes possibilités, ce qui donnerait une notation standard pour le nœud associé, et non plus seulement pour le diagramme. Cette notation standard sera alors de longueur le nombre minimal de croisements du nœud.

6. Souvent abrégée en « notation DT ».

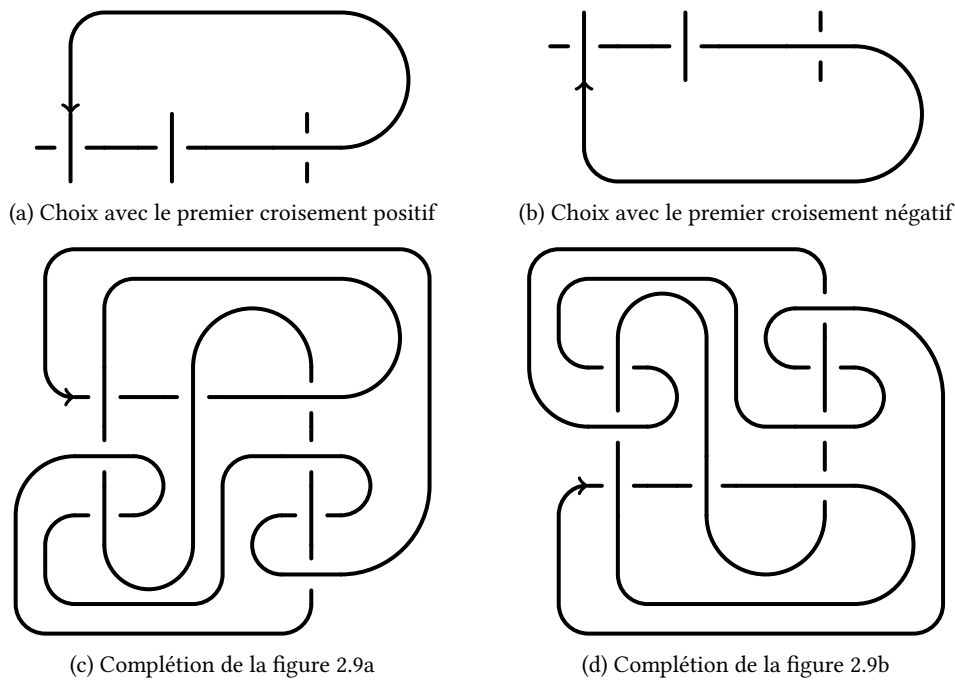


FIGURE 2.9 – Suivant le choix que l'on effectue pour dessiner le premier croisement, on obtiendra le nœud de la figure 2.8b en figure 2.9c ou son image miroir en figure 2.9d.

Il était également précisé en introduction qu'une notation ne représente pas un unique nœud, en effet l'image miroir d'un diagramme à la même notation DT que l'original. Cela se répercute aussi sur le recollement, pour  $D_1$  et  $D_2$  deux diagrammes de nœuds, leur recollement ayant une notation DT  $\nu$ , le recollement de  $D_1$  et de l'image miroir de  $D_2$  aura également comme notation DT  $\nu$ . C'est assez flagrant lorsque l'on souhaite dessiner un diagramme à partir d'une notation DT, il y aura au moins une fois un choix d'orientation à faire lors du tracé, notamment lors de la formation du premier croisement, comme en figure 2.9.

Il existe une généralisation de cette notation donnée par DOLL et HOSTE [DH91] pour encoder les entrelacs ayant toutes leurs composantes liées.

### 2.3.2 La notation de CONWAY, les enchevêtrements

Une autre manière d'encoder un diagramme, plutôt que se baser sur ces croisements et leurs liaisons, et de considérer des « briques » élémentaires et les possibles opérations permettant de les assembler. Ces briques peuvent être un simple croisement ou une partie plus complexe d'un diagramme, et dans ce dernier cas une brique est divisible en sous-briques. On appelle ces briques des enchevêtrements, ils sont dotés d'un nombre pair de « pattes », qui sont les possibles points de connexion avec d'autres enchevêtrements. Ces points de connexion peuvent aussi être reliés à un autre point du même enchevêtrement, on appellera cela une clôture. Cette structuration des diagrammes a été introduite par CONWAY [Con70] dans le but d'énumérer les nœuds jusqu'à 11 croisements, rapidement et à la main.

#### **Définition I.99 – Enchevêtrement.**

Un  $n$ -enchevêtrement est une partie de diagramme d'entrelacs contenu dans un disque ayant exactement  $2n$  extrémités. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on le nomme ici simplement *enchevêtrement*.

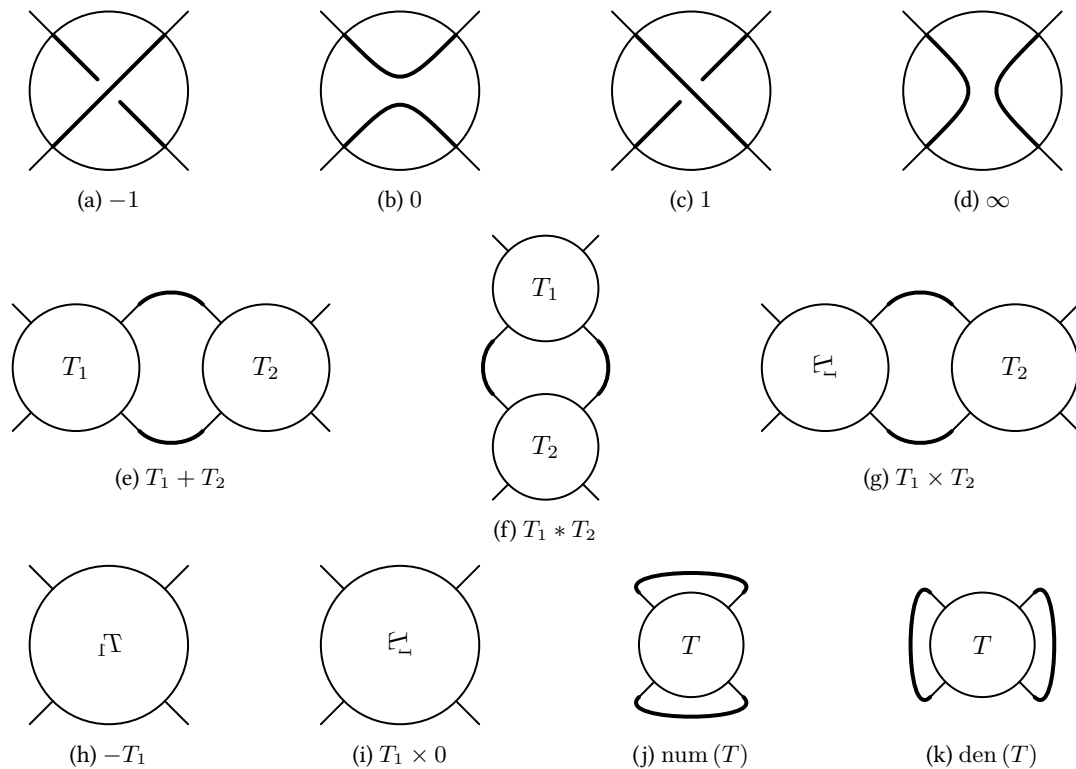


FIGURE 2.10 – Sur la première ligne se trouve les enchevêtrements algébriques élémentaires, sur les deux suivantes les opérations algébriques, dont les différentes clôtures dans le cas d'un 2-enchevêtrement.

L'ensemble des  $n$ -enchevêtrements est noté  $\mathcal{T}_n$ , et on utilisera également la notation  $\overline{\mathcal{T}}$  pour désigner un enchevêtrement  $T$ .

On peut voir en figure 2.11 des exemples de 2-enchevêtrements. Les 2-enchevêtrements peuvent être parfois décrits par une notation numérique ou une suite d'opérations algébriques, ce sont les enchevêtrements algébriques.

**Définition I.100 – Enchevêtrement algébrique.**

Les *enchevêtrements algébriques* sont des 2-enchevêtrements pouvant être obtenus par les enchevêtrements algébriques élémentaires et les opérations algébriques sur ceux-ci. Les extrémités de ces enchevêtrements sont notées suivant les points cardinaux NE, NO, SE et SO.

On définit ainsi les *enchevêtrements algébriques élémentaires* 1,  $-1$ , 0 et  $\infty$  représentant respectivement :

- 1 : le croisement dont le pont allant du SE au NO passe au-dessus,
- $-1$  : le croisement inverse de 1, autrement dit ayant un pont allant du NE au SO,
- 0 : la liaison par un arc des extrémités NE et NO, ainsi que du SE au SO,
- $\infty$  : la liaison par un arc des extrémités NE et SE, ainsi que du NO au SO.

Pour  $T_1, T_2$  deux enchevêtrements algébriques, on définit les *opérations algébriques*  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $1/\cdot$  comme suit :

$T_1 + T_2$  : La concaténation horizontale de  $T_1$  et  $T_2$ , autrement dit les extrémités est de  $T_1$  sont reliées aux extrémités ouest de  $T_2$  sans croisements,

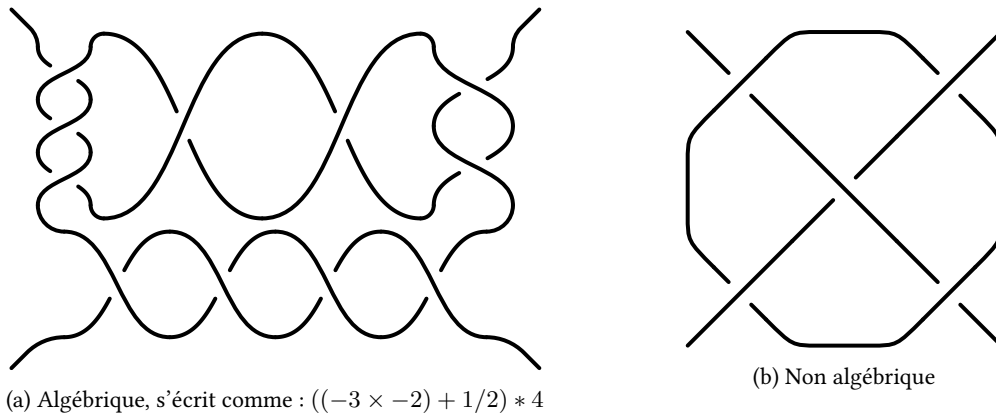


FIGURE 2.11 – Exemples de 2-enchevêtrements algébriques ou non.

$-T_1$  : l'inversion de tous les croisements de  $T_1$ , autrement dit son image miroir,

$T_1 * T_2$  : la concaténation verticale de  $T_1$  et  $T_2$ , autrement dit les extrémités sud de  $T_1$  sont reliées aux extrémités nord de  $T_2$ ,

$T_1 \times T_2$  : correspond à l'addition de la réflexion de  $T_1$  par rapport à l'axe passant par ses extrémités NO et SE avec  $T_2$ .

Par praticité, on notera pour  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  :

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{k \text{ fois}} = k, \quad \underbrace{1 * \dots * 1}_{k \text{ fois}} = 1/k.$$

On pourra consulter la figure 2.10 pour voir la représentation visuelle de toutes ses définitions.

*Remarque I.101.* L'opération  $*$  sur les enchevêtrements n'a pas été définie par CONWAY, mais bien plus tard dans l'article de ELIAHOU, KAUFFMAN et THISTLETHWAITE [EKT03].

Pour le moment, ces enchevêtrements ne permettent pas de construire des entrelacs à cause de la présence des extrémités. Pour les retirer, on peut clôturer l'enchevêtrement en reliant ses extrémités par paire. Après cette opération, suivant le choix des paires effectuées, le résultat peut changer de manière conséquente.

#### **Définition I.102 – Clôture d'un enchevêtrement.**

La *clôture* d'un enchevêtrement est une opération visant à relier par paire chaque extrémité de celui-ci sans créer de nouveaux croisements. Dans le cas particulier d'un 2-enchevêtrement  $T$ , il existe exactement deux types de clôture :

1. celle reliant les extrémités au sud avec celles du nord, appelée *clôture du dénominateur* et notée  $\text{den}(T)$ ,
2. celle reliant les extrémités à l'ouest avec celles de l'est, appelée *clôture du numérateur* et notée  $\text{num}(T)$ .

L'illustration des clôtures  $\text{den}(\cdot)$  et  $\text{num}(\cdot)$  est visible en figure 2.10j et en figure 2.10k. Les enchevêtrements algébriques permettent de donner une notation sous forme d'opérations algébriques des entrelacs qu'ils représentent, comme en figure 2.11a. Cependant toutes les configurations ne peuvent être exprimées sous cette forme, par exemple l'enchevêtrement en figure 2.11b ne peut pas s'écrire sous forme algébrique.

### 2.3.3 La notation sous forme de mots de tresse

Nous n'avons pour le moment pas encore abordé les tresses, ceci sera fait en section A.1. Le lecteur est encouragé à lire en premier cette section s'il ne connaît pas ce domaine.

Les tresses font partie d'un domaine de recherche très liée à la théorie des nœuds, l'explication la plus courte résumant ce lien est simplement la clôture d'une tresse. Le principe est le même qu'avec les enchevêtrements, à ceci près qu'une seule clôture est admise. Une fois une tresse close, n'ayant plus d'extrémité, elle devient le diagramme d'un entrelacs.

---

#### Définition I.103 – Clôture d'une tresse.

La clôture d'une tresse  $\beta$  à  $n$  brins consiste à identifier les extrémités se faisant face de part et d'autre de la tresse. On la note  $\widehat{\beta}$ .

De cette façon, on peut utiliser les mots de tresses pour représenter les entrelacs, obtenus en clôturant la tresse associée. Il se trouve de plus que l'inverse est aussi vrai, c'est-à-dire que tout entrelacs est la clôture d'au moins une tresse. Ce fait a été démontré par ALEXANDER [Ale23].

---

#### Théorème I.104 – Lien entre entrelacs et tresses.

Tout entrelacs peut être déformé dans l'espace pour que son tracé soit enroulé autour d'un axe, son orientation étant globalement la même autour de ce même axe. Cet entrelacs peut alors être vu comme une tresse enroulée autour de cet axe.

ALEXANDER (1923) – [Ale23, Article complet]

---

Cependant plusieurs tresses différentes peuvent, une fois closes, donner le même entrelacs. Les conditions permettant de déterminer si deux tresses représenteront après clôture le même entrelacs ont été données par MARKOFF [Mar36].

---

#### Théorème I.105 – Équivalence des tresses après clôture.

Deux tresses  $B_1$  et  $B_2$  donneront le même entrelacs orienté après clôture si et seulement si au moins l'une de ces affirmations ou une combinaison d'entre elles est vraie :

- (i)  $B_1$  et  $B_2$  sont équivalentes au sens de la théorie des tresses,
- (ii)  $B_1$  et  $B_2$  sont conjuguées,
- (iii)  $B_1$  peut être obtenue à partir de  $B_2$  en ajoutant ou en retirant le dernier brin de la tresse croisant exactement une fois le brin précédent.


MARKOFF (1936) – [Mar36, Article complet]

---

Cette notation permet de noter n'importe quel entrelacs, mais sa très grande contrepartie est qu'une infinité de notations est possible pour un seul entrelacs donné. L'équivalence entre deux notations est d'autant plus difficile qu'elle mélange le problème d'isotopie des entrelacs avec celui d'équivalence et de conjugaison des tresses.


## 2.4 Bibliographie de ce chapitre

La bibliographie complète ainsi que le détail de chaque référence est accessible en page 191.

[Ale23]  James Waddell ALEXANDER. « A lemma on systems of knotted curves ». Dans : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 9.3, p. 93-95.

[Ale28]  James Waddell ALEXANDER. « Topological invariants of knots and links ». Dans : *Transactions of the American Mathematical Society* 30.2, p. 275-306.

- [Con70]   📖 John Horton CONWAY. « An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties ». Dans : *Computational problems in abstract algebra*, p. 329-358.
- [DH91]   📖 Helmut DOLL et Jim HOSTE. « A tabulation of oriented links ». Dans : *Mathematics of Computation* 57.196, p. 747-761.
- [DT83]   📖 Clifford Hugh DOWKER et Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « Classification of knot projections ». Dans : *Topology and its Applications* 16.1, p. 19-31.
- [EKT03]   📖 Shalom ELIAHOU, Louis Hirsch KAUFFMAN et Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « Infinite families of links with trivial Jones polynomial ». Dans : *Topology* 42.1, p. 155-169.
- [Fár49]   📖 István FÁRY. « Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud ». Dans : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 77, p. 128-138.
- [Fre+85]   📖 Peter FREYD, David YETTER, Jim HOSTE, William Bernard Raymond LICKORISH, Kenneth MILLETT et Adrian OCNEANU. « A new polynomial invariant of knots and links ». Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 12.2, p. 239-246.
- [GL89]   📖 Cameron McAllan GORDON et John Edwin LUECKE. « Knots are determined by their complements ». Dans : *Journal of the American Mathematical Society* 2.2, p. 371-415.
- [Jon85]   📖 Vaughan Frederick Randal JONES. « A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras ». Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 12.1, p. 103-112.
- [Kan86]   📖 Taizo KANENOBU. « Infinitely many knots with the same polynomial invariant ». Dans : *Proceedings of the American Mathematical Society* 97.1, p. 158-162.
- [Kau87]   📖 Louis Hirsch KAUFFMAN. « State models and the Jones polynomial ». Dans : *Topology* 26.3, p. 395-407.
- [Kau90]   📖 Louis Hirsch KAUFFMAN. « An invariant of regular isotopy ». Dans : *Transactions of the American Mathematical Society* 318.2, p. 417-471.
- [Kaw75]   📖 Akio KAWAUCHI. « Three dimensional homology handles and circles ». Dans : *Osaka Journal of Mathematics* 12.3, p. 565-581.
- [Kho00]   📖 Mikhail KHOVANOV. « A categorification of the Jones polynomial ». Dans : *Duke Mathematical Journal* 101.3, p. 359-426.
- [KM11]   📖 Peter Benedict KRONHEIMER et Tomasz Stanislaw MROWKA. « Khovanov homology is an unknot-detector ». Dans : *Publications mathématiques de l'IHÉS* 113.1, p. 97-208.
- [Mar36]   📖 Andrei Andreevich MARKOFF. « Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe ». Dans : *Matematicheskii Sbornik : Recueil Mathématique* 1(43).1, p. 73-78.
- [Mil50]   📖 John Willard MILNOR. « On the total curvature of knots ». Dans : *The Annals of Mathematics* 52.2, p. 248-257.
- [MT90]   📖 Hugh R. MORTON et Paweł TRACZYK. « The Jones polynomial of satellite links around mutants ». Dans : *Advanced Series in Mathematical Physics*. T. 11, p. 625-630.
- [PT87]   📖 Józef Henryk PRZYTYCKI et Paweł TRACZYK. « Invariants of links of Conway type ». Dans : *Kobe Journal of Mathematics* 4.2, p. 115-139.
- [Sch54]   📖 Horst SCHUBERT. « Über eine numerische Knoteninvariante ». Dans : *Mathematische Zeitschrift* 61.1, p. 245-288.
- [Sei35]   📖 Herbert SEIFERT. « Über das Geschlecht von Knoten ». Dans : *Mathematische Annalen* 110.1, p. 571-592.
- [Tai98]   📖 Peter Guthrie TAIT. « On knots Part I, II, III ». Dans : *Scientific papers*. T. I, p. 275-347.

- [TL71]  Harold Neville Vazeille TEMPERLEY et Elliott Hershel LIEB. « Relations between the 'percolation' and 'colouring' problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices : some exact results for the 'percolation' problem ». Dans : *Proceedings of the Royal Society of London A* 322.1549, p. 251-280.

## **Deuxième partie**

# **Approche modulaire et étude du polynôme de JONES**



---

Le polynôme de JONES modulaire

---

**Sommaire du présent chapitre**

<b>3.1 Description de la version modulaire du polynôme de JONES</b>	<b>68</b>
3.1.1 Premières remarques . . . . .	68
3.1.2 Liens entre la version modulaire et classique . . . . .	69
3.1.3 Origine de la version modulaire . . . . .	70
<b>3.2 Assemblage de nœuds <math>m</math>-triviaux</b>	<b>72</b>
3.2.1 Construction de nœuds $m^r$ -triviaux . . . . .	72
3.2.2 Tentative par substitution dans un modèle . . . . .	75
3.2.3 Recherche aléatoire d'exemples . . . . .	80
<b>3.3 Bibliographie de ce chapitre</b>	<b>85</b>

Dans ce chapitre, nous allons aborder la principale problématique de cette thèse. Celle-ci provient de cette question ouverte importante en théorie des nœuds :

**▣ Problème I.87 (cf. p.55) – Est-ce que le polynôme de JONES détecte le nœud trivial ?**

Répondre à cette question directement est extrêmement difficile, elle est même équivalente à d'autres problèmes eux aussi ouverts depuis quelque temps. Et même si le cas des entrelacs ayant au moins deux composantes est désormais clarifié grâce aux travaux de ELIAHOU, KAUFFMAN et THISTLETHWAITE [EKT03], le problème I.87 (cf. p.55) reste complètement ouvert.

Afin d'espérer pouvoir y répondre, il faut d'abord mieux la comprendre, en l'étudiant sous différents angles. C'est ce qui a été fait entre autres par BIGELOW [Big02], qui répertorie les différents liens entre le problème I.87 (cf. p.55) et d'autres problèmes connus. Une façon de faire non décrite dans cet article, et que nous allons développer principalement dans ce chapitre, est de projeter les coefficients du polynôme, qui sont entiers, dans un groupe de classes de congruence.

### 3.1 Description de la version modulaire du polynôme de JONES

Cette vision du problème de la détection ou non du nœud trivial par le polynôme de JONES étant nouvelle, rien ou presque n'est connu. Il convient alors de dédier une section entière à la définition de nouveaux termes ainsi qu'aux objectifs et possibles conséquences que peut apporter cette approche.

#### 3.1.1 Premières remarques

Commençons par définir proprement de nouveaux termes qui seront utilisés abondamment dans ce chapitre et également par la suite.

##### **Définition II.1 – Polynôme de JONES modulaire.**

Pour  $m \geq 2$  un entier, le *polynôme de JONES modulaire* de rang  $m$  est défini comme la projection du polynôme de JONES dans l'anneau  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} [\sqrt{t}, \sqrt{t^{-1}}]$ . Dans le cas des nœuds, l'anneau peut être remplacé par  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} [t, t^{-1}]$ .

Afin d'alléger le langage pour désigner les solutions du problème II.12, nous introduisons la notion de *nœud  $m$ -trivial*.

##### **Définition II.2 – Nœud $m$ -trivial.**

Pour  $m \geq 2$  un entier, un *nœud  $m$ -trivial*  $K$  est un nœud non trivial ayant un polynôme de JONES modulaire de rang  $m$  trivial. Autrement dit :

$$K \neq \bigcirc \quad \text{et} \quad V_K \equiv 1 \pmod{m}.$$

**▲ Attention II.3.** Il est possible de donner une définition similaire pour d'autres invariants polynomiaux. Dans ce mémoire, toute allusion aux nœuds  $m$ -triviaux sera en rapport avec le polynôme de JONES, sauf mention explicite contraire.

*Remarques II.4.*

1. La définition II.1 et la définition II.2 peuvent être adaptées au polynôme HOMFLY directement. Nous pouvons aussi les adapter, de manière moins naturelle cependant, au crochet de KAUFFMAN.
2. Concernant le polynôme d'ALEXANDER, vu que les termes de plus haut et de plus bas degré sont forcément de coefficient  $\pm 1$ , les nœuds  $m$ -triviaux de son point de vue correspondent exactement aux nœuds non triviaux ayant un polynôme d'ALEXANDER égal à 1. De ce fait, il est amusant de constater que pour un  $m$  fixé, un nœud  $m$ -trivial pour le polynôme d'ALEXANDER est en fait  $m'$ -trivial pour tout  $m' \geq 2$ .

Nous pouvons à présent énoncer une première proposition :

**Proposition II.5.** *Pour  $p$  un nombre premier, s'il existe un nœud  $p$ -trivial, alors il existe un nœud  $p$ -trivial premier.*

*Démonstration :*

Supposons qu'il existe un nœud  $p$ -trivial non premier  $K$ , celui-ci peut alors s'écrire sous la forme  $K = K_1 \# K_2$  où  $K_1$  et  $K_2$  ne sont pas triviaux et  $K_1$  est premier. Comme  $K$  est  $p$ -trivial, son polynôme de JONES modulaire de rang  $p$  est 1, en particulier on a  $V_{K_1} V_{K_2} \equiv 1 \pmod{p}$ . Comme  $p$  est premier, l'anneau  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} [t, t^{-1}]$  est intègre, on en déduit que  $V_{K_1}$  et  $V_{K_2}$  sont constants dans cet anneau. Par le théorème I.89, nous savons que le polynôme de JONES d'un nœud évalué en 1 donne 1. Par conséquent, on a  $V_{K_1} \equiv V_{K_2} \equiv 1 \pmod{p}$ . En particulier  $K_1$  est le nœud  $p$ -trivial premier recherché.  $\square$

Bien que le crochet de KAUFFMAN ne soit pas un invariant de l'isotopie ambiante, nous pouvons tout de même définir la notion de crochet de KAUFFMAN modulaire.

**Définition II.6 – Crochet de KAUFFMAN modulaire.**

Soit  $m \geq 2$  un entier, le *crochet de KAUFFMAN modulaire* de rang  $m$  est défini comme la projection du crochet de KAUFFMAN dans l'anneau  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$ .

Nous pouvons évidemment déduire des liens entre le crochet de KAUFFMAN modulaire et le polynôme de JONES modulaire.

**Proposition II.7.** *Pour  $m \geq 2$  un entier et  $D$  un diagramme d'un nœud non trivial avec un entortillement nul, si son crochet de KAUFFMAN modulaire de rang  $m$  est trivial alors le nœud représenté par  $D$  est  $m$ -trivial.*

*Démonstration :*

Par hypothèse, on a  $\langle D \rangle = 1 + mP$  avec  $P$  un polynôme de reste à coefficients entiers. Comme l'entortillement de  $D$  est nul, on obtient alors que :

$$V_D(t) = \left( (-\tau^{-3})^{\text{wr}(D)} \langle D \rangle \right) \left( t^{-\frac{1}{4}} \right) = 1 + mP \left( t^{-\frac{1}{4}} \right)$$

On conclut que le nœud représenté par  $D$  est  $m$ -trivial.  $\square$

**3.1.2 Liens entre la version modulaire et classique**

La projection des coefficients du polynôme de JONES dans un groupe fini modulaire, ou dit plus simplement en les réduisant modulo  $m$ , permet de choisir une partie de l'information que renferme ce polynôme. Outre le fait que les coefficients se retrouvent strictement bornés par  $m$ , certains monômes peuvent parfois disparaître. Cette perte d'informations, contrôlée néanmoins, nous donne accès à un polynôme plus « faible », et potentiellement plus accessible à manipuler.

La problématique de détection du nœud trivial par le polynôme de JONES, et surtout l'aspect de la preuve requise pour montrer ou infirmer cette assertion, change de manière intéressante avec le point de vue modulaire. Pour répondre au problème originel, nous avons le choix entre :

- prouver que tous les nœuds ayant un polynôme de JONES égale à 1 sont bien triviaux, ce qui démontre l'assertion.
- montrer qu'il existe un nœud non trivial ayant un polynôme de JONES trivial, ce qui infirme l'assertion,

Les deux options, étant contradictoires, présentent des méthodes d'études très différentes et difficilement communicantes. Dans la version modulaire, la réponse à la question dépend surtout de l'existence de nœuds  $m$ -triviaux. En effet, nous avons la proposition évidente suivante :

**Proposition II.8.** *Supposons qu'il existe un nœud  $m$ -trivial pour un certain  $m$  donné, alors le polynôme de JONES modulaire de rang  $m$  ne détecte pas le nœud trivial.*

*Démonstration :*

Découle directement de la définition II.2.  $\square$

Ce constat immédiat amène à réfléchir à ce qu'impliquerait l'absence de nœuds  $m$ -triviaux.

**Proposition II.9.** *Supposons qu'il existe un entier  $m_0$  pour lequel le polynôme de JONES modulaire de rang  $m_0$  détecte le nœud trivial, ou de manière équivalence qu'il n'existe pas de nœuds  $m_0$ -triviaux. Alors le polynôme de JONES détecte le nœud trivial.*

*Démonstration :*

Soit  $K$  un nœud quelconque, si  $m_0$  existe tel que décrit dans l'énoncé, alors  $K$  ne peut être  $m_0$ -trivial. Son polynôme de JONES vaut alors 1 si  $K$  est le nœud trivial, et un polynôme  $V_K \not\equiv 1 \pmod{m_0}$  dans le cas contraire.  $V_K$  dispose donc d'un coefficient non nul, non divisible par  $m_0$  en dehors du terme constant, et par conséquent  $V_K \neq 1$ . Ainsi on montre que le polynôme de JONES détecte le nœud trivial.  $\square$

La proposition II.9 nous assure qu'une partie de l'information du polynôme de JONES serait suffisante pour montrer que celui-ci détecte le nœud trivial. En termes de complexité théorique rien n'a changé, il faut encore vérifier tous les nœuds, mais d'un point de vue pratique les polynômes étudiés sont moins grands, et les calculs en environnement modulaire sont beaucoup plus simples. Tout cela rend la recherche via l'aide de l'ordinateur extrêmement intéressante.

Dans le cas où nous voulons plutôt montrer que le polynôme de JONES ne détecte pas le nœud trivial, il faudra alors, comme dans le problème originel, trouver un contre-exemple. Ce contre-exemple devra vérifier la même chose qu'auparavant, c'est-à-dire ne pas être trivial mais être vu comme tel par le polynôme de JONES. On peut cependant le décrire différemment avec la version modulaire.

**Proposition II.10.** *Supposons qu'il existe un nœud  $K$  tel que pour tout  $m \geq 2$  le nœud  $K$  est  $m$ -trivial, alors le polynôme de JONES ne détecte pas le nœud trivial.*

*Démonstration :*

Soit  $K$  un nœud tel que décrit dans l'énoncé, en particulier  $K$  n'est pas trivial par définition. Le polynôme de JONES  $V_K$  de  $K$  vérifie alors :

$$\forall m \geq 2, V_K \equiv 1 \pmod{m}$$

Or le seul entier qui est un multiple de tous les autres est 0, donc  $V_K = 1$ . Ainsi  $K$  est un contre-exemple à la détection du nœud trivial par le polynôme de JONES.  $\square$

Si au premier abord la recherche d'un tel nœud suivant cette reformulation ne semble pas être pertinente, en réalité il s'agirait plutôt de construire un nœud vérifiant cette propriété, en combinant différents nœuds  $m$ -triviaux.

Dans l'hypothèse où le polynôme de JONES ne détecte pas le nœud trivial, une question annexe serait de déterminer le nombre minimal de croisements nécessaire à la construction du contre-exemple. Dans l'exemple du polynôme d'ALEXANDER, nous savons très bien aujourd'hui qu'il ne détecte pas le nœud trivial, mais nous savons aussi qu'il n'échoue qu'à partir de 11 croisements. Des travaux récents de TUZUN et SIKORA [TS21] ont montré que le polynôme de JONES détecte bien le nœud trivial jusqu'à 24 croisements, et la vérification de cette conjecture peut également se faire avec le point de vue modulaire.

**Proposition II.11.** *Pour  $m \geq 2$  un entier, supposons que le plus petit, en termes du nombre de croisements, nœud  $m$ -trivial nécessite  $n_m$  croisements. Alors le polynôme de JONES distingue le nœud trivial des autres nœuds jusqu'à  $n_m - 1$  croisements.*

*Démonstration :*

Notons ce nœud minimal  $K_m$  pour un  $m$  donné, alors tout nœud ayant strictement moins de croisements que  $K_m$  ne peut être  $m$ -trivial, et par un raisonnement analogue à la proposition II.9 on en déduit alors le résultat attendu.  $\square$

Nous l'avons vu, la recherche de nœuds  $m$ -triviaux est essentielle. Chaque exemple trouvé donne des informations sur la détection ou non du nœud trivial par le polynôme de JONES, et il reste à en accumuler suffisamment et à les recouper pour peut-être décider d'une réponse.

### 3.1.3 Origine de la version modulaire

La première apparition du polynôme de JONES modulaire se trouve dans l'article de ELIAHOU et FROMENTIN [EF17]. Cet article introduit le problème II.12 :

**■ Problème II.12 – Étant donné un entier  $m \geq 2$ , existe-t-il un nœud non trivial  $K$  pour lequel le polynôme de JONES satisfait  $V_K \equiv 1 \pmod{m}$ ?**

Nous avons vu en section 3.1 l'importance de cette question, ainsi que le terme *nœud  $m$ -trivial* qui correspond aux solutions de celle-ci. D'ailleurs, l'article ne se contente pas de seulement poser cette question, il amène également des premiers éléments de réponses, en donnant une méthode pour

construire des nœuds  $2^r$ -triviaux. Comme il s'agit du point de départ de cette thèse, cette section va résumer brièvement leur approche et citer leurs <sup>1</sup> résultats et remarques. Bien sûr le lecteur est fortement encouragé à consulter l'article d'origine pour plus de précisions ainsi que pour saisir le ressenti des auteurs sur leur travail.

La première remarque de l'article affirme qu'un nœud  $m$ -trivial ne peut pas être alternant. Un résultat énoncé par THISTLETHWAITE empêche en effet une telle combinaison de propriétés :

---

**Théorème II.13 – Forme du polynôme de JONES d'un entrelacs alternant.**

---

Si un entrelacs  $L$  admet un diagramme lié alterné, irréductible à  $m$  croisements, alors :

- (i) la différence entre le plus haut et le plus bas degré de  $V_L$  est exactement  $m$ ;
- (ii) les coefficients correspondants aux termes de degré maximal et minimal valent  $\pm 1$ .

THISTLETHWAITE (1987) – [Thi87, Theorem 1 p. 299]

---

Ainsi d'après le théorème II.13, un nœud alternant  $K$  non trivial verra son polynôme de JONES composé d'autant de monômes que de croisements ; mais surtout nous savons qu'au moins deux d'entre eux ont pour coefficient  $\pm 1$ . Ainsi, même si l'un de ses deux coefficients est le terme constant, le PGCD des coefficients des monômes de degré différent de 0 sera obligatoirement 1. Il est donc impossible qu'un nœud alternant soit  $m$ -trivial, et ceci quel que soit  $m$ .

Cette observation faite, nous en déduisons qu'une solution au problème II.12 nécessite au moins 8 croisements, nécessaires à l'occurrence des premiers nœuds non alternants. Une recherche <sup>2</sup> effectuée grâce au logiciel *Mathematica* [Wol+17] montre l'existence de solutions pour  $m = 2$  à partir de 12 croisements, d'une solution pour  $m = 3$  à 12 croisements puis d'autres à partir de 14, et enfin une solution pour  $m = 4$  à 15 croisements. Aussi, aucune solution pour  $m = 5$  n'est présente jusqu'à 16 croisements.

Le résultat principal de ELIAHOU et FROMENTIN consiste en la construction d'une famille de nœuds  $2^r$ -triviaux. La construction suit une sorte de récurrence, le nœud  $2^r$ -trivial étant construit à partir du nœud  $2^{r-1}$ -trivial précédent. Le tout dépend surtout d'un enchevêtrement particulier, identifié  $T_{8,21}$  car celui-ci représente le nœud  $8_{21}^n$  suivant la numérotation de la table de ROLFSEN [Rol03].

Le crochet de KAUFFMAN non clos <sup>3</sup> de l'enchevêtrement  $T_{8,21}$  présente déjà beaucoup de coefficients pairs, et après quelques modifications on obtient l'enchevêtrement noté  $T_{20}$  où un unique coefficient est impair pour l'intégralité du crochet. C'est la duplication de cet enchevêtrement qui permet de concevoir les différents nœuds  $2^r$ -triviaux, vus comme tels d'abord par le crochet de KAUFFMAN non clos, puis par le polynôme de JONES après clôture de manière à obtenir un nœud.

---

**Théorème II.14 – Construction de nœuds  $2^r$ -triviaux.**

---

Pour tout  $r \geq 1$ , il existe une infinité de nœuds  $2^r$ -triviaux premiers distincts deux à deux.

ELIAHOU et FROMENTIN (2017) – [EF17, Theorem 5.3 p. 1750091-11]

---

Il est important de préciser que les nœuds obtenus dans [EF17] sont premiers, ce qui peut ne pas être le cas pour d'autres constructions. De plus, l'enchevêtrement  $T_{20}$  présente une particularité au niveau des coefficients de son crochet de KAUFFMAN non clos, et la construction utilise et même dépend de cette particularité. Les auteurs posent la question à la fin de leur article de l'existence d'un enchevêtrement ayant cette même particularité pour d'autres modules, ce qui permettrait peut-être de l'exploiter d'une façon analogue. Cependant pour obtenir un tel enchevêtrement, il faut pour cela contrôler les coefficients

---

1. L'auteur insiste sur le fait qu'il s'agit bien du travail de ELIAHOU et FROMENTIN, aucun résultat ou fait énoncés dans cette section ne provient de son travail personnel.

2. Les résultats ont été initialement représentés dans un tableau détaillé, le lecteur est invité à consulter [EF17] pour plus de détails, notamment sur le nombre exact de solutions.

3. Nous verrons cela en définition II.42.

apparaissant dans le crochet de KAUFFMAN non clos, ce qui n'est malheureusement pas encore à notre portée actuellement.

## 3.2 Assemblage de nœuds $m$ -triviaux

La recherche de nœuds  $m$ -triviaux est essentielle, elle a occupé une grande partie de mon travail, mais elle est aussi surprenamment difficile. Notre ignorance de l'interprétation géométrique des coefficients et puissances du polynôme de JONES, ou du crochet de KAUFFMAN, au sein d'un diagramme en est certainement la principale raison.

Nous avons abordé cette difficulté concernant une généralisation ou une adaptation de la méthode de ELIAHOU et FROMENTIN à d'autres modules dans la section précédente. Conscient de cela, l'auteur a d'abord développé un script qui cherche de tels nœuds en testant la clôture de tresses choisies aléatoirement, ce travail sera discuté plus longuement en sous-section 3.2.3. Une fois ce script fonctionnel, la recherche d'une généralisation de la construction présentée auparavant ou l'élaboration d'autres assemblages de nœuds  $m$ -triviaux a commencé. Nous présentons celles qui se sont révélées pertinentes dans cette section.

### 3.2.1 Construction de nœuds $m^r$ -triviaux

Une façon d'assembler des nœuds bien connue est de considérer leur recollement. De plus cette opération se comporte très bien avec le polynôme de JONES, comme nous l'avons vue avec le théorème I.91, puisqu'il s'agit du produit des polynômes de JONES de chaque nœud recollé. Au cours de différents tests, il s'est avéré que le recollement d'un nœud 2-trivial avec lui-même résulte en un nœud 4-trivial. En investiguant un peu plus, nous remarquons que cela est dû à l'identité remarquable  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . En effet, lors du recollement d'un nœud 2-trivial  $K$  avec lui-même, on obtient ce calcul :

$$V_{K \# K} = (V_K)^2 = (1 + 2P)^2 = 1 + 4P + 4P^2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad P \text{ étant un polynôme non nul.}$$

L'auteur a essayé d'obtenir un nœud 9-trivial avec un nœud 3-trivial ; puis de manière plus générale, a fait le lien avec le binôme de NEWTON. Ainsi pour  $K$  un nœud  $m$ -trivial :

$$V_{\#(K,m)} = (V_K)^m = (1 + mP)^m = \sum_{i=0}^m \left[ \binom{m}{i} (mP)^i \right] = 1 + \underbrace{\binom{m}{1}}_{=m} mP + m^2 P^2 \equiv 1 \pmod{m^2}$$

où  $P$  et  $P'$  sont des polynômes non nuls, et où  $\#(K, m)$  représente le résultat du recollement de  $m$  copies de  $K$ . Une chose importante à remarquer dans ce calcul est que le second coefficient binomial apporte la puissance de  $m$  manquante, ainsi tous les coefficients du résultat sont divisibles par  $m^2$ , excepté le terme constant qui reste égal à 1. Nous pouvons ainsi, à partir d'un nœud  $m$ -trivial, en construire un  $m^2$ -trivial en le recollant  $m$  fois avec lui-même. En remplaçant  $m$  par  $m^2$ , on construit de la même façon des nœuds  $m^4$ -triviaux, puis  $m^{2^r}$ -triviaux pour  $r$  un entier.

Nous pouvons encore raffiner notre observation, en effet pour  $K$  toujours un nœud  $m$ -trivial, nous savons que  $\#(K, m)$  est  $m^2$ -trivial, puis y recoller  $m^2$  nouvelles copies de  $K$  donne un nœud  $m^4$ -trivial, équivalent à  $\#(K, m^3)$ . Que peut-on alors dire de  $\#(K, m^2)$  ? Nous pouvons y répondre suivant deux approches différentes suivant si l'on scinde les recollements en deux temps ou non. De manière directe, on a :

$$V_{\#(K,m^2)} = (1 + mP)^{m^2} = \sum_{i=0}^{m^2} \left[ \binom{m^2}{i} (mP)^i \right]$$

$$= 1 + \underbrace{\binom{m^2}{1}}_{=m^2} mP + \underbrace{\binom{m^2}{2}}_{\text{divisible par } m} m^2 P^2 + m^3 P' \equiv 1 \pmod{m^3}$$

où  $P$  et  $P'$  sont des polynômes non nuls. Cette fois, deux coefficients binomiaux apportent les puissances de  $m$  manquantes, ce qui complexifie la preuve. Maintenant, au lieu de considérer directement  $\#(K, m^2)$ , faisons-le en deux temps. Le nœud  $\#(K, m^2)$  peut s'écrire comme le recollement de  $m$  copies de  $\#(K, m)$ , on écrit alors :

$$\begin{aligned} V_{\#(K, m^2)} &= (V_{\#(K, m)})^m = (1 + m^2 P)^m = \sum_{i=0}^m \left[ \binom{m}{i} (m^2 P)^i \right] \\ &= 1 + \underbrace{\binom{m}{1}}_{=m} m^2 P + m^3 P' \equiv 1 \pmod{m^3} \end{aligned}$$

où  $P$  et  $P'$  sont toujours des polynômes non nuls. Cette dernière approche ne fait intervenir qu'un coefficient binomial, et amorce une récurrence. On en déduit le lemme suivant :

**Lemme II.15.** *Pour  $m \geq 2$  et  $r \geq 0$  deux entiers et  $K$  un nœud  $m$ -trivial, le nœud  $\#(K, m^r)$  est  $m^{r+1}$ -trivial.*

*Démonstration :*

Procédons par récurrence sur l'entier  $r$ . Pour  $r = 0$ , le nœud  $\#(K, m^r)$  correspond au recollement de  $m^0 = 1$  copie de  $K$ , il s'agit donc de  $K$ , et par hypothèse  $K$  est bien  $m$ -trivial. Supposons maintenant  $r > 0$  et supposons que le nœud  $\#(K, m^{r-1})$  soit  $m^r$ -trivial. Le nœud  $\#(K, m^r)$  est obtenu en recollant  $m$  copies de  $\#(K, m^{r-1})$ , on en déduit que son polynôme de JONES est de la forme :

$$\begin{aligned} V_{\#(K, m^r)} &= V_{\#(\#(K, m^{r-1}), m)} = (V_{\#(K, m^{r-1})})^m \\ &= (1 + m^r P)^m \quad \text{où } P \text{ est un polynôme non nul} \\ &= \sum_{i=0}^m \left[ \binom{m}{i} (m^r P)^i \right] \\ &= 1 + \underbrace{\binom{m}{1}}_{=m} m^r P + m^{r+1} R_1 \quad \text{où } R_1 \text{ est un polynôme de reste non nul} \\ &= 1 + m^{r+1} R_2 \quad \text{où } R_2 \text{ est un polynôme de reste non nul} \end{aligned}$$

Autrement dit,  $\#(K, m^r)$  est un nœud  $m^{r+1}$ -trivial. Le lemme est ainsi démontré par récurrence.  $\square$

On obtient alors immédiatement le théorème suivant :

**Théorème II.16 – Construction de nœuds  $m^r$ -triviaux.**

S'il existe un nœud  $m$ -trivial pour un certain  $m \geq 2$ , alors quel que soit  $r \geq 1$  il existe une infinité de nœuds deux à deux distincts non premiers  $m^r$ -triviaux.

PAGEL (2020) – [Pag20, Theorem 3 p. 904]

*Démonstration :*

Il suffit d'appliquer le lemme II.15 pour tout  $r \geq 1$ . Les nœuds obtenus sont de toute évidence non premiers par construction. De plus, pour  $r_1, r_2 \geq 1$  deux entiers, les nœuds  $K_1$  et  $K_2$  obtenus par cette construction sont différents si  $r_1 \neq r_2$ , ceci nous est assuré par leur polynôme de JONES. Finalement, on remarque qu'un nœud  $m^r$ -trivial est en particulier  $m^{r-1}$ -trivial, d'où l'infinité de nœuds  $m^r$ -triviaux pour  $r$  fixé.  $\square$

*Remarques II.17.*

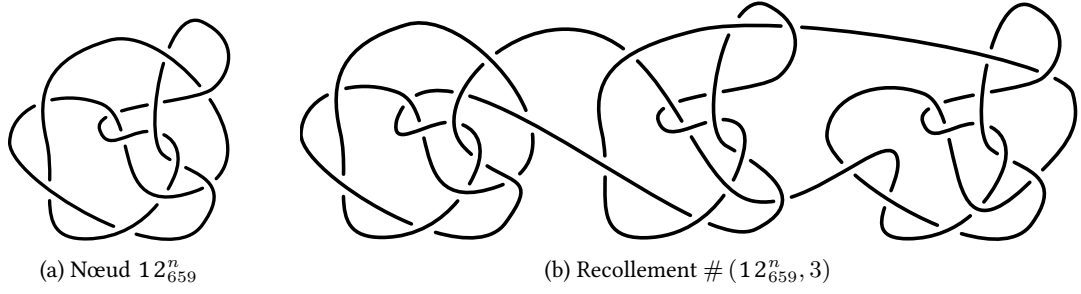


FIGURE 3.1 – Le nœud  $12^n_{659}$  est 3-trivial et premier avec 12 croisements [LCM04, knot 12n659]. Son polynôme de JONES est donné par  $V_{12^n_{659}}(t) = 1 - 3t + 6t^2 - 9t^3 + 12t^4 - 12t^5 + 12t^6 - 9t^7 + 6t^8 - 3t^9$ . Lorsqu'il est recollé en trois exemplaires, on obtient un nœud 9-trivial, avec un polynôme de JONES de la forme  $-27t^{27} + 162t^{26} - 567t^{25} + \dots - 41310t^{15} + 40257t^{14} + \dots + 45t^2 - 9t + 1$ .

1. Dans l'article [Pag20], la démonstration présentée est beaucoup plus longue et utilise des propriétés d'arithmétique. Celle donnée ici a été découverte lors de la rédaction du mémoire de thèse. Bien qu'elle soit plus simple, les deux preuves sont valables, relativement proches en termes d'idées générales, et permettent d'aborder la démonstration du théorème II.16 de deux manières différentes.
2. Dans l'article [Pag20] toujours, l'auteur évoque la possible généralisation d'un point de vue algébrique du lemme II.15. En effet, en faisant abstraction du contexte de la théorie des nœuds, on montre pour  $P$  un polynôme de la forme  $P = 1 + nQ$  où  $n \geq 2$  que :

$$\forall k \geq 1, \quad P^{n^k} \equiv 1 \pmod{n^{k+1}}$$

Si on se place maintenant sur un anneau quelconque, un élément  $A = I + nB$  de cet anneau, où  $I$  désigne l'élément neutre, vérifie également :

$$\forall k \geq 1, \quad A^{n^k} \equiv I \pmod{n^{k+1}}$$

Cela est dû au binôme de NEWTON, qui est applicable grâce à la commutativité de l'élément neutre  $I$  avec  $B$ .

Comme nous connaissons des exemples de nœuds 2-triviaux et 3-triviaux, nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire II.18.** *Pour tout  $r \geq 1$ , il existe des nœuds  $2^r$ -triviaux et  $3^r$ -triviaux non premiers.*

*Remarque II.19.* Bien que le théorème II.16 ressemble à une généralisation du théorème II.14, il s'agit pourtant de deux théorèmes bien distincts. La grande différence entre les deux réside surtout dans la méthode de constructions des nœuds  $m$ -triviaux ; l'un ne nécessitant que l'existence d'un nœud  $m$ -trivial pour en construire d'autres  $m^r$ -triviaux non premiers, tandis que l'autre a besoin, dans l'idée, d'un enchevêtrement spécifique pour construire des nœuds  $m^r$ -triviaux premiers.

Nous avons un exemple de nœud 9 trivial en figure 3.1. Nous pouvons essayer d'exploiter encore cette méthode pour obtenir d'autres combinaisons intéressantes, afin de construire un nœud  $m_1 m_2$ -trivial avec  $m_1 \neq m_2$  par exemple. Cependant ces combinaisons ne se comportent pas comme une multiplication des modules, mais plutôt comme une intersection des diviseurs de ceux-ci.

**Proposition II.20.** *Pour  $K_1$  et  $K_2$  deux nœuds respectivement  $m_1$ -trivial et  $m_2$ -trivial, où  $m_1$  et  $m_2$  sont supérieurs ou égaux à 2, on a :*

$$V_{K_1 \# K_2} \equiv 1 \pmod{\text{pgcd}(m_1, m_2)}.$$

*Démonstration :*

On développe simplement le calcul. On notera  $Q_1$  et  $Q_2$  des polynômes non nuls :

$$\begin{aligned} V_{K_1 \# K_2} &= V_{K_1} V_{K_2} \quad \text{par le théorème I.91} \\ &= (1 + m_1 Q_1) (1 + m_2 Q_2) \\ &= 1 + m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + m_1 m_2 Q_1 Q_2 \end{aligned}$$

Écrit sous cette forme, le résultat attendu est évident.  $\square$

Cette dernière proposition pose les limites de cette méthode pour construire de nouveaux nœuds  $m$ -triviaux à partir de nœuds déjà connus. Ainsi, pour obtenir d'autres exemples pour d'autres modules, comme  $m = 5$  ou  $m = 6$ , il nous faut trouver un autre moyen.

### 3.2.2 Tentative par substitution dans un modèle

Une autre idée de construction, dérivée de celle de ELIAHOU et FROMENTIN, est de substituer les croisements d'un nœud par un enchevêtrement particulier. Ce procédé permet ainsi de changer les coefficients définis pour le crochet de KAUFFMAN lors de la séparation d'un croisement.

#### **Définition II.21 – Substitution dans un modèle.**

Pour  $D$  un diagramme d'entrelacs et  $T$  un 2-enchevêtrement, on dit que  $T$  se substitue dans le modèle  $D$  lorsque les croisements de  $D$  sont remplacés par  $T$ . Afin que le remplacement soit cohérent, les extrémités NO et SE de  $T$  sont placées là où se trouve le brin passant au-dessus du croisement, quitte à pivoter  $T$ .

*Remarque II.22.* Malgré la condition donnée dans la définition II.21, il reste toujours deux façons différentes de remplacer chaque croisement par une copie de  $T$ .

Pour que le remplacement soit entièrement uniforme, il nous faut ajouter des conditions.

#### **Définition II.23 – 2-enchevêtrement croisé.**

Pour  $T$  un 2-enchevêtrement, on dit que  $T$  est croisé si les extrémités NO et SE sont reliés par un brin et les extrémités NE et SO par l'autre brin composant  $T$ .

On peut à présent définir une substitution uniforme.

#### **Définition II.24 – Substitution uniforme dans un modèle.**

Pour  $D$  un diagramme d'entrelacs orienté et  $T$  un 2-enchevêtrement croisé, on dit que  $T$  se substitue uniformément dans le modèle  $D$  lorsque les croisements de  $D$  sont remplacés par  $T$  de la façon suivante, quitte à pivoter  $T$  :

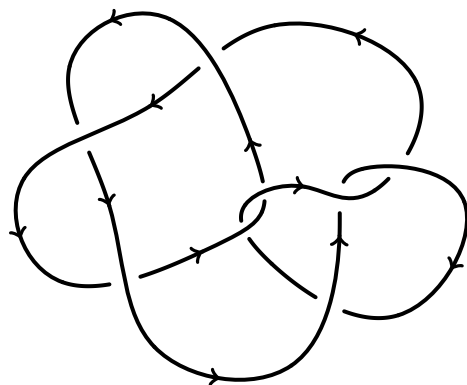
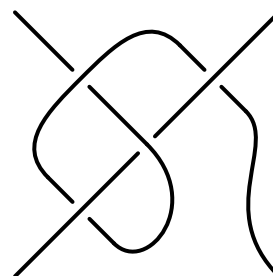
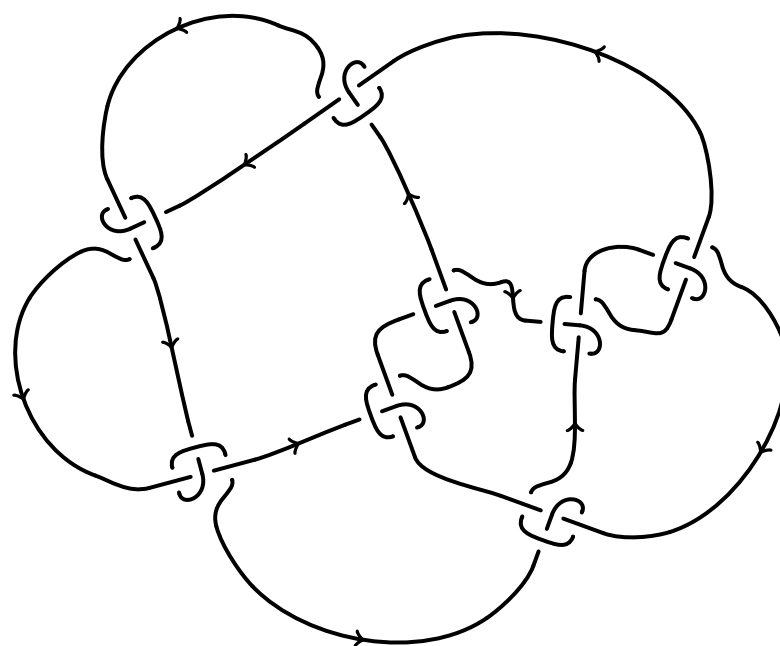
- (i) les extrémités NO et SE de  $T$  sont placées là où se trouve le brin passant au-dessus du croisement,
- (ii) suivant l'orientation de  $D$ , l'extrémité NO est entrante et celle SE est sortante.

Remarquons que le nombre de composantes de  $D$  est conservé si  $T$  est croisé et qu'il n'en apporte pas d'autres. Nous pouvons observer cela en figure 3.2.

**Proposition II.25.** Pour  $D$  un diagramme d'entrelacs orienté à  $n$  composantes et  $T$  un 2-enchevêtrement croisé contenant  $m$  composantes internes, la substitution uniforme  $D_T$  de  $T$  dans le modèle  $D$  est composée de  $n + km$  composantes, où  $k$  est le nombre de croisements de  $D$ .

*Démonstration :*

Si  $T$  est croisé, les extrémités NO, NE, SE et SO sont reliées comme le ferait un simple croisement. Ainsi remplacer un croisement de  $D$  par  $T$  ne change pas les connexions faites par ce croisement, et donc cela n'altère pas le nombre de composantes inhérentes à  $D$ . Cela reste le cas si l'on remplace tous les

(a) Diagramme du nœud  $8_{19}^2$  orienté(b) Enchevêtrement croisé  $T$ 

(c) Résultat de la substitution

FIGURE 3.2 – Nous voyons ici une substitution uniforme de  $T$  dans le modèle donné en figure 3.2a. Comme  $T$  est croisé, le résultat est aussi un nœud.

croisements de  $D$  par  $T$  pour obtenir  $D_T$ . Comme en plus  $T$  apporte  $m$  composantes supplémentaires à chaque remplacement, on conclut que  $D_T$  est composé de  $n + km$  composantes différentes.  $\square$

On peut également calculer l'entortillement d'une substitution à partir de celle du modèle et du 2-enchevêtrement.

**Proposition II.26.** *Pour  $D$  un diagramme d'entrelacs orienté et  $T$  un 2-enchevêtrement croisé ne contenant pas de composantes internes, alors l'entortillement de la substitution uniforme  $D_T$  de  $T$  dans  $D$  s'exprime comme :*

$$\text{wr}(D_T) = \omega_c \text{wr}(D) + c(D) (\omega_{b_1} + \omega_{b_2})$$

où  $c(D)$  est le nombre de croisements de  $D$  et pour  $b_1$  le brin orienté de  $T$  allant du NO au SE et  $b_2$  celui allant du SO au NE :

- la quantité  $\omega_{b_1}$  correspond à la somme des signes des croisements impliquant uniquement  $b_1$ ,
- idem pour  $\omega_{b_2}$  avec le brin  $b_2$ ,
- finalement  $\omega_c$  est la somme des signes des croisements impliquant  $b_1$  et  $b_2$ .

*Démonstration :*

Un croisement de  $T$  ne peut être orienté que de quatre façons différentes. De plus pour une orientation  $O$  donnée, le renversement de  $O$  sur les deux brins composant ce croisement ne change pas son signe. Par contre pour  $O'$  une orientation ne renversant qu'un brin de  $O$ , le signe du croisement est inversé.

Comme  $T$  n'est justement composé que de deux brins  $b_1$  et  $b_2$ , chaque croisement de  $T$  implique soit uniquement  $b_1$ , soit uniquement  $b_2$ , soit  $b_1$  et  $b_2$ . Pour  $O$  l'orientation telle que  $b_1$  aille de NO en SE et  $b_2$  de SO en NE, nous avons les quantités  $\omega_{b_1}$ ,  $\omega_{b_2}$  et  $\omega_c$  définies dans l'énoncé qui correspondent à la somme des signes de ces différents types de croisements. Par le raisonnement précédent, on remarque que si on reverse l'orientation de  $b_2$ , alors  $\omega_{b_1}$  est inchangé car n'impliquant que  $b_1$ ;  $\omega_{b_2}$  est également inchangé, puisque les croisements n'impliquant que  $b_2$  voient leur orientation complètement renversée; tandis  $\omega_c$  est multiplié d'un facteur  $-1$  puisque seul l'un des brins des croisements concernés change d'orientation.

Maintenant chaque copie de  $T$  remplace un croisement de façon à ce que les extrémités NO et SE soient placés là où se trouvait le brin passant au-dessus, de sorte que celle au NO soit entrante. Ainsi, si l'orientation locale est telle que l'extrémité so soit entrante, alors par hypothèse  $\text{wr}(T) = \omega_{b_1} + \omega_{b_2} + \omega_c$  et le croisement initialement présent était positif. Si l'extrémité so est sortante localement, on a  $\text{wr}(T) = \omega_{b_1} + \omega_{b_2} - \omega_c$  et le croisement initialement présent était négatif. Avec ce raisonnement, on remarque que le signe du croisement qui a été remplacé influe seulement sur le signe de  $\omega_c$  de  $\text{wr}(T)$ .

Il nous reste à regarder l'entortillement de  $D_T$ , défini comme la somme des signes de tous les croisements suivant une orientation donnée. Nous pouvons alors regrouper les croisements correspondant à une même copie de  $T$ , ce qui nous exprime alors  $\text{wr}(D_T)$  comme la somme des entortillements de chaque copie de  $T$ . Par le raisonnement précédent, on conclut donc que  $\text{wr}(D_T) = \omega_c \text{wr}(D) + c(D) (\omega_{b_1} + \omega_{b_2})$ .  $\square$

L'avantage de la substitution uniforme est aussi de pouvoir garder le caractère premier d'un nœud.

**Proposition II.27.** *Soient  $D$  un diagramme de nœud premier réduit orienté et  $T$  un 2-enchevêtrement croisé ne contenant pas de composante interne tel que tout cercle intersectant le diagramme de  $T$  exactement deux fois ne peut pas border de croisements. Alors la substitution uniforme  $D_T$  de  $T$  dans  $D$  représente également un nœud premier.*

*Démonstration :*

Comme  $D$  est premier, le nœud  $K$  qu'il représente ne peut être décomposé en  $K_1 \# K_2$  avec  $K_1$  et  $K_2$  des nœuds non triviaux. En particulier, cela implique que  $D$  ne peut être séparé en deux diagrammes, représentant chacun des nœuds non triviaux après identification de leurs extrémités, par un cercle ayant exactement deux points d'intersection avec  $D$ . De plus  $D$  est réduit, comme  $D$  ne peut alors pas contenir de croisements ayant deux de leurs extrémités directement reliées, on en déduit que tout

cercle intersectant  $D$  exactement deux fois ne peut pas border de croisements. Ainsi, la primalité de la substitution  $D_T$  dépend à présent de celle des copies de  $T$ . Or par hypothèse, tout cercle intersectant  $T$  exactement deux fois ne peut pas border de croisements, avec le raisonnement précédent nous avons donc que le diagramme  $D_T$  ne peut border une partie de ses croisements dans un cercle l'intersectant exactement deux fois. Il est donc impossible qu'il existe  $K_1$  et  $K_2$  des nœuds non triviaux tels que  $K_1 \# K_2$  soit le nœud représenté par  $D_T$ , ainsi on en déduit que  $D_T$  représente un nœud premier.  $\square$

Nous aurons pour la suite besoin de calculer le crochet de KAUFFMAN d'un enchevêtrement, qui n'est pas un diagramme de nœud clos. Ceci sera développé en section 4.1, on y introduit notamment la notation  $\langle \cdot \rangle$  pour ce crochet particulier afin de le différencier de celui défini par KAUFFMAN. Pour résumer ce qui est important de savoir ici, calculer le crochet de KAUFFMAN non clos d'un 2-enchevêtrement ne résulte pas en un polynôme, mais en une somme de deux polynômes indexés aux symboles  $\smile$  et  $\frown$ ; la méthode reste cependant quasiment la même.

**Proposition II.28.** *Pour  $D$  un diagramme d'entrelacs et  $T$  un 2-enchevêtrement, on note  $D_T$  la substitution de  $T$  dans  $D$ . Si le crochet de KAUFFMAN non clos de  $T$  s'exprime comme :*

$$\langle \cdot \rangle_{\mathcal{T}} = f(\tau) \langle \cdot \rangle_{\smile} + g(\tau) \langle \cdot \rangle_{\frown}$$

alors le crochet de KAUFFMAN de  $D_T$  peut alors être calculé selon les règles suivantes :

$$\begin{cases} \langle \bigcirc \rangle = 1, \\ \langle K \sqcup \bigcirc \rangle = -(\tau^2 + \tau^{-2}) \langle K \rangle, \\ \langle \mathcal{T} \rangle = f(\tau) \langle \smile \rangle + g(\tau) \langle \frown \rangle. \end{cases}$$

où la dernière règle décrit un changement local entre trois diagrammes ailleurs identiques, et où les figures sont parfois pivotées pour correspondre exactement à  $\mathcal{T}$  dans  $D_T$ .

*Démonstration :*

Concernant le diagramme  $D_T$ , si on calcule son crochet de KAUFFMAN avec les règles classiques en séparant chaque croisement individuellement, nous pouvons le faire dans l'ordre que l'on souhaite. Ainsi, nous pouvons choisir de séparer tous les croisements d'une des copies de  $T$  en premier; or en faisant cela nous n'agissons que localement sur cette partie du diagramme, ce qui revient à calculer le crochet de KAUFFMAN non clos de  $T$ . En répétant cela pour chaque occurrence de l'enchevêtrement  $T$  dans  $D_T$ , on obtient la troisième règle de la propriété. De plus par définition de  $D_T$  chaque croisement de  $D$  a été remplacé par  $T$ , il ne reste donc aucun croisement lorsque toutes les occurrences de  $T$  ont été séparées.  $\square$

**Remarques II.29.**

1. Effectuer une rotation de  $\mathcal{T}$  revient lors du calcul de son crochet non clos à pivoter de la même façon les symboles  $\smile$  et  $\frown$ . Autrement dit, on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} \rangle &= f(\tau) \langle \smile \rangle + g(\tau) \langle \frown \rangle = \langle \mathcal{T} \rangle, \\ \langle \mathcal{R} \rangle &= g(\tau) \langle \smile \rangle + f(\tau) \langle \frown \rangle = \langle \mathcal{S} \rangle. \end{aligned}$$

2. La proposition II.28 donne exactement l'impression de remplacer les coefficients de la dernière règle du crochet de KAUFFMAN, sous réserve qu'il existe un 2-enchevêtrement qui dispose de ces coefficients.

Comme prévu, la proposition II.28 permet de généraliser les coefficients utilisés pour le calcul du crochet de KAUFFMAN. Afin de simplifier l'étude de ces substitutions, nous pouvons aussi adapter la notion d'état du crochet.

**Définition II.30 – État du crochet de KAUFFMAN d'une substitution.**

Pour  $D$  un diagramme d'entrelacs et  $T$  un 2-enchevêtrement, on note  $D_T$  la substitution de  $T$  dans le modèle  $D$ . Un état du crochet de KAUFFMAN d'une substitution  $D_T$  est un terme provenant de  $\langle D_T \rangle$

obtenu en choisissant une séparation pour chaque copie de  $T$  que  $D_T$  contient. En numérotant les  $n$  copies de  $T$  dans  $D_T$ , l'état  $\langle D_T | S \rangle$  est déterminé par  $S \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^n$  où 0 représente une séparation  $\underbrace{\quad\quad}_)$  et 1 une séparation  $\underbrace{\quad\quad})$  pour la copie concernée en respectant sa rotation.

Bien sûr, il est toujours possible d'écrire le crochet de KAUFFMAN d'une substitution comme une somme de ces états, en effet une séparation d'une copie de  $T$  peut être vue comme la somme des états de  $T$  menant au diagramme correspondant au choix de la séparation<sup>4</sup>. Il est alors intéressant de décrire ce que donne l'état d'une substitution.

**Proposition II.31.** *Pour  $D$  un diagramme d'entrelacs ayant  $n$  croisements numérotés et  $T$  un 2-enchevêtrement tel que :*

$$\langle \langle \mathbb{T} \rangle \rangle = f(\tau) \langle \langle \underbrace{\quad\quad}_) \rangle + g(\tau) \langle \langle \underbrace{\quad\quad}) \rangle$$

On note  $D_T$  la substitution de  $T$  dans le modèle  $D$ , et on numérote les copies de  $T$  de la même façon que les croisements de  $D$ . Pour  $S \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^n$  un choix de séparation, on a :

$$\langle D_T | S \rangle = \delta^{c-1} f^{n-e}(\tau) g^e(\tau)$$

avec  $e = |S|$  la somme des éléments de  $S$  et  $c$  le nombre de composantes non liées de  $D$  obtenu après séparation suivant les choix décrits par  $S$ .

*Démonstration :*

Comme  $e = |S|$  est la somme des éléments de  $S$ , composée uniquement de 0 et de 1 avec leur signification en termes de séparation, on en déduit que  $e$  représente le nombre de séparations de type  $\underbrace{\quad\quad}_)$ . Ainsi  $n - e$  représente le nombre de séparations de type  $\underbrace{\quad\quad})$ ; donc en suivant les règles décrites par la proposition II.28, on en déduit que le facteur  $f(\tau)$  apparaît  $n - e$  fois et le terme  $g(\tau)$  apparaît  $e$  fois.

Concernant l'entier  $c$ , celui-ci correspond au nombre de composantes non liées de  $D$  après séparation de ses croisements suivant les choix décrits par  $S$ . Lors de la séparation des copies de  $T$  dans  $D_T$  suivant ce même  $S$ , nous avons localement pour chaque copie de  $T$  la même séparation que les croisements de  $D$ , c'est-à-dire le même remplacement de diagramme. Par conséquent, après séparation nous obtenons le même diagramme pour  $D$  et pour  $D_T$ . On en déduit en particulier que  $D_T$  a également  $c$  composantes non liées après séparation, et par la deuxième règle de la proposition II.28 on obtient alors un coefficient  $\delta^{c-1}$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant passer à une application. En choisissant des coefficients particuliers, et donc un 2-enchevêtrement particulier, il est notamment possible de construire des nœuds  $m$ -triviaux.

### **Théorème II.32 – Construction de nœuds $m$ -triviaux par substitution dans un modèle.**

Soient  $D$  un diagramme de nœud orienté avec  $n$  croisements d'entortillement nul,  $m \geq 2$  un entier et  $T$  un 2-enchevêtrement croisé ne contenant pas de composantes internes tel que la somme des signes des croisements impliquant le même brin soit nulle, et :

$$\langle \langle \mathbb{T} \rangle \rangle = (1 + mf(\tau)) \langle \langle \underbrace{\quad\quad}_) \rangle + mg(\tau) \langle \langle \underbrace{\quad\quad}) \rangle$$

On note  $D_T$  la substitution uniforme de  $T$  dans le modèle  $D$ . Si l'état  $S = (0, \dots, 0)$  du crochet de KAUFFMAN non clos de  $D_T$  ne présente qu'une seule composante après séparation, alors  $D_T$  est un nœud  $m$ -trivial.

*Démonstration :*

Nous savons déjà par la proposition II.25 que  $D_T$  est un nœud. Il reste à calculer son polynôme de JONES pour montrer que  $D_T$  est  $m$ -trivial. Commençons par le crochet de KAUFFMAN, que l'on peut écrire grâce à la somme de ces états :

$$\langle D_T \rangle = \sum_{S \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^n} \langle D_T | S \rangle = \sum_{S \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^n} \delta^{c_S-1} (1 + mf)^{n-|S|} (mg)^{|S|}$$

4. Cela est également appelé « polynôme de choix », voir la définition II.48.

$$\begin{aligned}
&= (1 + mf)^n \delta^{c_0-1} + \sum_{\substack{S \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^n \\ S \neq (0, \dots, 0)}} \delta^{c_S-1} (1 + mf)^{n-|S|} (mg)^{|S|} \\
&= (1 + mf)^n \delta^{c_0-1} + mP
\end{aligned}$$

où  $|S|$  désigne la somme des coefficients de  $S$ ,  $c_S$  le nombre de composantes non liées obtenues après séparation suivant  $S$ , avec la notation particulière  $c_0$  pour  $S = (0, \dots, 0)$ , et  $P$  est un polynôme de reste en  $\tau$  à coefficients entiers. En particulier, il est possible de factoriser par  $m$  la somme de l'avant-dernière ligne car  $|S| \geq 1$ . Par hypothèse, l'état correspondant à  $S = (0, \dots, 0)$  ne contient qu'une seule composante, autrement dit  $c_0 = 1$ . On obtient donc que :

$$\langle D_T \rangle = (1 + mf)^n \delta^{c_0-1} + mP = (1 + mf)^n + mP = 1 + mQ$$

où  $Q$  est encore un polynôme de reste en  $\tau$  à coefficients entiers. Par la proposition II.26 avec ses notations, on a  $\text{wr}(D_T) = \omega_c \text{wr}(D) + c(D)(\omega_{b_1} + \omega_{b_2})$  avec  $c(D)$  le nombre de croisements de  $D$ . Comme l'entortillement de  $D$  ainsi que  $\omega_{b_1} + \omega_{b_2}$  sont supposés nuls, on a  $\text{wr}(D_T) = 0$ . On en déduit l'écriture du polynôme de JONES :

$$V_{D_T}(t) = \left( (-\tau^{-3})^{\text{wr}(D_T)} \langle D_T \rangle \right) \left( t^{-\frac{1}{4}} \right) = 1 + mQ \left( t^{-\frac{1}{4}} \right)$$

ce qui montre bien que le nœud  $D_T$  est  $m$ -trivial.  $\square$

Comme nous pouvons le voir, le théorème II.32 permet effectivement de construire des nœuds  $m$ -triviaux, mais cela nécessite plusieurs hypothèses indispensables : l'existence d'un 2-enchevêtrement  $T$  avec un crochet de KAUFFMAN non clos particulier, ayant des conditions sur ses croisements, reliant ses extrémités d'une manière bien précise ; et l'existence d'un modèle  $D$  représentant un nœud d'entortillement nul n'ayant qu'une seule composante lorsque tous ses croisements sont séparés en  $\frown$ .

L'espoir est de construire un nœud  $mm'$ -trivial à partir d'un 2-enchevêtrement vérifiant les conditions du théorème II.32 et d'un nœud particulier voire  $m'$ -trivial ; et l'idéal serait d'obtenir un nœud 6-trivial de cette manière. Les travaux de ELIAHOU et FROMENTIN [EF17] fournissent une famille de 2-enchevêtrements avec les coefficients recherchés, notés  $M_r$  dans leur article. Ces enchevêtrements ont en effet le crochet de KAUFFMAN non clos requis avec  $m = 2^r$ , malheureusement ils ne connectent pas leurs extrémités de la bonne manière et l'hypothèse concernant la somme des signes des croisements n'est pas non plus respecté. De plus, aucun exemple de nœud 3-trivial avec entortillement nul n'est connu. Les essais de construction avec ces exemples, en remplaçant  $M_r$  par l'enchevêtrement algébrique  $M_r * 1$  par exemple, n'a pas amené de résultat.

De plus suivant la proposition II.27, si cette construction permet effectivement de créer des nœuds  $mm'$ -triviaux, ou même pourquoi pas des nœuds  $m^r$ -triviaux, il est aussi possible d'obtenir des nœuds premiers si le modèle et le 2-enchevêtrement sont adéquats.

### 3.2.3 Recherche aléatoire d'exemples

Cette sous-section décrit une méthode que l'auteur a utilisée pour essayer de trouver des exemples de nœuds  $m$ -triviaux rapidement, afin de commencer à les étudier rapidement. Le principe ne repose pas sur une construction particulière, et a ainsi l'énorme avantage de pouvoir trouver de tels exemples de nœuds  $m$ -triviaux sans même savoir ce qu'ils leur confèrent cette propriété. Elle a aussi cependant un grand inconvénient, elle utilise abondamment l'aléatoire.

L'idée, très simple et naïve, est la suivante : on choisit un nœud  $K$  aléatoirement parmi tous ceux qui existent, on calcule son polynôme de JONES et on vérifie si  $K$  est  $m$ -trivial pour un certain  $m \geq 2$ . Nous avons quand même quelques difficultés à surmonter. Tout d'abord il faut trouver une manière de choisir aléatoirement un nœud, idéalement de manière uniforme, mais l'important est déjà de pouvoir générer un nœud de façon aléatoire peu importe la loi de probabilité. Il faut ensuite pouvoir calculer son

---

**Pseudo code 1** *Génération aléatoire de tresses* (Voir II.33)


---

**Requiert :**  $n$  nombre de brins supérieur ou égal à 2,  
 $l$  longueur du mot supérieur ou égal à 0.

**Résultat :** Une tresse aléatoire de  $B_n$  représentée par un mot de longueur  $l$  sans réduction libre.

```

1: procédure GENERETRESSE( $n, l$ )
2:    $\beta \leftarrow \mathbb{1}_n$ 
3:    $k' \leftarrow 0$ 
4:   pour  $i$  allant de 1 à  $l$  faire
5:      $k \leftarrow \text{ALEA}(\llbracket -n + 1, n - 1 \rrbracket \setminus \{0, k'\}) \triangleright$  Choix d'une lettre aléatoire
6:      $k' \leftarrow -k \triangleright$  Lettre à éviter pour la prochaine itération, sinon risque de réduction libre
7:      $\beta \leftarrow \beta \sigma_{|k|}^{\text{sign}(k)}$ 
8:   fin pour
9:   retourner  $\beta$ 
10: fin

```

Où  $\text{ALEA}(E)$  renvoie un élément choisi aléatoirement de l'ensemble  $E$ .

---

polynôme de JONES rapidement, en effet même avec une loi uniforme il y a assez peu de chance que l'on trouve un exemple probant au bout d'un ou deux essais, il faut donc automatiser ce processus et utiliser la loi des grands nombres en notre faveur. Cela implique d'autres difficultés liées essentiellement à la programmation, comme le choix des structures de données, et également algorithmique afin de pouvoir coder sur un ordinateur cette recherche.

Commençons par le plus important, à savoir générer aléatoirement des nœuds. On trouve dans l'article de EVEN-ZOHAR [Eve17] une multitude de modèles permettant de générer des nœuds aléatoirement. Le choix de l'auteur s'est porté sur l'utilisation des tresses, essentiellement pour trois raisons :

- c'est un domaine que l'auteur connaissait déjà plutôt bien dès le début de la thèse, gagnant ainsi un peu de temps et pouvant vérifier les résultats plus facilement,
- les tresses disposent aussi d'une notion de déformation, d'un diagramme qui les représente, et ne nécessitent qu'une clôture pour devenir un entrelacs,
- l'implémentation sur ordinateur des tresses est très accessible grâce à sa structure algébrique.

Bien sûr nous avons certains inconvénients, entre autres nous ne connaissons pas de méthode pour générer de manière uniforme des tresses quelconques, nous savons seulement le faire pour le cas des tresses positives avec les travaux de GEBHARDT et GONZÁLEZ-MENESES [GG13]. Cependant, même si on peut se contenter de générer des tresses quelconques à partir de tresses positives car ce monoïde est simplifiable, cela nécessite de générer deux tresses positives aléatoirement pour obtenir une tresse quelconque, et cette dernière ne sera pas choisie de manière uniforme. Plutôt que d'utiliser cet algorithme, qui est de plus d'une certaine complexité connue d'ordre exponentiel, nous pouvons utiliser une génération naïve.

### Algorithme II.33 – Génération aléatoire de tresses.

(Pseudo code ci-dessus) Pour deux entiers  $n \geq 2$  et  $l \geq 0$ , l'algorithme suivant permet de générer aléatoirement une tresse de  $B_n$  de longueur  $l$  à partir d'un mot de tresse ne contenant pas de réductions libres.

Le principe est simplement de générer chaque lettre composant le mot de tresse aléatoirement, de façon à ce que deux lettres consécutives ne soient pas inverses l'une de l'autre afin d'éviter les réductions libres. On part pour cela de la tresse triviale, à laquelle on concatène les lettres choisies au fur et à mesure.



Cette génération n'est clairement pas uniforme, en effet la tresse correspondant à  $\sigma_1 \sigma_1 \sigma_1$  n'a qu'une

écriture possible sans réduction libre et de longueur 3, tandis que celle correspondant à  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$  peut aussi s'écrire  $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$ . Le problème inhérent est que certaines tresses sont générées plus souvent, ce qui nous complique la tâche. On ne peut malheureusement pas contourner ce problème à l'heure actuelle. Aussi, il est tout à fait possible de générer des mots de tresses pouvant être réduits, par exemple :

$$\beta = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1$$

cependant chercher à résoudre ce problème risque d'apporter une complexité non négligeable.

Continuons malgré tout, nous avons maintenant la possibilité de générer aléatoirement des tresses avec un nombre de brins et une longueur approximative donnée. D'après le théorème I.104, notre tresse devient après clôture un entrelacs, or seul les nœuds nous intéressent dans cette étude. Il nous faut un critère permettant de décider si la clôture d'une tresse donnera un nœud ou non.

**Proposition II.34.** *Pour  $\beta$  une tresse de  $B_n$ , on note  $\omega$  la permutation résultant de la projection canonique de  $\beta$  dans  $\mathfrak{S}_n$ . Il existe une bijection entre les composantes obtenues après clôture<sup>5</sup> de  $\beta$  et les cycles à supports disjoints composant  $\omega$ .*

*Démonstration :*

Parcourir une composante de la clôture  $\widehat{\beta}$  de  $\beta$  démarrant avec le brin en  $k^e$  position revient à lister toutes les positions des extrémités des brins visitées par cette composante. Comme la clôture standard identifie les extrémités se trouvant de chaque côté de la tresse aux mêmes positions, il convient de lister uniquement les positions des extrémités se trouvant à droite du diagramme correspondant à  $\beta$ . Nous savons aussi que l'image  $\omega(k)$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  représente la position d'arrivée à gauche du brin démarrant en  $k^e$  position à droite.

Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on souhaite décrire la composante de  $\widehat{\beta}$  comprenant le brin démarrant en  $k^e$  position à droite. En traversant la tresse, nous arrivons en  $\omega(k)^e$  position à gauche, et la clôture nous amène à cette même position à droite. En parcourant entièrement cette composante, la liste des positions visitées par celle-ci correspond alors exactement à l'écriture du cycle à support disjoint de  $\omega$  agissant sur  $k$ . Cela décrit la bijection attendue.  $\square$

*Remarque II.35.* Les points fixes de  $\omega$  sont considérés comme des 1-cycles dans la proposition précédente.

Ce critère est très efficace, et n'est pas très contraignant à vérifier. Nous pouvons aussi faire en sorte que le choix du nombre de brins et de la longueur voulue ait effectivement une chance de générer un nœud.

**Proposition II.36.** *Pour  $w$  un mot de tresse réduit représentant une tresse  $\beta$  à  $n$  brins, si la clôture  $\widehat{\beta}$  est un nœud alors la longueur  $l$  de  $w$  vérifie les deux conditions suivantes :*

- (i)  $l \geq n - 1$ ,
- (ii)  $l \equiv n - 1 \pmod{2}$ .

*Démonstration :*

Supposons que le mot de tresse réduit à  $n$  brins  $w$  de longueur  $l$  donne un nœud, alors la permutation  $\omega$  résultant de la projection canonique de  $w$  est un  $n$ -cycle par la proposition II.34. En rappelant qu'un  $k$ -cycle peut s'écrire comme la composition d'exactly  $k - 1$  transpositions, et que  $\omega$  s'écrit comme la composition de  $l$  transpositions simples via la projection de  $w$ , on en déduit que  $l \geq n - 1$ . Si de plus  $l > n - 1$ , alors il existe des lettres non signées en doublon dans  $w$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , comme  $\sigma_i$  et  $\sigma_i^{-1}$  sont envoyés sur la même transposition simple  $(i \ i + 1)$ , cela signifie que  $\omega$  voit dans son écriture en transpositions des doublons. Or une transposition  $(a \ b)$  est son propre inverse, et rappelons que la conjugaison par une permutation ne change pas la longueur d'un cycle. Ainsi, si  $\omega$  s'écrit sous la forme :

$$\omega = \omega_1 \circ (a \ b) \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k \circ (a \ b) \circ \omega_2$$

on peut alors écrire  $\omega$  sous la forme suivante :

$$\omega = \omega_1 \circ (a \ b) \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k \circ (a \ b) \circ \omega_2$$

5. On ne considère que la clôture standard ici, bien qu'il soit possible de décrire des critères semblables pour d'autres clôtures.

$$\begin{aligned}
&= \omega_1 \circ (a b) \circ \tau_1 \circ (a b) \circ (a b) \circ \tau_2 \circ \dots \\
&\quad \dots \circ \tau_{k-1} \circ (a b) \circ (a b) \circ \tau_k \circ (a b) \circ \omega_2 \\
&= \omega_1 \circ \tau'_1 \circ \tau'_2 \circ \dots \circ \tau'_{k-1} \circ \tau'_k \circ \omega_2
\end{aligned}$$

qui contient exactement 2 transpositions de moins. En répétant cela pour chaque doublon existant, on obtient finalement une écriture de  $\omega$  sous la forme d'une composition de  $l - 2d$  transpositions, où  $d$  est le nombre de doublons retirés. Par hypothèse, nous devons obtenir un nœud après clôture de la tresse associé à  $w$ , ce qui implique par la proposition II.34 que  $\omega$  est décrit par exactement un  $n$ -cycle. Ce  $n$ -cycle correspond à un produit de  $n - 1$  transpositions, on en déduit que  $l = n - 1 + 2d$ , autrement dit  $l \equiv n - 1 \pmod{2}$ .  $\square$

Ce dernier critère est tout aussi important, en effet si l'on génère exclusivement des mots de tresses avec une longueur ayant la même parité que le nombre de brins, on peut être certain qu'aucun d'entre eux ne donnera de nœud. Il nous reste cependant un souci, en effet l'algorithme II.33 ne garantit pas que le mot généré soit réduit. Cependant, la seule relation permettant de diminuer la longueur d'un mot est celle inhérente à tout groupe, et réduit la longueur du mot d'exactly 2. Cela nous assure que la deuxième condition de la proposition II.36 est toujours respectée pour un paramètre  $l$  bien choisi. La première condition ne peut pas être vérifiée simplement, cela relève du problème de conjugaison sur les tresses. Heureusement, celle-ci n'est motivée que par l'assurance qu'aucun brin de la tresse ne soit droit, ce qui se vérifie déjà avec la proposition II.34.


Une dernière optimisation que l'auteur a essayé de mettre en place est de décider si une tresse est associée à un nœud alternant avant de la clôturer. Ces nœuds sont à éviter, nous l'avons vu avec le raisonnement décrit en début de la sous-section 3.1.3. Malheureusement, aucune relation générale permettant de définir un tel critère n'a été trouvée, même en ayant repéré certaines configurations dans le diagramme des tresses concernées. On peut néanmoins déjà en déduire qu'il est inutile de générer des tresses avec seulement 2 brins.

Il reste à déterminer comment calculer le polynôme de JONES à partir du mot de tresse. Cela peut être fait grâce aux matrices diagrammatiques décrites en sous-section 4.2.2, et c'est notamment grâce à elles que l'auteur a pu lancer ses premières explorations à la recherche des nœuds  $m$ -triviaux. Plus tard, avec les travaux décrit en section 5.2, il s'est avéré qu'il est possible d'effectuer ces mêmes calculs sur ordinateur sans matrices, avec des produits d'éléments de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB grâce à la définition II.126 du produit ping-pong, ce qui est plus rapide à l'exécution.

### Algorithme II.37 – Recherche de nœuds $m$ -triviaux via les mots de tresses.

(Pseudo code page suivante) Pour un nombre de brins  $n \geq 3$  et un entier  $l \geq 0$  représentant une longueur de mot, l'algorithme suivant permet de rechercher des exemples de nœuds  $m$ -triviaux pour  $m \geq 2$  quelconque à partir de mots de tresse à  $n$  brins de longueur  $l$ .

Le fonctionnement a déjà été décrit en introduction de cette sous-section. Après avoir vérifié que les paramètres  $n$  et  $l$  permettent l'apparition de nœuds via la proposition II.36, et en évitant de s'intéresser au cas  $n = 2$  qui ne fera apparaître que des nœuds alternants, on effectue une boucle dans laquelle on génère un mot de tresse grâce à l'algorithme II.33. On vérifie ensuite que ce mot de tresse est bien associé à un nœud via la proposition II.34, puis on calcule son polynôme de JONES. Pour vérifier si ce nœud est  $m$ -trivial, on calcule le PGCD des coefficients du polynôme de JONES en retirant 1 au monôme constant; si ce PGCD est plus grand que 1, le nœud est effectivement  $m$ -trivial. Une fois la boucle terminée, il suffit de retourner une liste des exemples trouvés.

La boucle en elle-même ne sert qu'à automatiser la recherche d'exemples et n'est pas nécessaire en soi. Sa condition d'arrêt est donc arbitraire suivant ce que l'on souhaite, par exemple arrêter la boucle après  $x$  itérations, ou encore limiter le temps d'exécution ou bien arrêter la recherche seulement après avoir trouvé  $x$  exemples. 

---

**Pseudo code 2**                      **Recherche de nœuds  $m$ -triviaux via les mots de tresses**                      (Voir II.37)

---

**Requiert :**  $n$  nombre de brins supérieur ou égal à 3,  
 $l$  longueur des mots de tresse supérieur ou égal à 0.

**Résultat :** Une liste de nœuds  $m$ -triviaux.

```

1: procédure RECHERCHENOEUDMTRIVIAUX( $n, l$ )
2:    $E \leftarrow \emptyset$ 
3:   si  $n \equiv l \pmod{2}$  ou  $l < n - 1$  alors     $\triangleright$                       Critère décrit par la proposition II.36
4:     retourner  $E$ 
5:   fin condition
6:   boucle     $\triangleright$     La condition d'arrêt est arbitraire, suivant un nombre d'itérations ou de résultats,...
7:      $\beta \leftarrow \text{GENERETRESSE}(n, l)$ 
8:     si  $\pi_{B_n}(\beta)$  est un  $n$ -cycle alors     $\triangleright$                       Critère décrit par la proposition II.34
9:        $V \leftarrow \text{POLYNOJONES}(n, l, \beta)$ 
10:       $m \leftarrow \text{pgcd}(V - 1)$      $\triangleright$                       Calcul du PGCD des coefficients du polynôme  $V - 1$ 
11:      si  $m > 1$  alors     $\triangleright$                       Si ce PGCD est différent de 1, nous avons un nœud  $m$ -trivial
12:         $E \leftarrow E \cup \{\beta\}$ 
13:      fin condition
14:    fin boucle
15:  retourner  $E$ 
16: fin

```

**Où**  $\text{POLYNOJONES}(n, l, \beta)$  désigne une méthode pour calculer le polynôme de JONES à partir d'une tresse, comme celles décrites par :

- $\text{POLYNOJONESMATRICE}(n, l, \beta)$  définie par l'algorithme II.83,
  - $\text{POLYNOJONESPERMUTATION}(n, l, \beta)$  définie par l'algorithme II.141.
- 

*Remarque II.38.* Il est possible d'optimiser l'algorithme en calculant directement le polynôme de JONES modulo un entier  $m$  choisi en amont, mais cela limite les exemples relevés aux nœuds  $m'$ -triviaux avec  $m'$  multiple de  $m$ .

Avec cette méthode, de nombreux exemples de nœuds 2-triviaux, quelques nœuds 3-triviaux, et plus rarement des nœuds 4-triviaux ont été obtenus. Les recherches ont été effectuées essentiellement avec des mots de tresses à 4 brins, pour des longueurs de mots allant de 15 à 55.

✓ *Exemple II.39.* Un des premiers mots de tresse trouvé par un programme utilisant l'algorithme II.37 est le suivant :

$$P = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3$$

Le nœud correspondant  $K$  admet comme polynôme de JONES :

$$V_K(t) = -1 + 4t - 6t^2 + 8t^3 - 8t^4 + 8t^5 - 6t^6 + 4t^7 - 2t^8$$

En cherchant un peu dans la base de données KnotInfo [LCM04], on remarque que le nœud premier  $12_{730}^n$  admet le même polynôme de JONES, et la tresse à 4 brins le représentant est également décrite par un mot de longueur 13 :

$$T = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3$$

Après vérification en utilisant le logiciel Sage [Ste+19], les tresses représentées par  $P$  et  $T$  ne sont pas isotopes et ne sont pas conjuguées. En revanche, en considérant le mot de tresse renversé de  $T$  que l'on verra dans la

proposition II.151, qui s'écrit :

$$\mathfrak{S}_4(T) = \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1$$













alors on a :

$$P \equiv (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1) \mathfrak{S}_4(T) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1)^{-1}$$

On montre en proposition II.151 que l'application  $\mathfrak{S}_4$  ne change pas le polynôme de JONES, et le théorème I.105 nous assure que la conjugaison ne modifie pas l'entrelacs obtenu après clôture. Cela montre pourquoi  $P$  et  $T$  donnent après clôture des nœuds avec le même polynôme de JONES. On remarquera que comme  $P$  et  $T$  ne sont ni isotopes ni conjuguées, alors toujours d'après le théorème I.105 les nœuds orientés issus de ces mots de tresses sont distincts. De plus l'action de  $\mathfrak{S}_4(\beta)$ , étant de renverser le mot de tresse  $\beta$ , peut s'interpréter sur le diagramme de  $\beta$  comme une rotation dans l'espace suivant l'axe situé dans le même plan que les brins de  $\beta$  mais perpendiculaire à leur direction générale. Bien que cela ne change pas la structure du nœud associé, puisqu'il s'agit d'une rotation globale de l'espace, cela change son orientation. Or toujours d'après KnotInfo [LCM04], le nœud  $12_{730}^n$  n'est pas réversible. En fait, les mots de tresses  $P$  et  $T$  renvoient vers les deux orientations possibles du nœud  $12_{730}^n$ .

### 3.3 Bibliographie de ce chapitre

La bibliographie complète ainsi que le détail de chaque référence est accessible en page 191.

- [Big02]  Stephen BIGELOW. « Does the Jones polynomial detect the unknot? » Dans : *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 11.4, p. 493-505.
- [EF17]  Shalom ELIAHOU et Jean FROMENTIN. « A remarkable 20-crossing tangle ». Dans : *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 26.14, p. 1750091.
- [EKT03]  Shalom ELIAHOU, Louis Hirsch KAUFFMAN et Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « Infinite families of links with trivial Jones polynomial ». Dans : *Topology* 42.1, p. 155-169.
- [Eve17]  Chaim EVEN-ZOHAR. « Models of random knots ». Dans : *Journal of Applied and Computational Topology* 1.2, p. 263-296.
- [GG13]  Volker GEBHARDT et Juan GONZÁLEZ-MENESES. « Generating random braids ». Dans : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 120.1, p. 111-128.
- [LCM04]  Charles LIVINGSTON, Jae Choon CHA et Allison MOORE. *KnotInfo*. 2004.
- [Pag20]  Guillaume PAGEL. « On the modular Jones polynomial ». Dans : *Comptes Rendus : Mathématique* 358.8, p. 901-908.
- [Rol03]  Dale ROLFSEN. « Appendix C : Table of knots and links ». Dans : *Knots and links*, p. 388-429.
- [Ste+19]  William STEIN et al. *SageMath*. Version 8.6. 2019.
- [Thi87]  Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « A spanning tree expansion of the Jones polynomial ». Dans : *Topology* 26.3, p. 297-309.
- [TS21]  Robert E. TUZUN et Adam Stanislaw SIKORA. « Verification of the Jones unknot conjecture up to 24 crossings ». Dans : *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 30.3, p. 2150020.
- [Wol+17]  Stephen WOLFRAM et al. *Wolfram Mathematica*. Version 11.2. 2017.



---

Étude du crochet de KAUFFMAN

---

**Sommaire du présent chapitre**

<b>4.1 Le crochet de KAUFFMAN non clos et ses différentes clôtures</b>	<b>87</b>
4.1.1 Le crochet de KAUFFMAN d'un diagramme non clos . . . . .	88
4.1.2 Les polynômes de choix . . . . .	91
4.1.3 Différentes clôtures . . . . .	93
<b>4.2 Le cas particulier du monoïde diagrammatique tressé</b>	<b>97</b>
4.2.1 Vision morphique du crochet de KAUFFMAN non clos . . . . .	97
4.2.2 Calcul matriciel du crochet de KAUFFMAN . . . . .	100
4.2.3 Propriétés des matrices diagrammatiques . . . . .	104
<b>4.3 Étude par blocs</b>	<b>114</b>
4.3.1 Les blocs de croisements . . . . .	114
4.3.2 Les produits de $\mathcal{B}$ -sommes . . . . .	117
<b>4.4 Bibliographie de ce chapitre</b>	<b>119</b>

Le crochet de KAUFFMAN étant utilisé à plusieurs reprises dans cette thèse, plusieurs de ses aspects ont été étudiés dont une version non close. Nous voyons également dans ce chapitre la redécouverte de liens avec l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB, une méthode matricielle pour le calculer, ou encore une tentative de mieux le comprendre pour construire un nœud ayant un polynôme de JONES choisi.

**4.1 Le crochet de KAUFFMAN non clos et ses différentes clôtures**

La définition I.71 introduit le crochet de KAUFFMAN comme un élagage récursif des croisements d'un diagramme de nœud. Un diagramme de nœud est par définition clos, puisqu'un nœud l'est. On peut cependant parfaitement calculer le crochet de KAUFFMAN d'une tresse, ou d'un enchevêtrement non clos, mais dans ce cas le résultat final ne sera pas un simple polynôme de LAURENT : il restera inévitablement des portions de diagramme sans croisements ne formant pas de boucle fermée. Cela

donne une opportunité de décomposer le polynôme résultant du crochet. De plus, pour revenir au crochet de KAUFFMAN classique, il faudra clôturer ces restes de diagrammes; on peut alors se demander quelles clôtures sont possibles et quels effets elles auront sur le résultat final.

Nous utiliserons la notion d'*appariement* décrit en section B.1 en annexe.

#### 4.1.1 Le crochet de KAUFFMAN d'un diagramme non clos

Les diagrammes non clos sont des représentations incomplètes d'entrelacs ou de nœuds, ayant  $n$  paires d'extrémités avec  $n \geq 1$ . Le cas extrême  $n = 0$  correspond justement à un diagramme de nœud classique, déjà clos car sans extrémités. Dès que des extrémités sont présentes, nos diagrammes sont dans leur globalité des  $n$ -enchevêtrements.

Considérons donc un  $n$ -enchevêtrement  $T$  et étudions ce qu'il se passe lorsque l'on applique les règles de calcul du crochet de KAUFFMAN sans l'avoir clos. La première règle ne concerne que le nœud trivial, et comme celui-ci ne présente pas  $2n$  extrémités, cette règle ne sera jamais utilisée. La deuxième règle concerne les composantes non liées, elle peut être appliquée sans problème, tout comme la dernière règle qui concerne la séparation des croisements. Le calcul se déroule donc sans encombre, et se termine lorsque tous les croisements ont été séparés et que toutes les composantes non liées ont été retirées. Mais comme la première règle n'est pas applicable, il reste obligatoirement des crochets contenant des diagrammes sans croisements ni composante close.

Les diagrammes restant ont pour résumer,  $n$  paires d'extrémités, aucun croisement, pas de composante non liée ou disons plutôt de boucle. Ces diagrammes sont donc isotopes à des éléments du monoïde diagrammatique  $\mathcal{D}_n^K$ , et peuvent s'écrire sous forme algébrique en les seuls générateurs  $u_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Cependant pour arriver à cette écriture, il nous faut considérer un appariement commun à tous les  $n$ -enchevêtrements. Nous supposons alors que l'ensemble des  $n$ -enchevêtrements  $\mathcal{T}_n$  est apparié de façon homogène avec un appariement standard  $\mathcal{E}$ . Par définition, la bijection des extrémités d'un  $n$ -enchevêtrement muni de l'appariement standard avec celles d'un diagramme de  $\mathcal{D}_n^K$  est immédiate, la méthode d'identification ayant déjà été décrite en remarque \*28.

Nous savons de plus grâce au théorème \*20 qu'ils admettent une écriture standard, et avec la proposition \*22 que ceux-ci sont au nombre maximal de  $\text{Cat}(n)$ . Au final, au terme de notre calcul du crochet de KAUFFMAN avec  $T$ , le résultat s'écrit comme une somme de polynômes de LAURENT où chaque terme est indexé par un diagramme réduit de  $\mathcal{D}_n^K$ . L'ensemble de vie du résultat du crochet de KAUFFMAN d'un  $n$ -enchevêtrement  $T$  non clos est donc une sorte de  $\mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$ -module de  $\mathcal{D}_n^K$ , sauf que  $\mathcal{D}_n^K$  n'est pas un groupe abélien.

#### Définition II.40 – Moduloïde diagrammatique de KAUFFMAN.

Pour  $n \geq 1$  un entier, le moduloïde diagrammatique de KAUFFMAN est le  $\mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$ -module du monoïde  $\mathcal{D}_n^K$ , noté  $\mathcal{MD}_n^K$ , vu comme l'ensemble des sommes formelles :

$$\sum_{W \in \mathcal{D}_n^K} P_W W, \quad \text{avec Card}(\{P_W \neq 0\}) < \infty$$

où pour tout  $W, P_W \in \mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$ ; muni d'une loi d'addition  $+$  :  $\mathcal{MD}_n^K \times \mathcal{MD}_n^K \rightarrow \mathcal{MD}_n^K$  commutative définie comme :

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \left( \sum_{W \in \mathcal{D}_n^K} P_W W \right) + \left( \sum_{W \in \mathcal{D}_n^K} Q_W W \right) = \sum_{W \in \mathcal{D}_n^K} [(P_W + Q_W) W]$$

où le neutre est  $0 = \sum_{W \in \mathcal{D}_n^K} 0W$  et d'une loi scalaire standard  $\cdot$  :  $\mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}] \times \mathcal{MD}_n^K \rightarrow \mathcal{MD}_n^K$  :

$$\mathcal{P} \cdot \mathcal{Q} = \mathcal{P} \left( \sum_{W \in \mathcal{D}_n^K} Q_W W \right) = \sum_{W \in \mathcal{D}_n^K} [(PQ)_W W].$$

Les règles d'associativité et de distributivité sont les mêmes qu'avec un module classique.

*Remarques II.41.*

1. Un élément  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{MD}_n^K$  peut s'écrire simplement  $\mathcal{P} = PW$  où  $P \in \mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$  et  $W \in \mathcal{D}_n^K$  si  $P$  est le seul coefficient non nul de la somme formelle de  $\mathcal{P}$ .
2. KAUFFMAN [Kau90, *Definition 3.5 p. 435*] travaille dans son article sur une algèbre construite autour de  $\mathcal{D}_n^K$ , qu'il nomme « algèbre de diagramme ». De plus, lors de son quotient par la relation identifiant  $\circ$  et  $\delta = -\tau^2 - \tau^{-2}$ , il définit en réalité une algèbre isomorphe à l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB  $TL_n(\delta)$ .

Bien sûr le crochet de KAUFFMAN classique, noté par  $\langle \cdot \rangle$ , est défini clairement pour des diagrammes clos, nous allons donc définir une sorte d'alias travaillant avec des  $n$ -enchevêtrements.

**Définition II.42 – Crochet de KAUFFMAN non clos.**

Pour  $n$  un entier et  $T$  un  $n$ -enchevêtrement apparié de façon standard, on appelle le *crochet de KAUFFMAN non clos* de  $T$ , noté  $\langle T \rangle$ , une application  $\langle \cdot \rangle : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{MD}_n^K$ , avec  $\mathcal{T}_n$  l'ensemble des  $n$ -enchevêtrements, défini récursivement par les règles suivantes :

$$\begin{cases} \langle T \rangle = T & \text{si } T \text{ n'a ni croisement ni composante non liée,} \\ \langle T \sqcup \bigcirc \rangle = \delta \langle T \rangle & \text{où } \delta = -\tau^2 - \tau^{-2}, \\ \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = \tau \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle + \tau^{-1} \langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle \end{cases}$$

où les figures de la dernière règle décrivent un changement local entre trois diagrammes ailleurs identiques.

*Remarques II.43.*

1. Nous n'avons besoin de la notion d'appariement que pour faire le parallèle avec les écritures algébriques des diagrammes de  $\mathcal{D}_n^K$ .
2. Les éléments  $W_1, \dots, W_k$  présents dans l'écriture de  $\langle T \rangle$  pour  $T$  un  $n$ -enchevêtrement ne peuvent avoir de boucle par définition, et ne présentent donc pas d'occurrence de  $\circ$ .
3. Au lieu de  $\mathcal{MD}_n^K$ , nous aurions pu utiliser la  $\mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$ -algèbre de TEMPERLEY-LIEB  $TL_n(\delta)$  avec  $\delta = -\tau^2 - \tau^{-2}$  comme espace d'arrivée. Seulement la structure d'algèbre n'est exploitée au maximum que pour des cas particuliers de  $n$ -enchevêtrements, tandis qu'une structure de module sur un monoïde est suffisante pour travailler dans un cadre général. Nous verrons en section 4.2 que les tresses font partie de ces enchevêtrements particuliers.

Il faudrait montrer que la clôture du crochet de KAUFFMAN non clos d'un  $n$ -enchevêtrement  $T$  donne bien le même résultat que si l'on clôt  $T$  avant de calculer son crochet de KAUFFMAN classique. Nous verrons cela avec le théorème II.56, lorsque nous aborderons les clôtures. Avant cela, remarquons la chose suivante :

**Proposition II.44.** *Le crochet de KAUFFMAN non clos est invariant sous isotopie régulière.*

*Démonstration :*

Calculons localement ce qu'il se passe si un diagramme peut effectuer le deuxième mouvement de REIDEMEISTER :

$$\begin{aligned} \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle &= \tau \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle + \tau^{-1} \langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle \\ &= \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle + \tau^2 \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle + \tau^{-2} \langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle + \langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle \\ &= \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle + \underbrace{(\tau^2 + \tau^{-2} + \delta)}_{=0} \langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle \end{aligned}$$

L'invariance par le deuxième mouvement est ainsi démontrée; concernant le troisième mouvement, sans donner les détails des calculs, on a :

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle &= \tau^3 \langle \cdot \rangle + \underbrace{(2\tau + \delta\tau^{-1} + \tau^{-3})}_{=\tau} \langle \cdot \rangle + \tau \langle \cdot \rangle \\ &+ \tau^{-1} \langle \cdot \rangle + \tau^{-1} \langle \cdot \rangle \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle &= \tau^3 \langle \cdot \rangle + \tau \langle \cdot \rangle + \underbrace{(2\tau + \delta\tau^{-1} + \tau^{-3})}_{=\tau} \langle \cdot \rangle \\ &+ \tau^{-1} \langle \cdot \rangle + \tau^{-1} \langle \cdot \rangle \end{aligned}$$

ce qui montre bien l'égalité entre les crochets des deux diagrammes. Finalement, pour le premier mouvement nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle &= \tau \langle \cdot \rangle + \tau^{-1} \langle \cdot \rangle \\ &= \underbrace{(\tau + \tau^{-1}\delta)}_{=-\tau^{-3} \neq 1} \langle \cdot \rangle \end{aligned}$$

ce qui est exactement le comportement du crochet de KAUFFMAN classique.  $\square$

Le crochet de KAUFFMAN originel se décrit également comme une somme d'états de l'entrelacs, nous l'avons vu en proposition I.74. Ces états  $\langle \cdot | S \rangle$  sont décrits en définition I.72 comme le résultat partiel du crochet avec une séparation  $S$  des croisements fixée, et sont en particulier des polynômes. Nous pouvons introduire la même notion pour notre version, et l'adapter puisque les états obtenus sont des polynômes indexés par un diagramme.

**Définition II.45 – États du crochet de KAUFFMAN non clos.**

Pour  $T$  un  $n$ -enchevêtrement apparié de façon standard avec  $x$  croisements, un état du crochet de KAUFFMAN non clos est un terme provenant de  $\langle \cdot | T \rangle$  de la forme  $\tau^e \delta^c W \in \mathcal{MD}_n^K$ , avec  $e, c \geq 0$  des entiers et  $\delta = -\tau^2 - \tau^{-2}$ , obtenu en choisissant pour chaque croisement de  $T$  une séparation. En numérotant les croisements de  $T$ , l'état non clos  $\langle \cdot | T | S \rangle$  est déterminé par  $S \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^x$  où 0 représente une séparation  $\underbrace{\quad}_{\text{separation}}$  et 1 une séparation  $\underbrace{\quad}_{\text{separation}}$  (pour le croisement concerné).

Nous faisons alors les observations suivantes :

**Proposition II.46.** Pour  $\langle \cdot | T | S \rangle$  un état non clos de la forme  $\tau^e \delta^c W \in \mathcal{MD}_n^K$  provenant d'un  $n$ -enchevêtrement  $T$  apparié de façon standard avec  $x$  croisements, l'entier  $c$  représente le nombre de composantes non liées de  $W$  qui ont été retirées; et si  $|S|$  désigne la somme des termes de la séquence  $S$ , alors  $e = x - 2|S|$ .

*Démonstration :*

L'affirmation concernant  $c$  est immédiate, il suffit de remarquer que seule la deuxième règle du crochet permet d'augmenter la puissance de  $\delta$ . L'entier  $e$  correspond à la somme des puissances  $-1$  et  $1$  de  $\tau$  présentés dans la troisième règle du crochet, et cette somme est déterminée par les choix décrits par  $S$ . Si  $|S| = 0$ , c'est-à-dire que tous les croisements ont été séparés comme  $\underbrace{\quad}_{\text{separation}}$ , alors  $e = x$ . De même si  $|S| = x$  alors on en déduit que  $e = -x$ . Étant donné que le changement de choix pour un croisement modifie  $e$  d'un facteur  $\pm 2$ , on trouve rapidement la relation attendue entre  $|S|$  et  $e$ .  $\square$

**Proposition II.47.** *Pour  $T$  un enchevêtrement apparié de façon standard avec  $x$  croisements, nous avons :*

$$\langle T \rangle = \sum_{S \in \llbracket 0,1 \rrbracket^x} \langle T \mid S \rangle$$

*Démonstration :*

Il suffit de constater que la définition récursive du crochet de KAUFFMAN non clos amène à réaliser tous les états  $\langle T \mid S \rangle$ , et toujours par définition, la troisième règle du crochet additionne les différents états au fur et à mesure. L'égalité est donc immédiate.  $\square$

Ainsi, comme avec le crochet originel, le crochet non clos est également une somme des différents états du diagramme de départ.

### 4.1.2 Les polynômes de choix

Par définition du crochet de KAUFFMAN non clos, son résultat est une somme de polynômes chacun indexé par un élément réduit sans boucles du monoïde diagrammatique. Ces polynômes, qui peuvent maintenant être étudiés séparément, renferment une interprétation de la structure de l'enchevêtrement dont le crochet a été calculé. Pour bien comprendre ce phénomène, nous allons décortiquer l'un d'entre eux. Nous les appellerons « polynômes de choix », ce qui nous le verrons, les décrivent particulièrement bien.

#### Définition II.48 – Polynôme de choix.

Pour  $P_1 W_1 + \dots + P_k W_k \in \mathcal{MD}_n^K$  un élément résultant d'un calcul de crochet de KAUFFMAN non clos, avec  $W_1, \dots, W_k$  des éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$ , on appelle *polynômes de choix* les polynômes  $P_1, \dots, P_k$  appartenant à  $\mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$ . On pourra préciser *polynôme de choix associé à  $W_i$*  pour désigner le polynôme  $P_i$ .

Supposons que l'on ait calculé le crochet de KAUFFMAN non clos d'un  $n$ -enchevêtrement, et considérons un polynôme de choix  $P_W$  associé à l'élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$ . Une première remarque à faire est que l'ensemble des opérations effectuées pour obtenir  $P_W$  n'a fait intervenir que des termes indexés par  $W$ , et ceci à cause de la structure de moduloïde de  $\mathcal{MD}_n^K$ . Autrement dit, seuls les états non clos ayant un diagramme isotope à  $W$  ont contribué avec leur coefficient respectif pour donner  $P_W$ .

**Proposition II.49.** *Soit  $T$  un  $n$ -enchevêtrement apparié de façon standard et  $\langle T \rangle$  son crochet de KAUFFMAN non clos. Le polynôme de choix  $P_W$  associé à  $W$  présent dans  $\langle T \rangle$  est exactement la somme des coefficients des états non clos de  $T$  indexés par un élément isotope à  $W$ .*

*Démonstration :*

Les états non clos étant indexés par des éléments de  $\mathcal{D}_n^K$ , nous pouvons écrire ceux-ci sous forme normale de JONES, de même pour  $W$ . Nous savons de plus par la proposition II.47 que  $\langle T \rangle$  est une somme de tous les états non clos, et la loi d'addition définie pour  $\mathcal{MD}_n^K$  indique que seuls les états indexés par des éléments de  $\mathcal{D}_n^K$  équivalents peuvent se regrouper. Ainsi, seuls les états non clos étant indexés par  $W$  peuvent être sommés ensemble, somme qui correspond donc à  $P_W$ .  $\square$

Nous pouvons aller encore plus loin en considérant le facteur  $\delta$  de la deuxième règle du crochet comme une variable. Nous pouvons alors différencier au sein de  $P_W$  les termes par le nombre de composantes non liées qu'ils ont vu apparaître, et de plus nous pouvons, en regardant le degré de  $\tau$  d'un terme, déterminer le nombre de fois que l'on a choisi de séparer les croisements  $\times$  en  $\smile$  et en  $\smile$ . Enfin le coefficient entier en facteur correspond au nombre de fois, donc au nombre de manières, que le terme correspondant a été obtenu.

**Proposition II.50.** *Nous supposons ici que le symbole  $\delta$  présent dans la deuxième règle du crochet de KAUFFMAN non clos soit une variable indépendante de  $\tau$ . Notons  $P = a_1 \tau^{e_1} \delta^{c_1} + \dots + a_k \tau^{e_k} \delta^{c_k}$  un polynôme*

de choix associé à  $W$  provenant de  $\langle T \rangle$ , avec  $T$  un  $n$ -enchevêtrement apparié de manière standard avec  $x$  croisements. Pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , le monôme  $a_i \tau^{e_i} \delta^{c_i}$  est le résultat de la somme des coefficients de  $a_i$  états non clos indexés par  $W$  ayant eu  $c_i$  composantes non liées retirées et ayant séparé  $\frac{x-e_i}{2}$  croisements en  $\rangle$ .

*Démonstration :*

Nous savons par la proposition II.49 que  $P$  est le résultat de la somme des états non clos indexés par  $W$ , et par la proposition II.46 qu'un état  $\langle T | S \rangle$  écrit sous la forme  $\tau^e \delta^r W$  a vu  $r$  composantes non liées retirées et vérifie la relation  $x - 2|S| = e$ . Comme ici  $\delta$  est considéré comme une variable, seuls les états non clos ayant les mêmes coefficients  $e$  et  $c$  peuvent être additionnés et regroupés dans un même monôme, et comme les états n'ont pas de facteur autre que 1, l'entier  $a_i$  correspond bien au nombre d'états correspondant.  $\square$

Toutes ces informations proviennent des choix de séparation des croisements; et au final dans leur globalité, tous les polynômes composant un résultat de crochet de KAUFFMAN non clos reflètent la structure même du  $n$ -enchevêtrement de départ. Autrement dit, en connaissant le polynôme de choix associé à un élément  $W$ , nous savons combien d'états ont mené à  $W$ , dont ceux ayant eu des composantes non liées, ainsi que le nombre exact d'états pour un nombre de composantes non liées donné, et par quels types de séparations. Nous pouvons même retrouver le nombre de croisements en cherchant le monôme de plus haut ou de plus bas degré pour  $\tau$  parmi tous les polynômes de choix, à condition toujours que  $\delta$  soit une variable indépendante.

Cette transcription est aussi présente avec le crochet de KAUFFMAN classique, à condition de ne pas simplifier les termes associés aux états. Cette information est ainsi beaucoup plus lisible avec le crochet non clos, car ces termes ne peuvent pas se regrouper tant que la clôture n'a pas eu lieu. Certes, partir d'un élément de  $\mathcal{MD}_n^K$  pour déterminer, si c'est le cas, de quel  $n$ -enchevêtrement il provient est un exercice monstrueux et même probablement impossible. Néanmoins, cette idée que les polynômes de choix reflètent la structure du  $n$ -enchevêtrement amène la question suivante :

**▣ Problème II.51 – Pour  $T$  un  $n$ -enchevêtrement apparié de façon standard, a-t-on  $\langle T \rangle = \mathbb{1}_n$  si et seulement si  $T$  est réduit et isotope à  $\mathbb{1}_n$  ?**

Nous serions tentés d'évoquer les travaux de ELIAHOU, KAUFFMAN et THISTLETHWAITE [EKT03] concernant l'existence d'entrelacs non triviaux vu comme triviaux par le polynôme de JONES, et a fortiori vu de la même façon par le crochet de KAUFFMAN. Cependant, comme nous allons le voir, le passage du crochet de KAUFFMAN non clos au crochet originel nécessite une clôture, définie par une opération qui n'est clairement pas injective pour  $n \geq 2$ . Par conséquent, nous ne pouvons pas utiliser cet argument sans justifications supplémentaires.

Cependant pour le cas  $n = 1$ ,  $\langle T \rangle$  est exactement un seul polynôme indexé par  $\mathbb{1}_1$ , autrement dit  $\langle T \rangle = \langle T \rangle \mathbb{1}_1$  par le théorème II.56. Les travaux de ELIAHOU, KAUFFMAN et THISTLETHWAITE sont alors applicables et donnent un entrelacs  $T$  avec un entortillement nul ayant au moins 2 composantes. Si  $T$  est représenté par un 1-enchevêtrement, alors  $\langle T \rangle = \mathbb{1}_1$  avec  $T \neq \mathbb{1}_1$ . Concernant seulement les nœuds, le problème II.51 pour  $n = 1$  est équivalent au problème I.87 sur la détection du nœud trivial par le polynôme de JONES.

D'une manière plus générale, nous avons la question suivante :

**▣ Problème II.52 – Pour  $D$  et  $D'$  des diagrammes ayant  $n \geq 2$  paires d'extrémités, les crochets de KAUFFMAN non clos de  $D$  et  $D'$  sont-ils égaux si et seulement si  $D$  et  $D'$  sont isotopes pour l'isotopie régulière ?**

Bien sûr c'est l'implication directe qui nous intéresse ici, puisque par la proposition II.44 nous savons déjà que deux diagrammes isotopes régulièrement donneront le même crochet de KAUFFMAN non clos. Cette question est encore une fois très liée au problème I.87, en effet le crochet de KAUFFMAN non clos se comporte comme la représentation des tresses dans  $\text{TL}_n(\delta)$  utilisée par JONES pour définir son polynôme. Nous verrons cela en section 4.2.

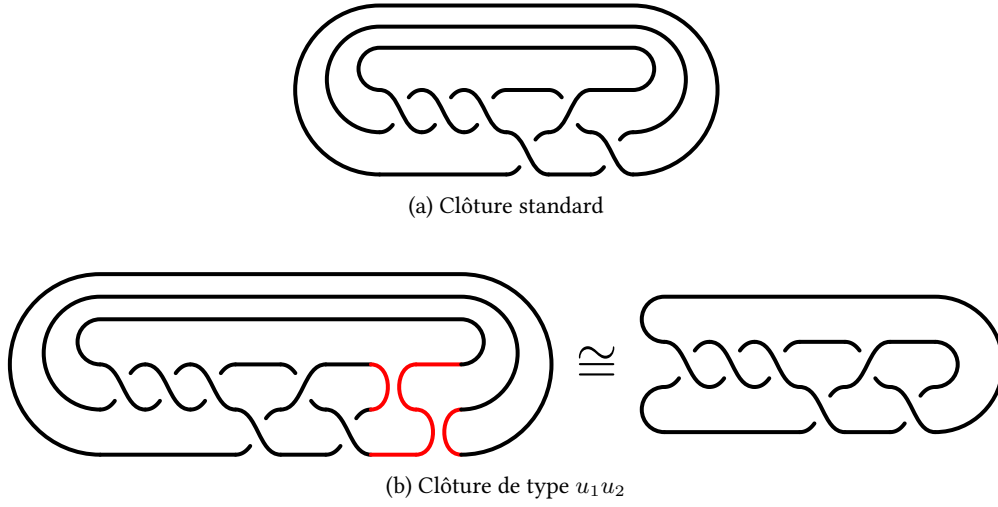


FIGURE 4.1 – Nous voyons ici deux façons différentes de clôturer une tresse à 3 brins. La clôture standard  $Cl_{1_3}$  est représentée en figure 4.1a. Celle en figure 4.1b est de type  $u_1u_2$ , on peut distinguer l'élément du monoïde diagrammatique correspondant dans le diagramme de gauche.

### 4.1.3 Différentes clôtures

Pour revenir au crochet de KAUFFMAN originel, et a fortiori au polynôme de JONES ensuite, nous devons clore le crochet de KAUFFMAN non clos. Cela signifie juste que nous devons clôturer tous les diagrammes restants de la même façon pour finalement pouvoir revenir à des diagrammes fermés sans extrémités. Cela est faisable grâce à l'appariement qui harmonise les clôtures. Une fois cela fait, ces diagrammes n'ayant pas de croisement, ceux-ci ne seront alors qu'une collection de composantes non liées, et sont donc remplaçables par une puissance de  $\delta$ .

La clôture par défaut que nous pourrions utiliser est la clôture standard vue en définition  $\star.29$ , mais cette définition présente deux défauts : le premier est qu'elle est conçue pour la clôture d'un unique diagramme, pas pour un élément de  $\mathcal{MD}_n^K$  ; le second est qu'elle ne concerne qu'une seule possibilité de clôture. En effet, même si les extrémités de nos  $n$ -enchevêtrements sont appariées de façon homogène, rien ne nous interdit de les relier autrement et de façon non standard tant que tous les diagrammes sont clôturés de la même manière.

Notons par ailleurs qu'une clôture est l'action de relier  $n$  paires de points sans croisements, ce qui rappelle fortement le monoïde diagrammatique, à ceci près que nous ne devons pas ajouter de nouvelles composantes  $\circ$ . Chaque clôture différente correspond ainsi à un élément réduit sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  différent. Nous en voyons un exemple en figure 4.1. Nous en déduisons la définition suivante :

#### Définition II.53 – Clôture de type $W$ .

Soient  $\mathcal{D} = P_1W_1 + \dots + P_kW_k$  un élément de  $\mathcal{MD}_n^K$  et  $W$  un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  réduit sans boucles. Une clôture de type  $W$  de  $\mathcal{D}$  est un morphisme de  $\mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$ -module  $Cl_W : \mathcal{MD}_n^K \rightarrow \mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$  tel que :

$$Cl_W(\mathcal{D}) = P_1 Cl_W(W_1) + \dots + P_k Cl_W(W_k)$$

et

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad Cl_W(W_i) = Cl_{1_n}(W_iW) = \delta^{c_i-1}$$

où  $Cl_{1_n}$ , aussi noté simplement  $Cl$ , désigne la clôture standard des enchevêtrements vue en défini-

tion  $\star.29$ , et  $c_i$  correspond au nombre de composantes non liées du diagramme clos de  $W_i W$ .

*Remarques II.54.*

1. Nous savons que les 2-enchevêtrements ont exactement deux clôtures,  $\text{num}(\cdot)$  et  $\text{den}(\cdot)$  définies en définition I.102. Si on considère l'appariement  $\mathcal{E} = \{(\text{NO}, \text{NE}), (\text{SO}, \text{SE})\}$ , alors  $\text{num}(\cdot)$  correspond à la clôture standard et  $\text{den}(\cdot)$  à la clôture de type  $u_1$ .
2. Par la proposition  $\star.22$ , nous savons que pour  $n$  paires d'extrémités il existe exactement  $\text{Cat}(n)$  clôtures de types différents.
3. Lorsqu'une clôture de type  $W$  avec  $W \neq \mathbb{1}_n$  est utilisée sur une tresse à  $n$  brins  $\beta$ , nous ne pouvons plus considérer l'orientation canonique des tresses, de ce fait l'entortillement n'est plus la somme des signes de chaque lettre représentant  $\beta$ .

Nous pouvons maintenant faire un lien important entre les différentes clôtures et le choix de l'appariement. En effet, l'une ou l'autre de ces choses consiste simplement à identifier deux extrémités.

**Proposition II.55.** *Pour  $T$  un  $n$ -enchevêtrement muni d'un appariement  $\mathcal{E}$  et  $W$  un élément réduit de  $\mathcal{D}_n^K$  sans boucles, la clôture de type  $W$  de  $\langle T \rangle$  correspond à la clôture standard d'un autre appariement  $\mathcal{E}'$  de  $T$ .*

*Démonstration :*

Comme  $W$  est réduit et sans boucles, il s'écrit sous une forme normale de JONES sans occurrences de  $\circ$ . Pour montrer que la clôture de type  $W$  de  $T$  muni de l'appariement  $\mathcal{E}$  correspond à une clôture standard d'un autre appariement  $\mathcal{E}'$ , il suffit d'étudier l'action des générateurs  $u_i$  de  $\mathcal{D}_n^K$  sur les paires d'extrémités.

Prenons un appariement quelconque fixé  $\mathcal{F}$  et étudions l'action du générateur  $u_i$  sur celui-ci. De par la définition  $\star.26$  et la remarque  $\star.28$ , nous savons que  $u_i$  agira sur les extrémités identifiées comme celles à droite du  $i^{\text{e}}$  et  $(i+1)^{\text{e}}$  brins pour l'appariement standard, c'est-à-dire les extrémités notées  $e_{2n-i+1} = e_I$  et  $e_{2n-i} = e_{I+1}$  respectivement qui sont forcément voisines. Nous avons deux cas :

- Si  $\{e_I, e_{I+1}\}$  est une paire de  $\mathcal{F}$ , alors  $u_i$  ne peut agir que cette paire. En particulier  $\mathcal{F}$  n'est pas modifié, le seul impact de  $u_i$  étant de créer une composante libre lors de la clôture standard ;
- Sinon l'appariement  $\mathcal{F}$  contient deux paires  $\{e_I, e_a\}$  et  $\{e_{I+1}, e_b\}$  telles que :

$$a \equiv i+1 \pmod{2}, \quad a \neq i+1, \quad b \equiv i \pmod{2}, \quad b \neq i.$$

Comme  $u_i$  met en relation  $e_I$  et  $e_{I+1}$  sous son action, nous obtenons les deux nouvelles paires  $\{e_I, e_{I+1}\}$  et  $\{e_a, e_b\}$ . De par les relations entre  $a, b$  et  $i$ , on remarque que la règle de parité est respectée pour chaque paire. Il reste à vérifier que la partition est non croisée. Comme  $\mathcal{F}$  est un appariement, on a forcément l'un des cas suivants :

$$a < I < I+1 < b, \quad \text{ou} \quad b < a < I < I+1, \quad \text{ou} \quad I < I+1 < b < a.$$

Dans tous les cas, les nouvelles paires sont non croisées.

À présent que nous connaissons l'action des générateurs  $u_i$ , nous pouvons créer une chaîne d'appariements :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_k$$

où le passage de  $\mathcal{E}_j$  à  $\mathcal{E}_{j+1}$  s'effectue en regardant l'action de la  $j^{\text{e}}$  lettre de  $W$  sur  $\mathcal{E}_j$ . En particulier  $\mathcal{E}_k$  est l'appariement  $\mathcal{E}'$  recherché.  $\square$

La proposition II.55 montre que les appariements et les clôtures sont très liés ; par ailleurs cela permet d'étendre la définition des clôtures de type  $W$ , jusque ici définies pour un élément de  $\mathcal{MD}_n^K$ , aux  $n$ -enchevêtrements.

Il est à présent temps de vérifier que le crochet de KAUFFMAN non clos donne bien le crochet de KAUFFMAN après clôture, et plus exactement après clôture standard  $\text{Cl}_{\mathbb{1}_n}$ .

**Théorème II.56 – Clôture du crochet de KAUFFMAN non clos.**

Pour  $T$  un  $n$ -enchevêtrement apparié de façon standard, donnant un diagramme d'entrelacs  $D$  après clôture standard, on a :

$$\langle D \rangle = \text{Cl} (\langle T \rangle)$$

c'est-à-dire que la clôture du crochet de KAUFFMAN non clos de  $T$  est égal au crochet de KAUFFMAN de  $D$ .

*Démonstration :*

Rappelons que pour ces deux crochets, nous pouvons écrire :

$$\langle D \rangle = \sum_{S \in \llbracket 0,1 \rrbracket^x} \langle D | S \rangle \quad \text{et} \quad \langle T \rangle = \sum_{S \in \llbracket 0,1 \rrbracket^x} \langle T | S \rangle$$

où  $x$  est le nombre de croisements de  $T$  et  $S$  représente, rappelons-le, le choix de séparation effectué à chaque croisement de  $T$  ou de  $D$ . Comme  $D$  est le résultat de la clôture de  $T$ , un choix de séparation  $S$  pour  $T$  est le même pour  $D$ , mettant ainsi en relation les termes  $\langle D | S \rangle$  et  $\langle T | S \rangle$  pour un  $S$  fixé. Nous pouvons ainsi identifier les termes entre ces deux sommes suivant la séquence de choix  $S$ .

De plus, nous savons que :

$$\langle D | S \rangle = \tau^e \delta^{c-1}$$

où  $e = x - 2|S|$  et  $c$  est le nombre de composantes du diagramme obtenu en séparant les croisements de  $D$  suivant la séquence  $S$ . Nous savons aussi que :

$$\langle T | S \rangle = \tau^{e'} \delta^{c'} W$$

où  $e' = x - 2|S|$  et  $W$  est le diagramme obtenu en séparant les croisements de  $T$  suivant la séquence  $S$  et en retirant toutes les composantes non liées, au nombre de  $c'$ . Pour  $S$  fixé, nous avons donc immédiatement  $e = e'$ . Il ne reste donc qu'à montrer que  $\delta^{c-1} = \delta^{c'} \text{Cl}(W)$ . Or  $c$  est le nombre de composantes de  $D$  après séparation suivant  $S$  avec  $D$  le résultat de la clôture standard de  $T$ ; et d'un autre côté  $\text{Cl}(W)$  est aussi le résultat d'une puissance de  $\delta$  égale au nombre de composantes du diagramme  $W$  après clôture standard moins une, sans oublier les  $c'$  composantes non liées déjà retirées. L'égalité est donc vérifiée. Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Cl} (\langle T \rangle) &= \text{Cl} \left( \sum_{S \in \llbracket 0,1 \rrbracket^x} \langle T | S \rangle \right) \\ &= \sum_{S \in \llbracket 0,1 \rrbracket^x} \text{Cl} (\langle T | S \rangle) \\ &= \sum_{S \in \llbracket 0,1 \rrbracket^x} \langle D | S \rangle \\ &= \langle D \rangle \end{aligned}$$

□

En plus des clôtures de différents types, nous pouvons aussi envisager des clôtures incomplètes, permettant de diminuer le nombre d'extrémités sans pour autant clore complètement le diagramme. Il s'agit d'un outil supplémentaire pour étudier ce crochet en faisant diminuer le nombre de diagrammes réduits servant à l'indexation. Ces clôtures partielles ne peuvent clore que certaines paires d'extrémités pour éviter d'en encercler d'autres. Au vu de la disposition des extrémités sur un diagramme de  $\mathcal{D}_n^K$ , seul un ensemble de paires d'extrémités concernant des brins consécutifs en partant du brin d'indice minimal ou d'indice maximal n'est éligible pour une clôture partielle. De plus, comme pour une clôture complète, nous pouvons choisir un type de clôture suivant un élément approprié du monoïde diagrammatique. Nous allons pour cela avoir besoin de projections de  $\mathcal{D}_b^K$  vers  $\mathcal{D}_n^K$  avec  $b < n$ .

**Définition II.57 – Projections entre monoïdes diagrammatiques de KAUFFMAN.**

Pour  $1 \leq n \leq m$  et  $0 \leq r \leq m - n$  des entiers, on définit la *projection décalée* de  $r$  brins de  $\mathcal{D}_n^K$  vers

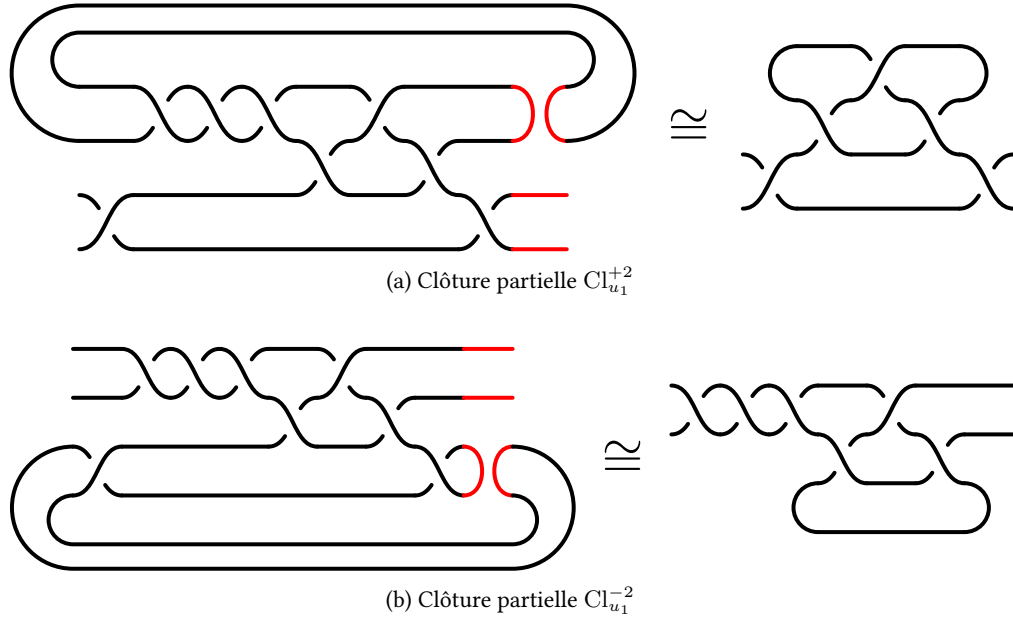


FIGURE 4.2 – Les deux clôtures partielles possibles de type  $u_1$ , suivant que l'on souhaite agir sur les deux premiers ou les deux derniers brins.

$\mathcal{D}_m^K$  comme l'application suivante définie sur les générateurs :

$$\begin{aligned} \pi_r^{\text{shift}} : \mathcal{D}_n^K &\rightarrow \mathcal{D}_m^K \\ u_i &\mapsto u_{r+i} \\ \circ &\mapsto \circ \end{aligned}$$

pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

*Remarque II.58.* Pour  $r = 0$ ,  $\pi_0^{\text{shift}}$  est la projection canonique.

Nous pouvons maintenant définir les clôtures partielles de type  $W$ , dont on peut voir un exemple pour une tresse à 4 brins en figure 4.2.

**Définition II.59 – Clôture partielle de type  $W$ .**

Soient  $\mathcal{D} = P_1 W_1 + \dots + P_k W_k$  un élément de  $\mathcal{MD}_n^K$ ,  $0 < b < n$  un entier et  $W$  un élément de  $\mathcal{D}_b^K$  réduit sans occurrences de  $\circ$ . Une *clôture partielle pour  $b$  brins de type  $W$*  de  $\mathcal{D}$  est un morphisme de  $\mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$ -module  $Cl_W^{\pm b} : \mathcal{MD}_n^K \rightarrow \mathcal{MD}_{n-b}^K$  tel que :

$$Cl_W^{\pm b}(\mathcal{D}) = P_1 Cl_W^{\pm b}(W_1) + \dots + P_k Cl_W^{\pm b}(W_k).$$

Le signe de  $b$  détermine quel ensemble de brins il faut clôturer, ainsi pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  :

$$Cl_W^{+b}(W_i) = \delta^{c_i} \mathcal{W}_i$$

où  $\mathcal{W}_i \in \mathcal{D}_{n-b}^K$  correspond au diagramme obtenu en clôturant les  $b$  premiers brins de  $W_i \pi_0^{\text{shift}}(W)$ , dont les  $c_i$  composantes non liées ont été retirées; et :

$$Cl_W^{-b}(W_i) = \delta^{c'_i} \mathcal{W}'_i$$

où  $\mathcal{W}'_i \in \mathcal{D}_{n-b}^K$  correspond au diagramme obtenu en clôturant les  $b$  derniers brins de  $W_i \pi_{n-b}^{\text{shift}}(W)$ , dont les  $c'_i$  composantes non liées ont été retirées. Comme pour la clôture complète,  $W$  peut être omis si

$W = \mathbb{1}_b.$

En se restreignant à  $\mathcal{D}_n^K$ , la clôture partielle de l'un de ses éléments  $W$  peut ne concerner que des brins droits suivant la forme de  $W$ . Cela revient alors à simplement remplacer des brins de  $W$  par des puissances de  $\delta$ . De manière plus générale, on a la propriété suivante :

**Proposition II.60.** *Soient  $0 < b < n$  un entier,  $B$  et  $W$  des éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_b^K$  et  $\mathcal{D}_n^K$  respectivement. Si  $W = W_1 W_2 W_3$  où  $W_1$  et  $W_3$  ne contiennent pas de lettres  $u_i$  avec  $i \in \llbracket 1, b \rrbracket$ , alors :*

$$\text{Cl}_B^{+b}(W) = \mathcal{W}_1 \text{Cl}_B^{+b}(W_2) \mathcal{W}_3$$

avec  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_3$  les diagrammes de  $\mathcal{D}_{n-b}^K$  obtenus en retirant les  $b$  premiers brins. De même si  $W = W_1 W_2 W_3$  où  $W_1$  et  $W_3$  ne contiennent pas de lettres  $u_i$  avec  $i \in \llbracket n-b, n-1 \rrbracket$ , alors :

$$\text{Cl}_B^{-b}(W) = \mathcal{W}_1 \text{Cl}_B^{-b}(W_2) \mathcal{W}_3$$

avec  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_3$  les diagrammes de  $\mathcal{D}_{n-b}^K$  obtenus en retirant les  $b$  derniers brins.

*Démonstration :*

Montrons le premier cas. Nous avons :

$$\text{Cl}_B^{+b}(W) = \text{Cl}_B^{+b}(W_1 W_2 W_3) = \text{Cl}^{+b}(W_1 W_2 W_3 \pi_0^{\text{shift}}(B))$$

Remarquons tout d'abord que  $W_3$  ne contient pas de lettre  $u_i$  avec  $i \in \llbracket 1, b \rrbracket$ , alors que  $\pi_0^{\text{shift}}(B)$  ne contient lui que des lettres  $u_i$  avec  $i \in \llbracket 1, b-1 \rrbracket$ . Ainsi,  $W_3$  et  $\pi_0^{\text{shift}}(B)$  commutent. Maintenant, les  $b$  premiers brins de  $W_1$  et  $W_3$  sont droits, par isotopie nous pouvons donc les réduire pour atteindre d'un côté les extrémités de  $W_2$  et de l'autre celles de  $\pi_0^{\text{shift}}(B)$ . Notons alors  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_3$  les diagrammes de  $\mathcal{D}_{n-b}^K$  obtenu à partir de  $W_1$  et  $W_3$  respectivement en retirant leurs  $b$  premiers brins. Nous avons alors l'écriture suivante :

$$\text{Cl}^{+b}(W_1 W_2 W_3 \pi_0^{\text{shift}}(B)) = \mathcal{W}_1 \text{Cl}^{+b}(W_2 \pi_0^{\text{shift}}(B)) \mathcal{W}_3$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\text{Cl}_B^{+b}(W) = \text{Cl}^{+b}(W_1 W_2 W_3 \pi_0^{\text{shift}}(B)) = \mathcal{W}_1 \text{Cl}^{+b}(W_2 \pi_0^{\text{shift}}(B)) \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_1 \text{Cl}_B^{+b}(W_2) \mathcal{W}_3$$

et c'est ce qui était attendu. La démonstration du deuxième cas suit les mêmes idées, mais en raisonnant avec les  $b$  derniers brins.  $\square$

Nous verrons d'autres propriétés du crochet en changeant notre espace de travail, en effet l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB nous ajoute une loi supplémentaire et le comportement du crochet ou des objets introduits ici en général se comporte plutôt bien avec celle-ci.

*Remarque II.61.* Toutes les définitions et propriétés concernant le crochet de KAUFFMAN non clos peuvent être adaptées pour travailler au sein de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB.

## 4.2 Le cas particulier du monoïde diagrammatique tressé

Parmi tous les  $n$ -enchevêtrements existants, nous disposons d'un sous-ensemble formant un monoïde très particulier tout aussi proche de la théorie des nœuds. Le monoïde diagrammatique tressé  $\mathcal{B}_n^K$  rassemble le monoïde diagrammatique  $\mathcal{D}_n^K$  et le groupe des tresses  $B_n$ , ils présentent tous deux une structure de brins réglementée et exprimable sous forme de mots. Cela va nous permettre de développer plus de résultats sur le crochet de KAUFFMAN non clos propre à ces sous-ensembles.

### 4.2.1 Vision morphique du crochet de KAUFFMAN non clos

Le premier avantage des tresses est de pouvoir s'écrire sous forme de mots, surtout dans le sens où les croisements se succèdent suivant une unique direction. En comparaison, les enchevêtrements algébriques, qui peuvent aussi s'écrire sous une forme ressemblant aux mots, nécessitent au moins deux

opérations distinctes pour être décrits, car les croisements peuvent s'enchaîner suivant deux directions. Pour en revenir aux tresses, remarquons pour  $\sigma_i$  un générateur de  $B_n$  que :

$$\begin{cases} \langle \sigma_i \cdot \rangle = \tau \langle \mathbb{1}_n \cdot \rangle + \tau^{-1} \langle u_i \cdot \rangle, \\ \langle \sigma_i^{-1} \cdot \rangle = \tau^{-1} \langle \mathbb{1}_n \cdot \rangle + \tau \langle u_i \cdot \rangle. \end{cases}$$

La troisième règle du crochet s'écrit donc en fonction des générateurs de  $B_n$  et de  $\mathcal{D}_n^K$ . Nous pourrions faire en sorte que le crochet de KAUFFMAN non clos soit un morphisme entre  $B_n$  et  $\mathcal{MD}_n^K$ , mais il faudrait définir une loi supplémentaire de multiplication. Nous devons donc changer légèrement notre définition du crochet de KAUFFMAN non clos, et notamment son ensemble d'arrivée qui sera dorénavant l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB  $\text{TL}_n(\delta)$  avec comme paramètre  $\delta = -\tau^2 - \tau^{-2}$ .

**Proposition II.62.** *Le crochet de KAUFFMAN non clos peut être redéfini tel que  $\langle \cdot \cdot \rangle : \mathcal{T}_n \rightarrow \text{TL}_n(\delta)$  où  $\delta = -\tau^2 - \tau^{-2}$  avec les mêmes règles que dans la définition II.42.*

*Démonstration :*

Par définition II.42, pour  $T$  un  $n$ -enchevêtrement, le crochet de KAUFFMAN non clos s'écrit  $\langle T \cdot \rangle = P_1 W_1 + \dots + P_k W_k$  où  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$  et  $W_1, \dots, W_k \in \mathcal{D}_n^K$  sont réduits sans boucles. Écrit sous cette forme,  $\langle T \cdot \rangle$  peut aussi bien être interprété comme élément de  $\mathcal{MD}_n^K$  suivant la définition II.40 ou comme élément de  $\text{TL}_n(\delta)$  suivant la définition \*25.  $\square$

*Remarque II.63.* L'algèbre de TEMPERLEY-LIEB  $\text{TL}_n(\delta)$  n'est pas commutative pour la multiplication, car le monoïde  $\mathcal{D}_n^K$  ne l'est pas :

$$(P_1 W_1)(P_2 W_2) = P_1 P_2 W_1 W_2 = P_2 P_1 W_1 W_2 \neq P_2 P_1 W_2 W_1 = (P_2 W_2)(P_1 W_1)$$

où  $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$  et  $W_1, W_2 \in \mathcal{D}_n^K$ .

L'algèbre de TEMPERLEY-LIEB disposant d'une multiplication, nous pouvons maintenant énoncer le lemme suivant :

**Lemme II.64.** *Pour  $n \geq 1$  un entier, le crochet de KAUFFMAN non clos  $\langle \cdot \cdot \rangle$  est un morphisme de monoïde de  $B_n$  vers  $\text{TL}_n(\delta)$  avec  $\delta = -\tau^2 - \tau^{-2}$  pour la multiplication.*

*Démonstration :*

Tout d'abord, nous avons par définition :

$$\langle \mathbb{1}_n \cdot \rangle = \mathbb{1}_n$$

Ainsi, la tresse triviale à  $n$  brins est envoyée sur l'élément neutre de  $\text{TL}_n(\delta)$ . Pour vérifier que  $\langle \beta_1 \beta_2 \cdot \rangle = \langle \beta_1 \cdot \rangle \langle \beta_2 \cdot \rangle$  avec  $\beta_1, \beta_2$  des tresses à  $n$  brins, il suffit de vérifier que  $\langle \sigma_i^{e_i} \sigma_j^{e_j} \cdot \rangle = \langle \sigma_i^{e_i} \cdot \rangle \langle \sigma_j^{e_j} \cdot \rangle$  pour  $\sigma_i, \sigma_j$  des générateurs de  $B_n$  et  $e_i, e_j = \pm 1$ .

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i^{e_i} \sigma_j^{e_j} \cdot \rangle &= \tau^{e_i} \langle \sigma_j \cdot \rangle + \tau^{-e_i} \langle u_i \sigma_j \cdot \rangle \\ &= \tau^{e_i+e_j} \langle \mathbb{1}_n \cdot \rangle + \tau^{e_i-e_j} \langle u_j \cdot \rangle + \tau^{-e_i+e_j} \langle u_i \cdot \rangle + \tau^{-e_i-e_j} \langle u_i u_j \cdot \rangle \\ &= \tau^{e_i+e_j} \mathbb{1}_n + \tau^{e_i-e_j} u_j + \tau^{-e_i+e_j} u_i + \tau^{-e_i-e_j} u_i u_j \\ \langle \sigma_i^{e_i} \cdot \rangle \langle \sigma_j^{e_j} \cdot \rangle &= (\tau^{e_i} \langle \mathbb{1}_n \cdot \rangle + \tau^{-e_i} \langle u_i \cdot \rangle) (\tau^{e_j} \langle \mathbb{1}_n \cdot \rangle + \tau^{-e_j} \langle u_j \cdot \rangle) \\ &= (\tau^{e_i} \mathbb{1}_n + \tau^{-e_i} u_i) (\tau^{e_j} \mathbb{1}_n + \tau^{-e_j} u_j) \\ &= \tau^{e_i+e_j} \mathbb{1}_n + \tau^{e_i-e_j} u_j + \tau^{-e_i+e_j} u_i + \tau^{-e_i-e_j} u_i u_j \end{aligned}$$

$\square$

On peut améliorer le lemme II.64 en considérant un sous-groupe de  $\text{TL}_n(\delta)$ . Le théorème suivant était déjà connu de KAUFFMAN :

**Théorème II.65 – Vision morphique du crochet de KAUFFMAN non clos.**

Pour  $n \geq 1$  un entier, on considère  $G$  le sous-groupe de  $\text{TL}_n(\delta)$  engendré par les éléments de la forme  $\tau^e \mathbb{1}_n + \tau^{-e} u_i$  avec  $e = \pm 1$  et  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  muni de la multiplication. Alors le crochet de KAUFFMAN

non clos  $\langle \cdot \cdot \rangle$  est un morphisme de groupe de  $B_n$  vers  $G$ .

**KAUFFMAN (1990)** – [Kau90, Proposition 3.6 p. 435]

*Démonstration :*

On commence par montrer que  $(G, \mathbb{1}_n, \times)$  est un groupe. Comme  $\text{TL}_n(\delta)$  est un anneau, et que  $G$  en est un sous-anneau, il ne reste qu'à montrer l'existence d'un inverse pour les éléments de  $G$ . Or comme  $\delta = -\tau^2 - \tau^{-2}$  :

$$\begin{aligned} (\tau^e \mathbb{1}_n + \tau^{-e} u_i) (\tau^{-e} \mathbb{1}_n + \tau^e u_i) &= \mathbb{1}_n + \tau^{2e} u_i + \tau^{-2e} u_i + \delta u_i \\ &= \mathbb{1}_n + \underbrace{(\tau^{2e} + \tau^{-2e} + \delta)}_{=0} u_i \\ &= \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

Le lemme II.64 ayant déjà montré que  $\langle \sigma_i^{e_i} \sigma_j^{e_j} \rangle = \langle \sigma_i^{e_i} \rangle \langle \sigma_j^{e_j} \rangle$  pour  $\sigma_i, \sigma_j$  des générateurs de  $B_n$  et  $e_i, e_j = \pm 1$ , le résultat est immédiat.  $\square$

*Remarque II.66.* Cette dernière proposition n'est qu'un autre point de vue de la représentation utilisée par JONES pour définir son polynôme. En effet, en utilisant nos notations, celle-ci est donnée comme :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{JONES}} : B_n &\rightarrow \text{TL}_n(\delta) \\ \sigma_i^e &\mapsto \tau^e \mathbb{1}_n + \tau^{-e} u_i \end{aligned}$$

Si on remarque immédiatement que  $\rho_{\text{JONES}} = \langle \cdot \cdot \rangle$  en l'écrivant de cette façon, celle donnée originellement par JONES utilise une définition légèrement différente de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB, ce qui ne donne pas cette égalité aussi simplement.

Une généralisation de ce que l'on observe avec les tresses peut être possible avec un ensemble un peu plus large de diagrammes comptant  $n$  brins.

**Corollaire II.67.** *Pour  $n \geq 1$  un entier, le crochet de KAUFFMAN non clos est un morphisme de monoïdes de  $\mathcal{B}_n^K$  vers  $\text{TL}_n(\delta)$ .*

*Démonstration :*

Grâce au lemme II.64, il reste à montrer que pour  $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $e = \pm 1$  :

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle, \quad \langle u_i \sigma_j^e \rangle = \langle u_i \rangle \langle \sigma_j^e \rangle, \quad \langle \sigma_i^e u_j \rangle = \langle \sigma_i^e \rangle \langle u_j \rangle.$$

Pour la première égalité, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle u_i u_j \rangle &= \delta^c W \quad \text{où } u_i u_j = \circ^c W \text{ avec } W \text{ sans boucles} \\ &= (u_i) (u_j) \\ &= \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \end{aligned}$$

ce qui implique pour la deuxième :

$$\begin{aligned} \langle u_i \sigma_j^e \rangle &= \tau^e \langle u_i \rangle + \tau^{-e} \langle u_i u_j \rangle \\ &= \tau^e \langle u_i \rangle + \tau^{-e} \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle \\ &= \langle u_i \rangle (\tau^e \langle \mathbb{1}_n \rangle + \tau^{-e} \langle u_j \rangle) \\ &= \langle u_i \rangle \langle \sigma_j^e \rangle \end{aligned}$$

On procédera de la même manière pour la dernière égalité.  $\square$

La vision du crochet de KAUFFMAN non clos sous la forme d'un morphisme permet de le scinder comme nous pourrions scinder une tresse ou un diagramme à  $n$  brins. L'écriture du crochet sous la forme d'un produit ajoute également beaucoup en termes de possibilités pour le calculer, il devient alors même possible de se passer de la définition récursive originelle.

### 4.2.2 Calcul matriciel du crochet de KAUFFMAN

Grâce à la vision morphique, le calcul du crochet de KAUFFMAN devient maintenant une succession de produits. De plus, les éléments  $u_i$  de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB peuvent être représentés par des matrices, ainsi que leurs combinaisons linéaires. Une fois une représentation choisie, nous pouvons alors calculer le crochet de KAUFFMAN non clos par produit matriciel. Si de plus il existe une application sur ces matrices permettant de clôturer le crochet, alors nous pouvons même calculer le crochet de KAUFFMAN avec ces mêmes matrices.

Cependant dans ce but nous ne pouvons pas utiliser n'importe quelle représentation de  $TL_n(\delta)$ , comme celles décrites par WESTBURY [Wes95]. En effet, il faut pouvoir comprendre les coefficients présents dans la matrice, sans cela nous serions embêtés au moment de la clôture pour déterminer l'opération qui y correspond.

♥ *Exemple II.68.* Prenons le cas de  $TL_3(\delta)$ , les éléments  $u_1$  et  $u_2$  peuvent être représentés par les matrices :

$$u_1 : \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad u_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons que les matrices correspondant à  $\langle \sigma_1 \rangle$  et  $\langle \sigma_2 \rangle$  sont :

$$\langle \sigma_1 \rangle = \tau \mathbb{1}_3 + \tau^{-1} u_1 : \begin{pmatrix} \tau + \tau^{-1} \delta & \tau^{-1} \\ 0 & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau^{-3} & \tau^{-1} \\ 0 & \tau \end{pmatrix}, \quad \langle \sigma_2 \rangle : \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ \tau^{-1} & -\tau^{-3} \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant le crochet  $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle$  avec et sans les matrices :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle &= \langle \sigma_1 \rangle \langle \sigma_2 \rangle \\ (\tau \mathbb{1}_3 + \tau^{-1} u_1) (\tau \mathbb{1}_3 + \tau^{-1} u_2) &: \begin{pmatrix} -\tau^{-3} & \tau^{-1} \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ \tau^{-1} & -\tau^{-3} \end{pmatrix} \\ \tau^2 \mathbb{1}_3 + u_1 + u_2 + \tau^{-2} u_1 u_2 &: \begin{pmatrix} 0 & -\tau^{-4} \\ 1 & -\tau^{-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons bien sûr :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\tau^{-4} \\ 1 & -\tau^{-2} \end{pmatrix} = \tau^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \delta \end{pmatrix} + \tau^{-2} \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$$

mais l'opération matricielle qui permet de clôturer le crochet n'est pas immédiate. De plus si nous devons à chaque fois décomposer les matrices calculées pour pouvoir utiliser une clôture, cela retire l'intérêt d'utiliser des matrices.

Plutôt que d'utiliser des matrices issues d'une représentation de  $TL_n(\delta)$  quelconque, nous allons construire des matrices contenant la table de produit de  $TL_n(\delta)$  par rapport à l'un de ses éléments.

#### Définition II.69 – Matrices diagrammatiques.

Supposons que chaque élément sous forme normale de JONES sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$ , y compris l'identité, soit noté  $W_k$  avec  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ . On définit la *matrice diagrammatique* à gauche  $M_D(W_k)$  de  $W_k$  comme la matrice carrée de taille  $\text{Cat}(n)$  avec :

$$(M_D(W_k))_{i,j} = \begin{cases} \delta^c & \text{si } W_k W_j = \circ^c W_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice diagrammatique à droite  $M_D^d(W_k)$  se définit de la même façon mais le produit par  $W_k$  s'effectue à droite.

✓ **Exemple II.70.** Les matrices diagrammatiques à gauche et à droite de  $u_1 \in \text{TL}_3(\delta)$  sont :

$$\begin{array}{c|ccccc} M_D(u_1) & \mathbb{1}_3 & u_1 & u_2 & u_1u_2 & u_2u_1 \\ \hline \mathbb{1}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1 & 1 & \delta & \cdot & \cdot & 1 \\ u_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1u_2 & \cdot & \cdot & 1 & \delta & \cdot \\ u_2u_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c|ccccc} M_D^d(u_1) & \mathbb{1}_3 & u_1 & u_2 & u_1u_2 & u_2u_1 \\ \hline \mathbb{1}_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1 & 1 & \delta & \cdot & 1 & \cdot \\ u_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1u_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_2u_1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \delta \end{array}$$

**Remarque II.71.** De par leur définition, les matrices diagrammatiques ont exactement un unique coefficient non nul pour chacune de leurs colonnes.

Ces matrices respectent une propriété importante, qui permettra de définir une représentation à partir d'elles pour la suite :

**Proposition II.72.** Pour  $W_{k_1}$  et  $W_{k_2}$  deux éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$ , on a :

$$M_D(W_{k_1})M_D(W_{k_2}) = \delta^c M_D(W)$$

où  $W$  est un élément réduit sans boucles avec  $\circ^c W = W_{k_1}W_{k_2}$ .

*Démonstration :*

Supposons que  $W_{k_1}W_{k_2} = \circ^c W$  avec  $W$  un élément réduit sans boucles. Il suffit de calculer le produit  $M_D(W_{k_1})M_D(W_{k_2})$ . On a :

$$(M_D(W_{k_1})M_D(W_{k_2}))_{i,j} = \sum_{l=1}^{\text{Cat}(n)} (M_D(W_{k_1}))_{i,l} (M_D(W_{k_2}))_{l,j}$$

Pendant nous savons que les matrices diagrammatiques ont exactement un seul coefficient non nul par colonne, il existe donc un unique  $l'$  tel que  $W_{k_2}W_j = \circ^{c_2} W_{l'}$ , ce qui donne alors :

$$(M_D(W_{k_1})M_D(W_{k_2}))_{i,j} = \delta^{c_2} (M_D(W_{k_1}))_{i,l'}$$

Nous avons alors deux cas de figures suivant si  $(M_D(W_{k_1}))_{i,l'}$  est nul ou non.

- si  $(M_D(W_{k_1}))_{i,l'} = 0$ , alors  $(M_D(W_{k_1})M_D(W_{k_2}))_{i,j}$  est nul. Cela signifie également que  $W_{k_1}W_{l'}$  n'est pas isotope à un élément de la forme  $\circ^{c_1} W_i$ . On en déduit que  $\circ^c W W_j = W_{k_1}W_{k_2}W_j = \circ^{c_2} W_{k_1}W_{l'}$  n'est pas non plus isotope à  $\circ^{c_1+c_2} W_i$ , et donc  $(M_D(W))_{i,j}$  est également nul.
- Dans le cas contraire, il existe  $c_1$  tel que  $W_{k_1}W_{l'} = \circ^{c_1} W_i$  et on a alors :

$$(M_D(W_{k_1})M_D(W_{k_2}))_{i,j} = \delta^{c_1+c_2}$$

De plus :

$$\circ^c W W_j = W_{k_1}W_{k_2}W_j = \circ^{c_2} W_{k_1}W_{l'} = \circ^{c_1+c_2} W_i$$

Comme  $c$  représente le nombre de boucles de  $W_{k_1}W_{k_2}$  tandis que  $c_1 + c_2$  représente le nombre total de boucles de  $W_{k_1}W_{k_2}W_j$ , nous avons  $c < c_1 + c_2$  et donc :

$$(M_D(W))_{i,j} = \delta^{c_1+c_2-c}$$

ce qui montre que :

$$\delta^c (M_D(W))_{i,j} = (M_D(W_{k_1})M_D(W_{k_2}))_{i,j}$$

Ceci étant vrai pour tout  $i, j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ , la proposition est démontrée.  $\square$

Nous avons ainsi :

**Théorème II.73 – Représentation matricielle de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB.**

Pour  $n \geq 1$ , l'application :

$$\begin{array}{lcl} \rho : & \text{TL}_n(\delta) & \rightarrow GL_{\text{Cat}(n)}(\mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]) \\ & P_1W_1 + \dots + P_kW_k & \mapsto P_1M_D(W_1) + \dots + P_kM_D(W_k) \end{array}$$

est une représentation de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB, au sens où  $\rho$  est un morphisme d'anneaux.

*Démonstration :*

Pour la loi d'addition, celle-ci étant définie de manière formelle, on remarquera que :

$$\rho(P_1W_1 + P_2W_2) = P_1M_D(W_1) + P_2M_D(W_2) = \rho(P_1W_1) + \rho(P_2W_2)$$

et  $\rho(0)$  est bien la matrice nulle. Concernant la loi de multiplication, nous avons pour  $\mathbb{1}_n$  l'identité de  $\text{TL}_n(\delta)$  de la multiplication :

$$(M_D(\mathbb{1}_n))_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

par définition II.69. Ainsi  $\rho(\mathbb{1}_n) = M_D(\mathbb{1}_n)$  est bien la matrice identité. Il ne reste qu'à montrer que  $\rho((P_1W_1)(P_2W_2)) = \rho(P_1W_1)\rho(P_2W_2)$ . Nous avons grâce à la proposition II.72 avec  $W_1W_2 = \circ^c W$  où  $W$  est réduit sans boucles :

$$\begin{aligned} \rho((P_1W_1)(P_2W_2)) &= \rho(P_1P_2\delta^c W) = P_1P_2\delta^c M_D(W) \\ &= P_1P_2M_D(W_1)M_D(W_2) = (P_1M_D(W_1))(P_2M_D(W_2)) \\ &= \rho(P_1W_1)\rho(P_2W_2) \end{aligned}$$

Ainsi,  $\rho$  est bien un morphisme d'anneaux.  $\square$

Nous pouvons à présent généraliser la notion de matrice diagrammatique et représenter les tresses, ou même tout élément de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB.

**Définition II.74 – Matrices diagrammatiques – Extension.**

Pour  $\mathcal{D}$  un élément de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB  $\text{TL}_n(\delta)$ , on appelle *matrice diagrammatique* à gauche de  $\mathcal{D}$  la matrice  $M_D(\mathcal{D})$  définie comme l'image de  $\mathcal{D}$  par la représentation  $\rho$  du théorème II.73. En particulier, pour  $\sigma_i$  un générateur de  $B_n$ , la matrice diagrammatique à gauche de  $\sigma_i^e$  pour  $e = \pm 1$ , notée  $M_D(\sigma_i^e)$ , est définie comme :

$$M_D(\sigma_i^e) = \tau^{-e}M_D(\mathbb{1}_n) + \tau^eM_D(u_i)$$

De plus, pour  $w = \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}$  un mot de tresse à  $n$  brins, nous avons :

$$M_D(w) = M_D(\sigma_{i_1}^{e_1}) \cdots M_D(\sigma_{i_k}^{e_k})$$

On définit respectivement les matrices diagrammatiques à droites de  $\mathcal{D}$  en définissant une représentation  $\rho^d$  utilisant les matrices diagrammatiques à droite.

À présent, nous avons tout ce qu'il faut pour calculer le crochet de KAUFFMAN non clos de tout mot de tresse de façon matricielle. En fait, il ne reste surtout plus qu'à comprendre comment le retrouver dans les matrices diagrammatiques.

**Proposition II.75.** *Supposons que les éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  soient notés  $W_k$  pour  $k$  dans  $[[1, \text{Cat}(n)]]$ , comme dans la définition II.69, et que  $\mathbb{1}_n$  soit désigné par  $W_i$ . Pour  $\mathcal{D}$  un élément de  $\text{TL}_n(\delta)$  s'écrivant sous la forme  $P_1W_1 + \cdots + P_{\text{Cat}(n)}W_{\text{Cat}(n)}$ , pour tout  $j \in [[1, \text{Cat}(n)]]$  on a  $(M_D(\mathcal{D}))_{j,i} = P_j$ .*

*Démonstration :*

Suivant la définition II.74 et en notant  $\rho$  la représentation qui y est utilisée, on a :

$$\begin{aligned} M_D(\mathcal{D}) &= \rho(\mathcal{D}) = \rho(P_1W_1 + \cdots + P_{\text{Cat}(n)}W_{\text{Cat}(n)}) \\ &= P_1\rho(W_1) + \cdots + P_{\text{Cat}(n)}\rho(W_{\text{Cat}(n)}) \\ &= P_1M_D(W_1) + \cdots + P_{\text{Cat}(n)}M_D(W_{\text{Cat}(n)}) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne en particulier pour un certain  $j \in [[1, \text{Cat}(n)]]$  :

$$(M_D(\mathcal{D}))_{j,i} = \sum_{l \in [[1, \text{Cat}(n)]]} P_l \underbrace{(M_D(W_l))_{j,i}}_{\neq 0 \text{ pour } l=j} = P_j \underbrace{(M_D(W_j))_{j,i}}_{=1} = P_j$$

La deuxième égalité vient du fait que seul  $W_l = W_j$  permet d'obtenir  $W_l W_i = W_j$  puisque  $W_i = \mathbb{1}_n$ .  $\square$

Autrement dit, les polynômes apparaissant dans un élément  $\mathcal{D} \in \text{TL}_n(\delta)$  se retrouvent tels quels dans la colonne associée à  $\mathbb{1}_n$ , et ces mêmes polynômes sont rangés suivant l'élément de  $\mathcal{D}_n^K$  auquel ils sont associés. En particulier, on en déduit que les polynômes de choix sont lisibles de la même manière.

**Proposition II.76.** *Supposons que les éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  soient notés  $W_k$  pour  $k$  dans  $\llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ , comme dans la définition II.69, et que  $\mathbb{1}_n$  soit désigné par  $W_i$ . Alors pour  $T \in \mathcal{B}_n^K$  un élément du monoïde diagrammatique tressé à  $n$  brins, le polynôme de choix associé à  $W_k$  de  $\langle T \rangle$  est présent à la  $k^e$  ligne de la  $i^e$  colonne de la matrice diagrammatique  $M_D(T)$ .*

*Démonstration :*

Découle immédiatement de la proposition II.75. Cependant, dans le cas où  $T$  est une tresse  $\beta$ , nous pouvons montrer ce cas particulier par récurrence :

Si  $\beta$  est la tresse triviale, alors  $M_D(\beta) = M_D(\mathbb{1}_n)$  qui est la matrice identité, et en particulier dans la  $i^e$  colonne seul le coefficient de la  $i^e$  ligne est non nul et égal à 1. Cela correspond avec les polynômes de choix de  $\langle \beta \rangle = \langle \mathbb{1}_n \rangle$ , où seul celui associé à  $\mathbb{1}_n$  est non nul et égal à 1. De même si  $\beta = \sigma_j^e$ , dans ce cas  $M_D(\beta) = M_D(\sigma_j^e)$  où par définition dans la  $i^e$  colonne, seul le  $i^e$  coefficient valant  $\tau^e$  et le  $j^e$  valant  $\tau^{-e}$  sont non nuls. Ceux-ci étant associés à  $\mathbb{1}_n$  et  $W_j$  respectivement, on retrouve une fois encore les polynômes de choix de  $\langle \beta \rangle$ .

Il ne reste qu'à vérifier que cette propriété se conserve par produit matriciel. Supposons que  $M_D(\beta)$  vérifie la propriété pour un certain mot  $\beta$ . Pour une lettre  $\sigma_j^e$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j^e \beta \rangle &= \langle \sigma_j^e \rangle \langle \beta \rangle \\ &= (\tau^e \mathbb{1}_n + \tau^{-e} u_j) \sum_{k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} [P_{W_k} W_k] \\ &= \sum_{k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} [\tau^e P_{W_k} W_k + \tau^{-e} P_{W_k} u_j W_k] \\ &= \sum_{k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} \left[ \left( \tau^e P_{W_k} + \tau^{-e} \sum_l [\delta^{c_l} P_{W_l}] \right) W_k \right] \quad \text{avec } l \text{ tel que } u_j W_l = \circ^{c_l} W_k. \end{aligned}$$

Cela nous donne la forme des polynômes de choix de  $\langle \sigma_j^e \beta \rangle$ . Maintenant nous avons avec les matrices :

$$M_D(\sigma_j^e \beta) = M_D(\sigma_j^e) M_D(\beta) = (\tau^e M_D(\mathbb{1}_n) + \tau^{-e} M_D(u_j)) M_D(\beta)$$

En particulier, nous avons pour  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} (M_D(u_j) M_D(\beta))_{k,i} &= \sum_{l \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} [(M_D(u_j))_{k,l} (M_D(\beta))_{l,i}] \\ &= \sum_l [\delta^{c_l} (M_D(\beta))_{l,i}] \quad \text{avec } l \text{ tel que } u_j W_l = \circ^{c_l} W_k \\ &= \sum_l [\delta^{c_l} P_{W_l}] \quad \text{car } (M_D(\beta))_{l,i} = P_{W_l} \text{ par hypothèse} \end{aligned}$$

ce qui amène à :

$$(M_D(\sigma_j^e \beta))_{k,i} = \tau^e P_{W_k} + \tau^{-e} \sum_l [\delta^{c_l} P_{W_l}] \quad \text{avec } l \text{ tel que } u_j W_l = \circ^{c_l} W_k$$

Ainsi  $(M_D(\sigma_j^e \beta))_{k,i}$  est bien égal au polynôme de choix associé à  $W_k$  de  $\langle \sigma_j^e \beta \rangle$ . Ceci étant vrai pour tout  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ , la proposition est démontrée dans le cas particulier des tresses.  $\square$

Avec cette dernière proposition, nous savons comment récupérer le crochet de KAUFFMAN non clos à

partir des matrices diagrammatiques. Bien sûr leur étude ne s'arrête pas là, d'autres résultats sur ces matrices seront présentés dans la prochaine sous-section 4.2.3. De plus, au vu de comment sont arrangés les polynômes de choix au sein de la matrice, le calcul de la clôture standard est assez simple.

**Proposition II.77.** *Supposons que les éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  soient notés  $W_k$  pour  $k$  dans  $\llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ , comme dans la définition II.69, et que  $\mathbb{1}_n$  soit désigné par  $W_i$ . Alors pour  $T \in \mathcal{B}_n^K$  un élément du monoïde diagrammatique tressé à  $n$  brins, nous avons :*

$$\text{Cl}_{\mathbb{1}_n}(\langle T \rangle) = CM_D(T)e_i$$

où  $e_i$  désigne le  $i^e$  vecteur canonique et  $C$  est le vecteur de composante tel que chaque coordonnée  $C_j$  est définie comme  $C_j = \delta^{c_j-1}$ , avec  $c_j$  le nombre de composantes après clôture standard de  $W_j$ .

*Démonstration :*

Le produit  $M_D(T)e_i$  renvoie la  $i^e$  colonne de  $M_D(T)$ , celle-ci étant composée des polynômes de choix par la proposition II.76. Le produit avec  $C$  est donc un produit scalaire :

$$\begin{aligned} CM_D(T)e_i &= C(M_D(T))_{\cdot,i} = \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} C_j (M_D(T))_{j,i} \\ &= \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} C_j P_{W_j} \\ &= \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} \delta^{c_j-1} P_{W_j} \quad \text{où } c_j \text{ est le nombre de composantes de } W_j \text{ après clôture} \\ &= \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_{W_j} \text{Cl}(W_j) \\ &= \text{Cl} \left( \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_{W_j} W_j \right) \\ &= \text{Cl}(\langle T \rangle) \end{aligned}$$

□

Nous savons maintenant calculer le crochet de KAUFFMAN de manière matricielle. En plus d'apporter une nouvelle structure pour l'étudier, cela permet aussi de pouvoir le calculer aisément avec un ordinateur, en faisant complètement abstraction des diagrammes. Les tresses et les éléments de  $\mathcal{D}_n^K$  sont en effet représentables par des mots, eux-mêmes pouvant être vus comme une suite de nombres, et les matrices ne contiennent que des polynômes.

### 4.2.3 Propriétés des matrices diagrammatiques

Les matrices diagrammatiques permettent d'obtenir le crochet de KAUFFMAN clos ou non, mais celles-ci renferment d'autres propriétés intéressantes. Que peut-on dire des autres polynômes qui les composent ? Y a-t-il des liens entre les matrices à gauche et à droite ? Nous allons voir ce que ces matrices ont d'autres à offrir dans cette section.

Commençons par une proposition reliant les versions à gauche et à droite des matrices diagrammatiques.

**Proposition II.78.** *Supposons que les éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  soient notés  $W_k$  pour  $k$  dans  $\llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ . On a :*

$$\forall i, j, k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket, \quad (M_D(W_k))_{i,j} = (M_D^d(W_j))_{i,k}$$

*Démonstration :*

Par définition II.69, on a :

$$\begin{aligned} (M_{\mathcal{D}}(W_k))_{i,j} &= \begin{cases} \delta^c & \text{si } W_k W_j = \circ^c W_i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= (M_{\mathcal{D}}^d(W_j))_{i,k} \end{aligned}$$

□

Bien que cette propriété soit immédiate, ses applications sont minces. Il est pour commencer aisé de voir que son utilisation avec le produit matriciel est limitée, ou qu'elle ne ressemble pas du tout à une opération connue comme la transposée. Une autre propriété concerne le produit par une matrice diagrammatique associée à un élément de  $\mathcal{D}_n^K$ .

**Proposition II.79.** *Supposons que les éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  soient notés  $W_k$  pour  $k$  dans  $\llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ , et que  $\mathbb{1}_n$  est désigné par  $W_i$ . On a pour  $W_k$  fixé et  $\mathcal{D}$  un élément de  $\text{TL}_n(\delta)$  :*

$$\forall j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket, \quad (M_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})M_{\mathcal{D}}(W_k))_{j,i} = (M_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}))_{j,k}$$

*Démonstration :*

On développe :

$$\begin{aligned} (M_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})M_{\mathcal{D}}(W_k))_{j,i} &= \sum_{l \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} (M_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}))_{j,l} \underbrace{(M_{\mathcal{D}}(W_k))_{l,i}}_{\neq 0 \text{ pour } l=k} \\ &= (M_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}))_{j,k} \end{aligned}$$

On a le résultat attendu. □

*Remarque II.80.* Avec les deux propositions précédentes, on peut montrer que si  $W_i$  représente  $\mathbb{1}_n$ , alors :

$$\forall j, k, l \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket, \quad (M_{\mathcal{D}}^d(W_j)M_{\mathcal{D}}(W_k))_{l,i} = (M_{\mathcal{D}}(W_k)M_{\mathcal{D}}(W_j))_{l,i}$$

Cependant l'intérêt est limité, en effet si l'on remplace  $M_{\mathcal{D}}(W_k)$  par  $M_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$  avec  $\mathcal{D} \in \text{TL}_n(\delta)$  quelconque, l'égalité n'est plus vraie. Même chose en remplaçant  $W_j$ , et de plus les autres coefficients de ces matrices ne sont pas maîtrisés.

Nous avons vu qu'au sein d'une matrice diagrammatique, la colonne associée à  $\mathbb{1}_n$  a la particularité de contenir les polynômes de choix, chaque ligne étant corrélée avec l'élément auquel ils sont associés. Nous venons de voir que la colonne associée à  $W_k$  apparaît également en colonne  $\mathbb{1}_n$  après multiplication par la matrice  $M_{\mathcal{D}}(W_k)$ . Cela rappelle fortement la définition II.53 sur les clôtures de type  $W$ . En fait, la colonne associée à  $W_k$  serait tout bêtement celle à utiliser pour clôturer suivant le type  $W_k$ .

**Proposition II.81.** *Supposons que les éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  soient notés  $W_k$  avec  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ , comme dans la définition II.69; alors pour  $T \in \mathcal{B}_n^K$  nous avons :*

$$\text{Cl}_{W_k}(\langle T \rangle) = CM_{\mathcal{D}}(T)e_k$$

où  $e_k$  désigne le  $k^e$  vecteur canonique et  $C$  est le vecteur de composante tel que chaque coordonnée  $C_j$  est définie comme  $C_j = \delta^{c_j-1}$ , avec  $c_j$  le nombre de composantes après clôture standard de  $W_j$ .

*Démonstration :*

Fixons  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ . Par la proposition II.79, on a pour  $W_i$  représentant  $\mathbb{1}_n$  :

$$\forall j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket, \quad (M_{\mathcal{D}}(T))_{j,k} = (M_{\mathcal{D}}(T)M_{\mathcal{D}}(W_k))_{j,i} = (M_{\mathcal{D}}(TW_k))_{j,i}$$

En utilisant maintenant la proposition II.75, nous savons que  $(M_{\mathcal{D}}(TW_k))_{j,i}$  est égal au polynôme de choix associé à  $W_j$  présent dans  $\langle TW_k \rangle$ . Notons  $P_j$  le polynôme de choix présent dans  $\langle T \rangle$  associé à  $W_j$ , on a alors :

$$\langle TW_k \rangle = \langle T \rangle \langle W_k \rangle = \left( \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_j W_j \right) W_k = \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} Q_j W_j$$

et en particulier  $(M_D(TW_k))_{j,i} = Q_j$ . En rappelant que le vecteur de composantes est composé des coordonnées  $C_j$  dépendant de la clôture standard de  $W_j$ , nous pouvons finalement écrire :

$$\begin{aligned}
CM_D(T)e_k &= \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} C_j (M_D(TW_k))_{j,i} = \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} \text{Cl}(W_j)Q_j = \text{Cl} \left( \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} Q_j W_j \right) \\
&= \text{Cl} \left( \left( \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_j W_j \right) W_k \right) = \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_j \text{Cl}(W_j W_k) \\
&= \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_j \text{Cl}_{W_k}(W_j) \\
&= \text{Cl}_{W_k}(\langle T \rangle)
\end{aligned}$$

□

La proposition II.81 permet de définir une application de clôture pour les matrices diagrammatiques. Elle sera analogue à l'opération définie sur les éléments de  $\text{TL}_n(\delta)$ , et sera par ailleurs notée de la même manière.

**Définition II.82 – Clôture de type  $W$  – Matrice diagrammatique.**

Supposons que les éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  soient notés  $W_k$  avec  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ , comme dans la définition II.69. Pour  $T \in \mathcal{B}_n^K$  et  $W$  un élément réduit sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$ , on appelle *clôture de type  $W$  de la matrice diagrammatique  $M_D(T)$*  l'application :


$$\begin{aligned}
\text{Cl}_W : GL_{\text{Cat}(n)}(\mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]) &\rightarrow \mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}] \\
M_D(T) &\mapsto CM_D(T)e_W
\end{aligned}$$

où  $e_W$  est le  $k^e$  vecteur canonique avec  $k$  tel que  $W = W_k$ , et  $C$  est le vecteur défini tel que chaque coordonnée  $C_j$  vaut  $\text{Cl}(W_j)$ . Le vecteur  $e_W$  est appelé *vecteur de type*, et  $C$  est nommé *vecteur de composantes*.

Nous avons à présent tout le nécessaire pour calculer le polynôme de JONES d'un entrelacs à partir d'un mot de tresse qui lui est associé.

**Algorithme II.83 – Calcul du polynôme de JONES – avec les matrices.**

(Pseudo code ci-contre) Pour un mot de tresse à  $n$  brins  $\beta$  de longueur  $l$ , l'algorithme suivant permet de calculer le polynôme de JONES de l'entrelacs obtenu en clôturant la tresse représentée par  $\beta$ .

On note  $W_k$  les éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  avec  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ . Les polynômes de choix de  $\langle \beta \rangle$  sont regroupés dans un vecteur  $P$  dont les éléments sont indexés par les  $W_k$ . Une boucle s'occupe de l'action de chaque matrice diagrammatique  $M_D(\sigma_{i_j}^{e_j})$  sur  $P$ , où  $\sigma_{i_j}^{e_j}$  est la  $j^e$  lettre de  $\beta$ . La boucle doit commencer par la dernière lettre de  $\beta$ , car les matrices diagrammatiques à gauche représentent une action à gauche. Une fois le calcul de  $\langle \beta \rangle$  terminé avec la boucle, il nous suffit de définir le vecteur de composante  $C$ , contenant le nombre de composantes après clôture de chaque élément réduit  $W_k$ , puis de calculer le produit scalaire  $P \cdot C$  pour obtenir le crochet de KAUFFMAN. La détermination de l'entortillement est faite grâce aux puissances des lettres de  $\beta$ , car une tresse a tous ses brins orientés de la même façon, et par conséquent le signe d'un croisement correspond au signe de la lettre associée. Nous avons à partir de ce point tout ce qu'il faut pour finalement obtenir le polynôme de JONES. 

*Remarque II.84.* Il est parfaitement possible d'adapter l'algorithme II.83 pour calculer le crochet de KAUFFMAN de toutes les clôtures possibles de  $\beta$ , mais cela aura deux inconvénients : tout d'abord l'entortillement ne sera plus aussi simple à calculer, ensuite étant donné que l'on fera dans ce cas des produits de matrices carrés et non une évaluation d'un vecteur par une matrice, le nombre d'opération



Pour justifier de l'appellation « clôture partielle », on vérifie que cette définition est cohérente en comparaison avec la définition II.59.

**Proposition II.86.** *Avec les mêmes notations que la définition II.85, on a :*

$$\forall i, j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n-b) \rrbracket, \quad \left( \text{Cl}_W^{\pm b}(M_D(T)) \right)_{i,j} = R_{i,j}$$

où  $R_{i,j}$  correspond au polynôme associé à  $\mathcal{W}_i$  dans  $\text{Cl}_W^{\pm b}(\langle T \rangle) \mathcal{W}_j$ .

*Démonstration :*

Fixons  $j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n-b) \rrbracket$ . Avant de démontrer l'égalité, nous devons tout d'abord décrire la forme du polynôme  $R_{i,j}$ . Rappelons qu'avec la proposition II.60 nous pouvons écrire :

$$\forall \mathcal{V}_1 \in \mathcal{D}_n^K, \forall \mathcal{V}_2 \in \mathcal{D}_{n-b}^K, \quad \text{Cl}_W^{\pm b}(\mathcal{V}_1) \mathcal{V}_2 = \text{Cl}_W^{\pm b}(\mathcal{V}_1 \pi_d^{\text{shift}}(\mathcal{V}_2))$$

car en effet de par la définition II.57, l'élément  $\pi_d^{\text{shift}}(\mathcal{V}_2)$  ne contient pas de générateurs interagissant avec les brins clos. On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{Cl}_W^{\pm b}(\langle T \rangle) \mathcal{W}_j &= \text{Cl}_W^{\pm b}(\langle T \rangle \pi_d^{\text{shift}}(\mathcal{W}_j)) \quad \text{par proposition II.60} \\ &= \text{Cl}_W^{\pm b}(\langle T \rangle \mathcal{W}_{j'}) = \text{Cl}_W^{\pm b}(\langle T \rangle \langle \mathcal{W}_{j'} \rangle) \\ &= \text{Cl}_W^{\pm b}(\langle T \mathcal{W}_{j'} \rangle) \end{aligned}$$

où  $\pi_d^{\text{shift}}(\mathcal{W}_j) = \mathcal{W}_{j'}$ . En écrivant  $\langle T \mathcal{W}_{j'} \rangle$  comme sa somme de polynômes de choix :

$$\langle T \mathcal{W}_{j'} \rangle = \sum_{l \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_l \mathcal{W}_l$$

on a :

$$\begin{aligned} \text{Cl}_W^{\pm b}(\langle T \rangle) \mathcal{W}_j &= \text{Cl}_W^{\pm b} \left( \sum_{l \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_l \mathcal{W}_l \right) = \sum_{l \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_l \text{Cl}_W^{\pm b}(\mathcal{W}_l) \\ &= \sum_{i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n-b) \rrbracket} \left[ \sum_{l_i} \delta^{c_{l_i}} P_{l_i} \right] \mathcal{W}_i \end{aligned}$$

où  $l_i$  est tel que  $\text{Cl}_W^{\pm b}(\mathcal{W}_{l_i}) = \delta^{c_{l_i}} \mathcal{W}_i$ . Autrement dit, on a pour un  $i$  fixé :

$$R_{i,j} = \sum_{l_i} \delta^{c_{l_i}} P_{l_i} \quad \text{avec } l_i \text{ tel que } \text{Cl}_W^{\pm b}(\mathcal{W}_{l_i}) = \delta^{c_{l_i}} \mathcal{W}_i$$

Regardons maintenant ce que l'on obtient avec les matrices. Fixons dorénavant  $i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n-b) \rrbracket$ , de sorte à ne travailler que sur un seul coefficient de la matrice. Nous avons :

$$\left( \text{Cl}_W^{\pm b}(M_D(T)) \right)_{i,j} = (C M_D(T) S)_{i,j} = \sum_{l,k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} C_{i,l}(M_D(T))_{l,k} S_{k,j}$$

De par la définition de  $S$ ,  $S_{k,j}$  est non nul si  $W_k = \pi_d^{\text{shift}}(\mathcal{W}_j) = \mathcal{W}_{j'}$ . Ainsi,  $S_{k,j}$  est non nul si et seulement si  $k = j'$ . On a alors :

$$\left( \text{Cl}_W^{\pm b}(M_D(T)) \right)_{i,j} = \sum_{l \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} C_{i,l}(M_D(T))_{l,j'}$$

Maintenant par définition de  $C$ ,  $C_{i,l}$  est non nul et vaut  $\delta^{c_l}$  si  $\text{Cl}_W^{\pm b}(\mathcal{W}_l) = \delta^{c_l} \mathcal{W}_i$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left( \text{Cl}_W^{\pm b}(M_D(T)) \right)_{i,j} &= \sum_l \delta^{c_l} (M_D(T))_{l,j'} \quad \text{avec } l \text{ tel que } \text{Cl}_W^{\pm b}(\mathcal{W}_l) = \delta^{c_l} \mathcal{W}_i \\ &= \sum_l \delta^{c_l} (M_D(T) M_D(\mathcal{W}_{j'}))_{l, \text{id}} \quad \text{par proposition II.79} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_l \delta^{cl} \underbrace{(M_D(TW_{j'}))_{l, \text{id}}}_{=P_l} \\
&= R_{i,j}
\end{aligned}$$

où id est tel que  $W_{\text{id}} = \mathbb{1}_n$ . □

En plus des clôtures, comme ces matrices sont chacune les images d'une représentation de  $\text{TL}_n(\delta)$ , elles vérifient des propriétés propres aux tresses et au monoïde diagrammatique.

**Proposition II.87.** *Pour  $n \geq 1$ , les matrices diagrammatiques associées aux générateurs de  $\mathcal{B}_n^K$  vérifient les mêmes relations, à réécriture près, que ces générateurs; à savoir :*

(i) venant de  $B_n$  :

$$\begin{cases} M_D(\sigma_i^{-1}) = M_D^{-1}(\sigma_i) & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\ M_D(\sigma_i)M_D(\sigma_j)M_D(\sigma_i) = M_D(\sigma_j)M_D(\sigma_i)M_D(\sigma_j) & \text{pour } |i-j| = 1, \\ M_D(\sigma_i)M_D(\sigma_j) = M_D(\sigma_j)M_D(\sigma_i) & \text{pour } |i-j| > 1, \end{cases}$$

(ii) venant de  $\mathcal{D}_n^K$  :

$$\begin{cases} M_D^2(u_i) = \delta M_D(u_i) & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\ M_D(u_i)M_D(u_j)M_D(u_i) = M_D(u_i) & \text{pour } |i-j| = 1, \\ M_D(u_i)M_D(u_j) = M_D(u_j)M_D(u_i) & \text{pour } |i-j| > 1, \end{cases}$$

(iii) décrivant le 1<sup>er</sup> mouvement de REIDEMEISTER :

$$\begin{cases} M_D^e(\sigma_i)M_D(u_i) = -\tau^{-3e}M_D(u_i) = M_D(u_i)M_D^{\pm e}(\sigma_i) & \text{pour } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \text{ et } e = \pm 1, \\ M_D(u_i)M_D^e(\sigma_j)M_D(u_i) = -\tau^{3e}M_D(u_i) & \text{pour } |i-j| = 1 \text{ et } e = \pm 1, \end{cases}$$

(iv) et celles dites de reconfiguration :

$$\begin{cases} M_D(\sigma_i^e)M_D(\sigma_j^e)M_D(u_i) = M_D(u_j)M_D(\sigma_i^e)M_D(\sigma_j^e) & \text{pour } |i-j| > 1 \text{ et } e = \pm 1, \\ M_D(\sigma_i^e)M_D(\sigma_j^e)M_D(u_i) = M_D(u_j)M_D(u_i) & \text{pour } |i-j| > 1 \text{ et } e = \pm 1, \\ M_D(u_i)M_D(\sigma_j^e) = M_D(u_i)M_D(u_j)M_D(\sigma_i^{-e}) & \text{pour } |i-j| = 1 \text{ et } e = \pm 1, \\ M_D(\sigma_j^e)M_D(u_i) = M_D(\sigma_i^{-e})M_D(u_j)M_D(u_i) & \text{pour } |i-j| = 1 \text{ et } e = \pm 1. \end{cases}$$

*Démonstration :*

Les trois relations venant de  $\mathcal{D}_n^K$  sont des conséquences du théorème II.73, les autres en découlent ensuite. Nous allons seulement vérifier certaines dont l'écriture diffèrent légèrement des relations entre les générateurs. Pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  :

$$\begin{aligned}
M_D(\sigma_i)M_D(\sigma_i^{-1}) &= (\tau^{-1}M_D(\mathbb{1}_n) + \tau M_D(u_i)) (\tau M_D(\mathbb{1}_n) + \tau^{-1}M_D(u_i)) \\
&= M_D(\mathbb{1}_n) + \underbrace{(\tau^{-2} + \tau^2 + \delta)}_{=0} M_D(u_i) \\
&= M_D(\mathbb{1}_n)
\end{aligned}$$

où par définition II.69,  $M_D(\mathbb{1}_n)$  est la matrice identité de taille  $\text{Cat}(n)$ . De plus, on a de façon similaire :

$$M_D(\sigma_i^{-1})M_D(\sigma_i) = M_D(\mathbb{1}_n)$$

d'où  $M_D(\sigma_i^{-1}) = M_D(\sigma_i)^{-1}$ . Ensuite, nous avons pour  $e = \pm 1$  :

$$\begin{aligned}
M_D^{\pm e}(\sigma_i)M_D(u_i) &= M_D(\sigma_i^e)M_D(u_i) \\
&= (\tau^e M_D(\mathbb{1}_n) + \tau^{-e} M_D(u_i)) M_D(u_i) \\
&= \tau^e M_D(u_i) + \tau^{-e} \delta M_D(u_i)
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{(\tau^e + \tau^{-e}\delta)}_{=-\tau^{-3e}} M_D(u_i)$$

d'où  $M_D^{\pm e}(\sigma_i)M_D(u_i) = -\tau^{-3e}M_D(u_i)$ . La deuxième partie de cette égalité se montre de la même manière. L'autre relation concernant le premier mouvement de REIDEMEISTER donne pour  $|i - j| = 1$  :

$$\begin{aligned} M_D(u_i)M_D^{\pm e}(\sigma_j)M_D(u_i) &= M_D(u_i)M_D(\sigma_j^e)M_D(u_i) \quad \text{avec } e = \pm 1 \\ &= M_D(u_i) (\tau^e M_D(\mathbb{1}_n) + \tau^{-e} M_D(u_j)) M_D(u_i) \\ &= \tau^e \delta M_D(u_i) + \tau^{-e} M_D(u_i) M_D(u_j) M_D(u_i) \\ &= \underbrace{(\tau^e \delta + \tau^{-e})}_{=-\tau^{-3e}} M_D(u_i) \end{aligned}$$

□

Ces matrices permettent aussi d'obtenir des informations sur la structure des polynômes obtenus avec le crochet de KAUFFMAN normalisé. Remarquons d'abord la propriété suivante :

**Proposition II.88.** *Pour  $\beta$  une tresse à  $n$  brins et  $M_D(\beta)$  sa matrice diagrammatique, et suivant la valeur de  $\tau$ , la somme des coefficients d'une colonne de  $M_D(\beta)$  donne :*

- (i)  $(-1)^l$  avec  $l$  la longueur de la tresse quand  $\tau = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$ ,
- (ii) 1 quand  $\tau = e^{\pm i \frac{2\pi}{6}}$ .

*Démonstration :*

Pour le premier cas, en notant  $z_1 = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ , remarquons tout d'abord que :

$$\begin{cases} \tau + \tau^{-1} &= z_1 + z_1^{-1} = z_1 + z_1^2 &= -1 \\ -\tau^{-3e} &= -(z_1^3)^{-e} &= -1 \end{cases}$$

avec  $e = \pm 1$ . Suivant la définition II.74, pour une lettre  $\sigma_i^e$  où  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , sa matrice diagrammatique est décrite comme :

$$M_D(\sigma_i) = \tau^e M_D(\mathbb{1}_n) + \tau^{-e} M_D(u_i)$$

Rappelons que les matrices  $M_D(\mathbb{1}_n)$  et  $M_D(u_i)$  ne contiennent qu'un seul coefficient non nul par colonne. On en déduit que  $M_D(\sigma_i)$  a au maximum deux coefficients non nuls par colonne, et même nous pouvons dire que la somme des coefficients d'une colonne vaut :

$$\begin{cases} \tau + \tau^{-1} & \text{si la colonne de } M_D(u_i) \text{ contient } 1, \\ \tau^e + \delta\tau^{-e} = -\tau^{-3e} & \text{si la colonne de } M_D(u_i) \text{ contient } \delta. \end{cases}$$

Cela montre que la matrice  $M_D(\sigma_i^e)$  vérifie la proposition. Il reste à vérifier que cette propriété se conserve lors du produit matriciel avec d'autres matrices diagrammatiques représentant des tresses. Supposons donc que  $M_D(\beta)$  vérifie la proposition avec  $\beta$  une tresse de longueur  $l$  et étudions le produit suivant :

$$(M_D(\beta)M_D(\sigma_k^e))_{i,j} = \sum_{a \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} (M_D(\beta))_{i,a} (M_D(\sigma_k^e))_{a,j}$$

La somme des éléments de la  $j^e$  colonne s'écrit alors :

$$\sum_{i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} (M_D(\beta)M_D(\sigma_k^e))_{i,j} = \sum_{i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} \left[ \sum_{a \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} (M_D(\beta))_{i,a} (M_D(\sigma_k^e))_{a,j} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} \left[ (M_D(\sigma_k^e))_{a,j} \underbrace{\sum_{i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} (M_D(\beta))_{i,a}}_{=(-1)^l \text{ par hypothèse}} \right] \\
&= (-1)^l \underbrace{\sum_{a \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} [(M_D(\sigma_k^e))_{a,j}]}_{=-1} \\
&= (-1)^{l+1}
\end{aligned}$$

Cela démontre le premier cas. Pour le deuxième nous remarquons que pour  $z_2 = e^{\pm i \frac{2\pi}{6}} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ , on a :

$$\begin{cases} \tau + \tau^{-1} &= z_2 + z_2^{-1} = z_2 + z_2^5 &= 1 \\ -\tau^{-3e} &= -(z_2^3)^{-e} = -(-1)^{-e} &= 1 \end{cases}$$

avec  $e = \pm 1$ . En suivant le même raisonnement que pour le premier cas, on montre sans soucis que la somme d'une colonne d'une matrice diagrammatique représentant une tresse vaut 1 quand  $\tau = z_2$ .  $\square$

Voici maintenant la propriété mentionnée auparavant, qui est déjà décrite par le théorème I.90 dans le cas des nœuds.

**Lemme II.89.** *Quel que soit  $L$  un diagramme d'entrelacs, le crochet de KAUFFMAN normalisé de  $L$  s'écrit sous la forme :*

$$\chi_L(\tau) = 1 + (\tau^4 + \tau^2 + 1) R(\tau)$$

avec  $R$  un polynôme de reste.

*Démonstration :*

Nous avons vu grâce au théorème II.56 et la proposition II.77 que pour  $\beta$  une tresse à  $n$  brins on a :

$$\langle \widehat{\beta} \rangle = \text{Cl}_{\mathbb{1}_n}(\langle \beta \rangle) = \text{Cl}_{\mathbb{1}_n}(M_D(\beta)) = CM_D(\beta)e_i$$

où  $\widehat{\beta}$  est le diagramme de la tresse  $\beta$  close,  $i$  désigne la colonne de la matrice  $M_D(\beta)$  associé à  $\mathbb{1}_n$  et  $C$  est le vecteur de composantes. Nous avons alors :

$$CM_D(\beta)e_i = \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} C_j(M_D(\beta))_{j,i} = \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} \delta^{c_j-1} (M_D(\beta))_{j,i}$$

où  $c_j$  correspond au nombre de composantes après clôture standard de  $u_j$ . Remarquons ensuite que pour  $z_1 = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = e^{\pm i \frac{2\pi}{6}} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$  on a :

$$\begin{cases} -z_1^2 - z_1^{-2} &= -z_1^2 - z_1 &= 1 \\ -z_2^2 - z_2^{-2} &= -z_1 - z_1^{-1} = -z_1 - z_1^2 &= 1 \end{cases}$$

De là on en déduit que l'évaluation de  $\delta$  en  $z_1$  ou  $z_2$  vaut 1. En combinant cette remarque avec la proposition II.88, on a :

$$\begin{aligned}
CM_D(\beta)e_i &= \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} \delta^{c_j-1} (M_D(\beta))_{j,i} \\
&= \begin{cases} \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} 1^{c_j-1} (M_D(\beta))_{j,i} & \text{si } \tau = z_1, \\ \sum_{j \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} 1^{c_j-1} (M_D(\beta))_{j,i} & \text{si } \tau = z_2, \end{cases} \\
&= \begin{cases} (-1)^l & \text{si } \tau = z_1 \text{ avec } l \text{ la longueur de } \beta, \\ 1 & \text{si } \tau = z_2, \end{cases}
\end{aligned}$$

À présent nous devons normaliser le crochet de KAUFFMAN. La normalisation s'effectue en multipliant le crochet avec le coefficient  $(-\tau^{-3})^{\text{wr}(\beta)}$ , où  $\text{wr}(\beta)$  est l'entortillement, calculable en fonction du nombre de lettres positives et négatives de  $\beta$  :

$$\text{wr}(\beta) = \text{Card}(\{\text{lettres positive de } \beta\}) - \text{Card}(\{\text{lettres négative de } \beta\})$$

En particulier, si la longueur de  $\beta$  est paire, cette différence ne peut être que paire ; et de même si la longueur de  $\beta$  est impaire l'entortillement  $\text{wr}(\beta)$  est aussi impair. Rappelons également que :

$$\begin{cases} -z_1^{-3} &= -(z_1^3)^{-1} = -1^{-1} &= -1 \\ -z_2^{-3} &= -(z_2^3)^{-1} = -(-1)^{-1} &= 1 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \chi_{\widehat{\beta}} &= (-\tau^{-3})^{\text{wr}(\beta)} \langle \widehat{\beta} \rangle \\ &= \begin{cases} (-1)^e (-1)^e & \text{si } \tau = z_1 \text{ avec } e \in \llbracket 0, 1 \rrbracket \text{ suivant la parité de la longueur de } \beta, \\ 1 & \text{si } \tau = z_2, \end{cases} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit que les complexes  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ,  $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ ,  $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$  et  $e^{-i\frac{4\pi}{3}}$  sont racines du polynôme  $\chi_{\widehat{\beta}} - 1$ . Nous en déduisons que ce polynôme s'écrit  $\chi_{\widehat{\beta}}(\tau) = 1 + (\tau^4 + \tau^2 + 1) \times R(\tau)$  avec  $R$  un polynôme de reste. De plus par le théorème I.104, nous savons que tout entrelacs peut être représenté par une tresse close, on en déduit donc que le crochet de KAUFFMAN normalisé s'écrit toujours de cette façon.  $\square$

*Remarque II.90.* Il faut savoir que les résultats de JONES [Jon85, Theorem 14–16 p. 107], décrits au théorème I.90, montrent que pour tout nœud  $K$ , le polynôme de JONES s'écrit comme :

$$V_K(t) = 1 + (t^3 - 1)(t - 1)R(t)$$

avec  $R$  un polynôme de reste. Ainsi le crochet de KAUFFMAN normalisé d'un nœud  $K$  devrait s'écrire :

$$\chi_K(\tau) = 1 + \tau^{-16}(\tau^{12} - 1)(\tau^4 - 1)R(\tau^{-4}).$$

On remarque alors que  $\tau^4 + \tau^2 + 1$  est un diviseur de  $\tau^{12} - 1$ , ce qui montre que le théorème I.90 est une amélioration du lemme II.89 dans le cas des nœuds.

Le lemme II.89 permet d'en déduire une forme d'écriture pour le polynôme de JONES pour tout entrelacs.

### **Théorème II.91 – Forme générale du polynôme de JONES.**

Quel que soit  $L$  un diagramme d'entrelacs, le polynôme de JONES de  $L$  s'écrit sous la forme :

$$V_L(t) = 1 + \left(t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1\right) R(t)$$

avec  $R$  un polynôme de reste. Si  $L = \textcircled{k}$  est l'entrelacs trivial à  $k$  composantes, alors son polynôme de JONES s'écrit exactement comme :

$$V_{\textcircled{k}}(t) = 1 + \left(t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1\right) \sum_{i=1}^{k-1} \left[ \binom{k-1}{i} (-\sqrt{t})^i \left(t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1\right)^{i-1} \right]$$

*Démonstration :*

Nous savons déjà par le lemme II.89 que :

$$\chi_L(\tau) = 1 + (\tau^4 + \tau^2 + 1) R(\tau)$$

Or le polynôme de JONES de  $L$  est obtenu à partir de  $\chi_L$  par un changement de variable, ce qui donne :

$$V_L = \chi_L \left( t^{-\frac{1}{4}} \right) = 1 + \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right) R' (t)$$

où  $R' (t) = R \left( t^{-\frac{1}{4}} \right)$ . Cela montre la première affirmation. Concernant la deuxième, il faut remarquer que :

$$\chi_{\textcircled{k}} (\tau) = (-\tau^3)^{-\text{wr}} \left( \textcircled{k} \right) \left\langle \textcircled{k} \right\rangle = \delta^{k-1}$$

Ce qui donne après changement de variable :

$$\begin{aligned} V_{\textcircled{k}} (t) &= \left( -\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{k-1} \quad \text{car } \delta = -\tau^2 - \tau^{-2} \\ &= \left( 1 - \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right) \sqrt{t} \right)^{k-1} \quad \text{car } 1 - \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right) \sqrt{t} = -\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \left[ \binom{k-1}{i} (-\sqrt{t})^i \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right)^i \right] \\ &= 1 + \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right) \sum_{i=1}^{k-1} \left[ \binom{k-1}{i} (-\sqrt{t})^i \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right)^{i-1} \right] \end{aligned}$$

□

✓ *Exemple II.92.* Si  $L$  est l'entrelacs de HOPF, alors son polynôme de JONES s'écrit :

$$V_L (t) = -\sqrt{t} - t^2 \sqrt{t} = 1 - \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right) (t^2 \sqrt{t} - t^2 + t)$$

et pour  $L'$  son image miroir :

$$V_{L'} (t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2 \sqrt{t}} = 1 + \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right) \left( \frac{-1}{t \sqrt{t}} + t^{-1} - 1 \right)$$

*Remarques II.93.*

1. Le théorème II.91 est certainement optimal à un facteur  $\pm \sqrt{t}$  près dans le cadre général, en effet l'entrelacs trivial à deux composantes s'écrit comme  $V_{\textcircled{2}} (t) = 1 - \sqrt{t} \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right)$ , ce qui est l'écriture la plus simple après celle du nœud trivial.
2. Cette factorisation est aussi valable pour les nœuds, en effet remarquons que :

$$\begin{aligned} \left( t^{-1} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 1 \right) \left[ (1 - \sqrt{t} + t) (t - 1) \right] &= t^{-1} (t + \sqrt{t} + 1) (1 - \sqrt{t} + t) (t - 1) \\ &= t^{-1} (t^2 + t + 1) (t - 1) \\ &= t^{-1} (t^3 - 1) \end{aligned}$$

Or le terme  $t^3 - 1$  apparaît bien dans le théorème I.90, cela fait le lien avec la factorisation proposée par le théorème II.91 qui convient aux nœuds. Notre factorisation est seulement moins optimale pour ces objets particuliers.

Pour revenir aux matrices diagrammatiques représentant les tresses à  $n$  brins, il faut noter que celles-ci engendrent un groupe matriciel  $\mathcal{G}_n$  ayant les mêmes relations que le groupe des tresses. Si cette représentation vue en théorème II.73 est fidèle, alors ces matrices donneraient une autre preuve de la linéarité du groupe  $B_n$ , déjà démontré indépendamment par BIGELOW [Big00, Theorem 1.1 p. 471] et par KRAMMER [Kra02, Theorem 4.6 p. 145]. Ceci amène à la question suivante :

■ **Problème II.94** – Pour  $n \geq 2$ , la représentation associant à chaque tresse de  $B_n$  sa matrice

### diagrammatique est-elle fidèle ?

Si pour  $n = 2$  la réponse est immédiate puisque  $B_2 \simeq \mathbb{Z}$ , ce n'est pas le cas pour  $n \geq 3$ . En fait, la réponse à cette question dépend surtout des polynômes de choix, qui apparaissent ou qui sont fortement liés à tous les coefficients de ces matrices. Si l'on pouvait montrer que l'ensemble des polynômes de choix est fidèle à la tresse depuis laquelle ils ont été calculés, ce qui revient au problème II.52, alors on aurait une réponse positive au problème II.94

## 4.3 Étude par blocs

L'idée principale derrière la notation de CONWAY, autrement dit avec les enchevêtrements, c'est de pouvoir diviser un entrelacs  $L$  en plusieurs morceaux indépendants. Afin de simplifier au maximum la structure de ces pièces composant  $L$ , nous pouvons choisir de le diviser de sorte que chaque enchevêtrement ne soit qu'une succession de croisements alignés. Si choisir une telle division ne permet pas en général d'écrire  $L$  comme un enchevêtrement algébrique, elle transforme son étude et notamment le calcul de son crochet de KAUFFMAN, en séparant les « blocs » de croisements de leur assemblage général.

### 4.3.1 Les blocs de croisements

Comme dit dans l'introduction, les blocs de croisements sont des portions de diagramme constituées uniquement de croisements alignés, c'est-à-dire :

#### Définition II.95 – Bloc de croisements.

Un *bloc de croisements* est un 2-enchevêtrement isotope, à rotation près, à une tresse à 2 brins. La tresse  $\mathbb{1}_2$  est le seul bloc de croisements n'ayant aucun croisement.

De par la forme des blocs, tous les croisements qui les composent sont de même signe ou peuvent être réduits pour que ce soit le cas, quitte à obtenir  $\mathbb{1}_2$ . On définit de facto le signe d'un bloc en fonction du signe des croisements composant la tresse isotope à ce bloc.

#### Définition II.96 – Signe d'un bloc de croisement.

Le *signe* d'un bloc de croisements  $\mathcal{B}$  est un entier  $e \in \llbracket -1, 1 \rrbracket$  tel que :

$$e = \begin{cases} 1 & \text{si la tresse isotope à } \mathcal{B} \text{ ne contient que des } \sigma_1, \\ 0 & \text{si } \mathcal{B} \text{ est isotope à } \mathbb{1}_2, \\ -1 & \text{si la tresse isotope à } \mathcal{B} \text{ ne contient que des } \sigma_1^{-1}. \end{cases}$$

*Remarque II.97.* Une tresse à 2 brins sera isotope à son image par une rotation d'angle  $\pi$ , ce qui évite un conflit pour déterminer le signe d'un bloc. La seule exception qui pose problème sont les blocs composés d'un unique croisement, car ceux-ci restent des tresses à 2 brins après une rotation d'angle  $\pi/2$  ce qui change leur signe. Il convient alors de décider pour chaque bloc de ce type un appariement standard fixant ainsi la direction de lecture de ce croisement, et fixant ainsi son signe.

Les blocs de croisements étant isotopes à des tresses, tout ce qui a été décrit en section 4.2 s'applique, et notamment la vision du crochet de KAUFFMAN non clos comme un morphisme. Nous pouvons alors déjà énoncer le résultat suivant :

**Proposition II.98.** *Pour  $\mathcal{B}$  un bloc de  $k$  croisements de signe  $e$ , le crochet de KAUFFMAN non clos de  $\mathcal{B}$  s'exprime comme :*

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \tau^{ek} \left( \mathbb{1}_2 + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i+1} \tau^{-2e(i+1)} \delta^i \right) u_1$$

$$= \tau^{ek} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i \binom{k}{i+1} \binom{i}{j} (-1)^i \tau^{-2e(2j+1)} \right] u_1 \right)$$

*Démonstration :*

On développe le crochet en sa somme des états :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B} \rangle &= \sum_{S \in \llbracket 0,1 \rrbracket^k} \langle \mathcal{B} \mid S \rangle \\ &= \tau^{ek} \mathbb{1}_2 + \left[ \sum_{\substack{S \in \llbracket 0,1 \rrbracket^k \\ S \neq (0, \dots, 0)}} \tau^{e(k-2|S|)} \delta^{|S|-1} \right] u_1 \quad \text{où } |S| = \sum_{i=1}^k S_i \\ &= \tau^{ek} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \tau^{-2ei} \delta^{i-1} \right] u_1 \right) \\ &= \tau^{ek} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i+1} \tau^{-2e(i+1)} \delta^i \right] u_1 \right) \end{aligned}$$

Le passage à la deuxième ligne fait référence aux différents états possibles du diagramme suivant le choix de séparations  $S$ . On remarque alors que pour une valeur  $|S|$  fixée, les termes correspondant dans la somme sont les mêmes, et comme le nombre de ces termes est donné par un coefficient binomial, nous avons le passage à la troisième ligne. La dernière étape est seulement une ré-indexation de la somme. Cela nous donne la première égalité, pour obtenir la deuxième il faut maintenant développer la puissance de  $\delta$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B} \rangle &= \tau^{ek} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i+1} \tau^{-2e(i+1)} \delta^i \right] u_1 \right) \quad \text{et } \delta = -\tau^{2e} - \tau^{-2e} \text{ pour } e = \pm 1 \\ &= \tau^{ek} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i+1} \tau^{-2e(i+1)} \left( \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^j \tau^{2e(i-2j)} \right) \right] u_1 \right) \\ &= \tau^{ek} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i \binom{k}{i+1} \binom{i}{j} (-1)^j \tau^{-2e(2j+1)} \right] u_1 \right) \end{aligned}$$

Nous avons dû supposer que  $e = \pm 1$  pour passer à la deuxième ligne. On remarque cependant que le signe du bloc  $e$  est nul si et seulement si  $k = 0$ , or dans ce cas la première somme n'a pas de terme et on retrouve bien  $\langle \mathcal{B} \rangle = \mathbb{1}_2$ . Ce dernier résultat est donc valable pour  $e = 0$  également.  $\square$

L'expression donnée dans la proposition II.98 est intéressante si l'on étudie le crochet de KAUFFMAN non clos en considérant  $\delta$  comme une variable, et montre l'influence des puissances de  $\delta$  comme une somme télescopique de puissance de  $\tau$ . Si l'on souhaite une expression plus directe, on préférera alors plutôt la proposition suivante :

**Proposition II.99.**  $\dagger$  Pour  $\mathcal{B}$  un bloc de  $k$  croisements de signe  $e$ , le crochet de KAUFFMAN non clos de  $\mathcal{B}$  s'exprime comme :

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \tau^{ek} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \tau^{-2e(2i+1)} \right] u_1 \right)$$

$\dagger$ . Je remercie chaleureusement Shalom de m'avoir parlé de ce résultat.

*Démonstration :*

Nous allons montrer cette égalité par récurrence sur  $k$ . Si  $k = 0$  alors la somme n'a pas de termes, ce qui donne bien  $\langle \mathcal{B} \rangle = \mathbb{1}_2$ . Pour  $k = 1$ , nous avons :

$$\tau^e \left( \mathbb{1}_2 + \left[ (-1)^0 \tau^{-2e} \right] u_1 \right) = \tau^e \left( \mathbb{1}_2 + \tau^{-2e} u_1 \right) = \langle \sigma_1^e \rangle$$

Supposons que l'égalité soit vraie pour un bloc  $\mathcal{B}$  de  $k$  croisements de signe  $e$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B} \sigma_1^e \rangle &= \langle \mathcal{B} \rangle \langle \sigma_1^e \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle \tau^e \left( \mathbb{1}_2 + \tau^{-2e} u_1 \right) \\ &= \tau^{e(k+1)} \left( \mathbb{1}_2 + \Sigma_{\mathcal{B}} u_1 \right) \left( \mathbb{1}_2 + \tau^{-2e} u_1 \right) \quad \text{où } \Sigma_{\mathcal{B}} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \tau^{-2e(2i+1)} \\ &= \tau^{e(k+1)} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \tau^{-2e} + \Sigma_{\mathcal{B}} + \tau^{-2e} \delta \Sigma_{\mathcal{B}} \right] u_1 \right) \\ &= \tau^{e(k+1)} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \tau^{-2e} + \Sigma_{\mathcal{B}} - (\tau^{-4e} + 1) \Sigma_{\mathcal{B}} \right] u_1 \right) \\ &= \tau^{e(k+1)} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \tau^{-2e} - \tau^{-4e} \Sigma_{\mathcal{B}} \right] u_1 \right) \\ &= \tau^{e(k+1)} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \tau^{-2e} + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \tau^{-2e(2(i+1)+1)} \right] u_1 \right) \\ &= \tau^{e(k+1)} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \tau^{-2e} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \tau^{-2e(2i+1)} \right] u_1 \right) \\ &= \tau^{e(k+1)} \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \sum_{i=0}^k (-1)^i \tau^{-2e(2i+1)} \right] u_1 \right) \end{aligned}$$

□

*Remarque II.100.* Pour tout  $k \geq 1$  et  $e = \pm 1$ , on a l'égalité :

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^i \binom{k}{i+1} \binom{i}{j} (-1)^i \tau^{-2e(2j+1)} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \tau^{-2e(2i+1)}$$

Il est amusant de voir que l'écriture des termes se ressemble d'une somme à l'autre. Rappelons toutefois que la somme de gauche est télescopique, en particulier pour  $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$  fixé les termes :

$$\sum_{j=0}^i \binom{k}{i+1} \binom{i}{j} (-1)^i \tau^{-2e(2j+1)} \quad \text{et} \quad (-1)^i \tau^{-2e(2i+1)}$$

sont différents.

Il convient de donner une notation et un nom à cette somme associée à  $u_1$ .

**Définition II.101 –  $\mathcal{B}$ -somme.**

Pour  $\mathcal{B}$  un bloc de  $k$  croisements de signe  $e$ , on appelle  $\mathcal{B}$ -somme la quantité :

$$\Sigma_{\mathcal{B}} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \tau^{-2e(2i+1)}$$

Comme  $\mathcal{B}$  est déterminé par  $k$  et  $e$ , la  $\mathcal{B}$ -somme peut également être notée  $\Sigma_{ek}$ .

Les  $\mathcal{B}$ -sommations vérifient la propriété suivante :

**Proposition II.102.** Pour  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  des blocs de  $k$  et  $k'$  croisements de signe  $e$  et  $e'$  respectivement, on a :

$$\Sigma_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \Sigma_{\mathcal{B}} + \Sigma_{\mathcal{B}'} + \delta \Sigma_{\mathcal{B}} \Sigma_{\mathcal{B}'}$$

où  $\mathcal{B}\mathcal{B}'$  désigne la concaténation au sens des tresses de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

*Démonstration :*

Étant donné que  $\mathcal{B}\mathcal{B}'$  correspond à la tresse  $(\sigma_1^e)^k (\sigma_1^{e'})^{k'}$ , d'un côté on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}\mathcal{B}' \rangle &= \left\langle :(\sigma_1^e)^k (\sigma_1^{e'})^{k'} : \right\rangle = \left\langle :(\sigma_1^e)^k : \right\rangle \left\langle :(\sigma_1^{e'})^{k'} : \right\rangle = \tau^{ek} (\mathbb{1}_2 + \Sigma_{\mathcal{B}} u_1) \tau^{e'k'} (\mathbb{1}_2 + \Sigma_{\mathcal{B}'} u_1) \\ &= \tau^{ek+e'k'} (\mathbb{1}_2 + [\Sigma_{\mathcal{B}} + \Sigma_{\mathcal{B}'} + \delta \Sigma_{\mathcal{B}} \Sigma_{\mathcal{B}'}] u_1) \end{aligned}$$

et de l'autre :

$$\langle \mathcal{B}\mathcal{B}' \rangle = \left\langle :(\sigma_1^e)^k (\sigma_1^{e'})^{k'} : \right\rangle = \left\langle :\sigma_1^{ek+e'k'} : \right\rangle = \tau^{ek+e'k'} (\mathbb{1}_2 + \Sigma_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} u_1)$$

d'où l'égalité souhaitée.  $\square$

On remarque l'apparition d'un produit de  $\mathcal{B}$ -somme dans la proposition II.102, bien que nous n'ayons pas eu besoin de l'explicitier dans ce cas, il est néanmoins intéressant d'étudier le comportement des  $\mathcal{B}$ -sommés vis-à-vis du produit. En effet, il ne faut pas oublier que le but est ensuite de recoller les blocs de croisements de différentes façons, de tels produits apparaîtront forcément à ce moment-là.

### 4.3.2 Les produits de $\mathcal{B}$ -sommés

Expliciter le résultat d'un produit entre plusieurs  $\mathcal{B}$ -sommés n'est pas aussi simple que l'on pourrait le croire. Nous avons à notre avantage que ces sommés sont des polynômes, et nous avons de ce fait déjà un certain nombre d'informations sur ce résultat : ce sera un polynôme, on peut même connaître en avance son degré aussi bien maximal que minimal, mêmes ses racines si celles des  $\mathcal{B}$ -sommés sont connues. Mais l'expression de ce résultat sous la forme d'une somme simple avec des coefficients explicités demande un peu plus de travail.

Nous allons avoir besoin d'exprimer le degré minimal et maximal d'un produit de  $\mathcal{B}$ -sommés, commençons donc par donner une expression de cette quantité. On remarquera qu'un bloc de signe nul à une  $\mathcal{B}$ -somme nulle, on les évitera donc pour la suite.

**Proposition II.103.** *Soient  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_l$  des blocs de  $k_1, \dots, k_l$  croisements de signe  $e_1, \dots, e_l$  non nuls respectivement. Le degré minimal et maximal de  $\Sigma_{\mathcal{B}_1} \cdots \Sigma_{\mathcal{B}_l}$  sont exprimés comme :*

$$\deg_{\min} (\Sigma_{\mathcal{B}_1} \cdots \Sigma_{\mathcal{B}_l}) = -2E - 4 \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i > 0}} [k_i - 1]$$

et

$$\deg_{\max} (\Sigma_{\mathcal{B}_1} \cdots \Sigma_{\mathcal{B}_l}) = -2E + 4 \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i < 0}} [k_i - 1]$$

où  $E = \sum_{i=1}^l e_i$ .

*Démonstration :*

Considérons maintenant un bloc  $\mathcal{B}$  de  $k$  croisements avec un signe  $e$  non nul. Alors par l'expression donnée en définition II.101, on remarque que :

$$\deg_{\min} (\Sigma_{\mathcal{B}}) = \begin{cases} -2 - 4(k-1) & \text{si } e = 1 \\ 2 & \text{si } e = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \deg_{\max} (\Sigma_{\mathcal{B}}) = \begin{cases} 2 + 4(k-1) & \text{si } e = -1 \\ -2 & \text{si } e = 1 \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
\deg_{\min}(\Sigma_{\mathcal{B}_1} \cdots \Sigma_{\mathcal{B}_l}) &= \sum_{i=1}^l \deg_{\min}(\Sigma_{\mathcal{B}_i}) = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i < 0}} (2) + \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i > 0}} (-2 - 4(k_i - 1)) \\
&= -2E - 4 \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i > 0}} [k_i - 1] \\
\deg_{\max}(\Sigma_{\mathcal{B}_1} \cdots \Sigma_{\mathcal{B}_l}) &= \sum_{i=1}^l \deg_{\max}(\Sigma_{\mathcal{B}_i}) = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i > 0}} (-2) + \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i < 0}} (2 + 4(k_i - 1)) \\
&= -2E + 4 \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i < 0}} [k_i - 1]
\end{aligned}$$

□

Regardons à présent ce que nous pouvons déjà dire à propos d'un produit de  $\mathcal{B}$ -sommés.

**Proposition II.104.** Soient  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_l$  des blocs de  $k_1, \dots, k_l$  croisements de signe  $e_1, \dots, e_l$  non nuls respectivement. Le produit des  $\mathcal{B}$ -sommés de ces blocs s'exprime comme :

$$\Sigma_{\mathcal{B}_1} \cdots \Sigma_{\mathcal{B}_l} = \tau^{-2E} \sum_{i=m}^M s_i (-\tau^{-4})^i$$

avec

$$m = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i < 0}} [1 - k_i] \quad \text{et} \quad M = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i > 0}} [k_i - 1]$$

où  $E = \sum_{j=1}^l e_j$  et les  $s_i$  sont des coefficients entiers.

*Démonstration :*

Écrivons tout d'abord chaque terme après développement du produit :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathcal{B}_1} \cdots \Sigma_{\mathcal{B}_l} &= \left( \sum_{i_1=0}^{k_{i_1}-1} (-1)^{i_1} \tau^{-2e_1(2i_1+1)} \right) \cdots \left( \sum_{i_l=0}^{k_{i_l}-1} (-1)^{i_l} \tau^{-2e_l(2i_l+1)} \right) \\
&= \sum_{i_1=0}^{k_{i_1}-1} \cdots \sum_{i_l=0}^{k_{i_l}-1} (-1)^I \tau^{-2(2C+E)} \quad \text{où } I = \sum_{j=0}^l i_j, \quad C = \sum_{j=0}^l e_j i_j, \quad E = \sum_{j=0}^l e_j \\
&= \tau^{-2E} \sum_{i_1=0}^{k_{i_1}-1} \cdots \sum_{i_l=0}^{k_{i_l}-1} (-1)^I \tau^{-4C}
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que  $I$  et  $C$  sont de même parité, en effet :

$$C = \sum_{j=0}^l e_j i_j \equiv \sum_{j=0}^l i_j = I \pmod{2} \quad \text{car } \forall j \in \llbracket 1, l \rrbracket, e_j = \pm 1$$

Ainsi nous pouvons écrire  $(-1)^I = (-1)^C$ . La somme est alors indexée sur  $C$ , qui admet des valeurs

bornées par un minimum  $m$  et un maximum  $M$ , et certaines de ces valeurs peuvent être atteintes plusieurs fois suivant les paramètres  $i_1, \dots, i_l$ . Cela donne l'écriture attendue :

$$\Sigma_{\mathcal{B}_1} \cdots \Sigma_{\mathcal{B}_l} = \tau^{-2E} \sum_{i=m}^M s_i (-\tau^{-4})^i$$

où les  $s_i$  représentent le nombre de fois que  $C = i$  peut être atteint. Il ne reste qu'à déterminer  $m$  et  $M$ , qui sont liés au degré minimal et maximal de  $\Sigma_{\mathcal{B}_1} \cdots \Sigma_{\mathcal{B}_l}$ . Par ailleurs, comme :

$$m \leq M \implies -2E - 4m \geq -2E - 4M$$

on remarque que  $i = M$  donnera le terme de degré minimal et  $i = m$  celui de degré maximal. D'après la proposition II.103, on a :

$$-2E - 4M = \deg_{\min} (\Sigma_{\mathcal{B}_1} \cdots \Sigma_{\mathcal{B}_l}) = -2E - 4 \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i > 0}} [k_i - 1]$$

ce qui permet de déterminer  $M$  :







$$M = \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, l \rrbracket \\ e_i > 0}} [k_i - 1]$$

Le calcul pour  $m$  est similaire. □

Tout ce qu'il nous reste à déterminer sont les coefficients du polynôme résultant d'un produit de  $\mathcal{B}$ -sommes, noté  $s_i$  dans la proposition II.104. Dans la démonstration de cette proposition, nous avons vu qu'il s'agit du nombre de termes égaux suivant la valeur d'une somme  $C$  de paramètres  $i_1, \dots, i_l$ , autrement dit  $s_i$  est le nombre de combinaisons différentes des paramètres  $i_1, \dots, i_l$  tel que leur somme vaut  $C = i$  exactement. Ce nombre peut être calculé grâce à l'étude donnée en section B.2 en annexe.

## 4.4 Bibliographie de ce chapitre

La bibliographie complète ainsi que le détail de chaque référence est accessible en page 191.

- [Big00]  Stephen BIGELOW. « Braid groups are linear ». Dans : *Journal of the American Mathematical Society* 14.2, p. 471-486.
- [EKT03]  Shalom ELIAHOU, Louis Hirsch KAUFFMAN et Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « Infinite families of links with trivial Jones polynomial ». Dans : *Topology* 42.1, p. 155-169.
- [Jon85]  Vaughan Frederick Randal JONES. « A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras ». Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 12.1, p. 103-112.
- [Kau90]  Louis Hirsch KAUFFMAN. « An invariant of regular isotopy ». Dans : *Transactions of the American Mathematical Society* 318.2, p. 417-471.
- [Kra02]  Daan KRAMMER. « Braid Groups are Linear ». Dans : *The Annals of Mathematics* 155.1, p. 131-156.
- [Wes95]  Bruce W. WESTBURY. « The representation theory of the Temperley-Lieb algebras ». Dans : *Mathematische Zeitschrift* 219.1, p. 539-565.



---

Étude du monoïde diagrammatique de KAUFFMAN

---

**Sommaire du présent chapitre**

<b>5.1 Clôture et composantes</b>	<b>121</b>
5.1.1 L'algorithme de suivi de lignes . . . . .	122
5.1.2 Applications de l'algorithme de suivi de ligne . . . . .	126
5.1.3 Raisonnement avec les permutations . . . . .	128
<b>5.2 Plongement dans les permutations</b>	<b>130</b>
5.2.1 Le produit ping-pong . . . . .	131
5.2.2 Lien entre le produit ping-pong et le monoïde diagrammatique . . . . .	135
5.2.3 Conséquences et applications . . . . .	139
<b>5.3 Bibliographie de ce chapitre</b>	<b>149</b>

Nous rencontrons souvent le moduloïde diagrammatique  $\mathcal{MD}_n^K$  vu en définition II.40 ou l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB  $TL_n(\delta)$  lors de l'étude du polynôme de JONES. On trouve par ailleurs nombres de travaux sur l'étude de cette dernière. Ces deux structures algébriques sont liées au monoïde diagrammatique  $\mathcal{D}_n^K$ , qui mérite lui aussi une étude à part entière.

Parmi les questions autour de ce monoïde et de ses éléments, il s'agit par exemple de pouvoir calculer ou du moins obtenir mathématiquement le nombre de composantes d'un de ses diagrammes sans avoir à le dessiner pour les compter à la main. Cela sera d'autant plus utile en calculant le polynôme de JONES via le crochet de KAUFFMAN. D'autres points sont à éclaircir, comme le comportement de forme normale de JONES après perturbation par concaténation, traité en partie en section B.3 en annexe.

**5.1 Clôture et composantes**

Lors du calcul du polynôme de JONES avec le crochet de KAUFFMAN non clos, et notamment lors de la clôture, nous devons à chaque fois connaître le nombre de composantes des éléments du monoïde diagrammatique  $\mathcal{D}_n^K$  après que ses extrémités aient été identifiées par une clôture. Jusqu'à présent, nous

n'avions pas d'autre moyen que de dessiner un diagramme et de les compter pour obtenir cette valeur. Dans cette section, on définit deux manières proches d'interpréter ce dénombrement, l'une algorithmique et l'autre algébrique.

Avant toute chose, on remarque que seule la clôture standard nécessite notre attention, en effet une clôture de type  $W$  d'un élément  $V$  de  $\mathcal{D}_n^K$  revient à la clôture standard de  $VW$ .

### 5.1.1 L'algorithme de suivi de lignes

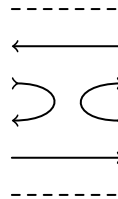
Nous voyons dans cette sous-section une façon algorithmique de compter les composantes d'un élément réduit  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$ . Le principe est de démarrer d'une extrémité de  $W$ , puis de « suivre » le brin qui y est présent jusqu'à son autre extrémité. À partir de là, comme  $W$  est censé être clos, nous reprenons le suivi à partir de l'extrémité suivante identifiée par la clôture. Une fois revenu au point de départ, nous avons compté une composante, et s'il reste des extrémités non visitées, on recommence le processus.

La notion de « suivi » étant le cœur de l'algorithme, il convient d'étudier ce que cela signifie en termes mathématiques. Suivre une ligne revient à lui donner un sens de parcours, et donc une orientation. Pour écrire notre algorithme, et surtout montrer que celui-ci fonctionne correctement et est consistant, il nous faut trouver une orientation canonique valable pour tout élément de  $\mathcal{D}_n^K$  et compatible avec la clôture standard.

**Proposition II.105.** *Pour  $W$  un élément du monoïde diagrammatique  $\mathcal{D}_n^K$ , le diagramme représentant  $W$  peut être orienté tel que chaque brin a une orientation inversée par rapport à ses voisins à chaque position. Les boucles  $\circlearrowleft$  sont orientées librement.*

*Démonstration :*

Tous les générateurs de  $\mathcal{D}_n^K$  peuvent être orientés comme voulu :



De plus pour deux éléments orientés de façon à ce que l'orientation change suivant la parité de la position des brins, leur concaténation vérifie cette même propriété, quitte à renverser l'orientation de l'un d'entre eux pour que l'orientation globale soit consistante. Ainsi, tout élément de  $\mathcal{D}_n^K$  peut être orienté de cette façon.  $\square$

Cela permet de définir une orientation canonique pour les éléments de  $\mathcal{D}_n^K$ , visible en figure 5.1.

#### **Définition II.106 – Orientation canonique des éléments diagrammatiques.**

L'orientation canonique d'un diagramme représentant un élément du monoïde diagrammatique est celle où les brins en positions impaires sont orientés de la gauche vers la droite, et où les brins en positions paires sont orientés de la droite vers la gauche. Les boucles libres  $\circlearrowleft$  sont orientées suivant le sens trigonométrique.

*Remarques II.107.*

1. L'orientation canonique vue en définition II.106 est bien compatible avec la clôture standard puisque cette orientation dépend uniquement de la parité de la position des brins. Ainsi les deux extrémités reliées par la clôture standard, se faisant face et donc étant à la même position, ont la même orientation.

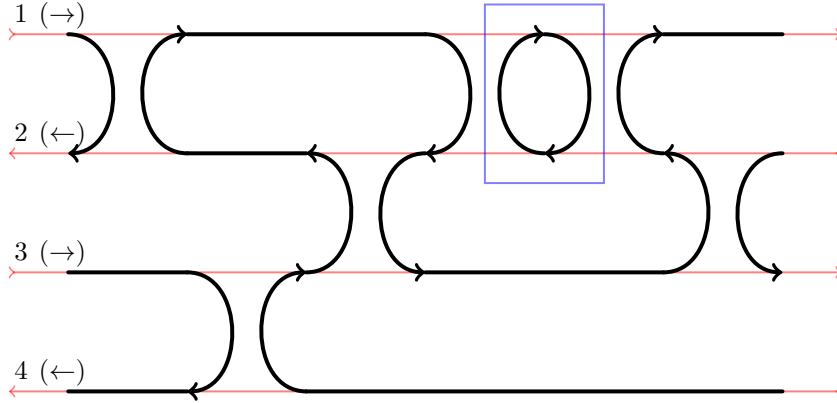



FIGURE 5.1 – Orientation canonique vu sur un élément de  $\mathcal{D}_4^K$ . Tant que la partie encadrée n'est pas considérée comme une boucle libre, celle-ci s'oriente comme le reste du diagramme.

- Il peut y avoir un conflit d'orientation avec les boucles libres. Par exemple, lorsque la partie encadrée de la figure 5.1 une boucle  $\circ$  suite à l'utilisation de la règle  $u_i u_i = \circ u_i$ , son orientation changera. Cela n'aura pas d'impacts dans ce mémoire, mais il convient de noter ce défaut.

Nous pouvons à présent construire un algorithme naïf qui renvoie, pour une extrémité de départ donnée, l'extrémité située à l'autre bout du brin concerné.

#### Algorithme II.108 – Suivi d'un brin.

(Pseudo code page suivante) Pour un élément  $W = \circ^c u_{i_1} \cdots u_{i_k}$  de  $\mathcal{D}_n^K$ , et pour un brin  $b$  démarrant en  $p^e$  position, l'algorithme suivant permet de connaître la position de l'extrémité d'arrivée de  $b$  de manière naïve, comme si l'on suivait le brin  $b$  dans un diagramme représentant  $W$  orienté de façon canonique.

Suivant la parité initiale de  $p$ , la lecture de  $W$  commence à gauche si  $p$  est impair, et à droite sinon afin d'être conforme à son orientation. Dès qu'une lettre interagit avec la position actuelle  $p$  de  $b$ , c'est-à-dire si  $p = i_j$  ou  $p = i_j + 1$  pour une lettre  $u_{i_j}$ , il faut modifier  $p$  d'un cran. Dans le cas  $p = i_j$ , l'indice  $p$  sera incrémenté puisque  $b$  monte d'une position dans le diagramme de  $W$ , dans l'autre cas  $p$  sera décrémenté. Le sens de lecture de  $W$  est déterminé par la parité de  $p$ , ce qui symbolise le sens de l'orientation de  $b$  à cette position. Une fois que nous atteignons l'autre extrémité de  $b$ , autrement dit quand nous n'avons plus de lettre à lire, la valeur de  $p$  est alors exactement la position de l'extrémité finale recherchée. 

Nous pouvons déjà remarquer le fait évident suivant.

**Proposition II.109.** Pour un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  et pour  $c > 0$  un entier, on a :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{SUIVREBRIN}(W, p) = \text{SUIVREBRIN}(\circ^c W, p)$$

*Démonstration :*

Étant donné que l'algorithme II.108 ne réagit qu'aux lettres  $u_i$  avec  $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , l'ajout ou le retrait de lettres  $\circ$  ne change pas le résultat de l'algorithme.  $\square$

*Remarque II.110.* Nous rappelons que la lettre  $\circ$  commute avec tous les générateurs de  $\mathcal{D}_n^K$ , ainsi peu importe où elle se trouve dans un élément  $W$ , l'algorithme II.108 ne la prendra pas en compte.

Cet algorithme se visualise très bien sur un diagramme, et correspond exactement au trajet d'un brin orienté qui le compose. Malheureusement, il est aussi assez difficile de l'étudier à cause des changements de sens de lecture très fréquents. On peut commencer à simplifier l'étude en considérant des éléments réduits.

**Pseudo code 4****Suivi d'un brin**

(Voir II.108)

**Requiert :**  $W$  élément réduit sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit comme  $W = \circ^c u_{i_1} \dots u_{i_k}$ ,  
 $p$  position de départ du brin à suivre.

**Résultat :** La position finale du brin suivi.

```

1: procédure SUIVREBRIN( $W, p$ )
2:   si  $p$  est impair alors  $\triangleright$  Placement du curseur de lecture  $l$ 
3:      $l \leftarrow 1$ 
4:   sinon
5:      $l \leftarrow k$ 
6:   fin condition
7:   tant que  $l \in \llbracket 1, k \rrbracket$  faire  $\triangleright$  Boucle de parcours
8:     si  $p = i_l$  alors  $\triangleright$  Interaction entre la lettre  $u_{i_l}$  et le brin suivi
9:        $p \leftarrow p + 1$ 
10:    sinon si  $p = i_l + 1$  alors
11:       $p \leftarrow p - 1$ 
12:    fin condition
13:    si  $p$  est impair alors  $\triangleright$  Déplacement du curseur
14:       $l \leftarrow l + 1$ 
15:    sinon
16:       $l \leftarrow l - 1$ 
17:    fin condition
18:  fin tant que
19:  retourner  $p$ 
20: fin

```

**Proposition II.111.** Pour un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  et  $W'$  la réduction de  $W$ , on a :

$$\forall b \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{SUIVREBRIN}(W, b) = \text{SUIVREBRIN}(W', b)$$

*Démonstration :*

Comme la réduction d'un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  suit les règles du monoïde, il suffit de montrer que l'algorithme réagit de la même façon avec ces règles. Nous effectuons un traçage pour chaque cas au moment où l'algorithme rencontre, lors de sa lecture, les deux écritures équivalentes. Pour la première règle  $u_i u_i = \circ u_i$ , si  $p = i$  ou  $p = i + 1$ , pour les deux écritures et quelle que soit la parité de  $p$ , l'algorithme effectuera la même affectation  $p \leftarrow p \pm 1$  et changera de sens de lecture. En particulier, pour l'écriture  $u_i u_i$  seule une lettre interagira avec le brin en position  $p$ ; et pour  $\circ u_i$  la lettre  $\circ$  n'interagit avec aucun brin et donc ne change pas  $p$ .

Concernant la règle  $u_i u_j u_i = u_i$  pour  $|i - j| = 1$ , et par les mêmes arguments que précédemment, si  $p = i$  ou  $p = i + 1$  l'algorithme répondra de la même façon pour les deux termes. Supposons que  $j = i + 1$  et  $p = j + 1$ , pour l'écriture de droite  $p$  n'est pas changé lors de l'exécution, tandis que pour celle de gauche nous aurons dans l'ordre les instructions suivantes :

1. la première lettre  $u_i$  rencontrée n'a aucun effet, le sens de lecture est le même,
2. on rencontre  $u_j$ , dans ce cas on a  $p \leftarrow p - 1 = j = i + 1$  et on change de sens de lecture,
3. on est revenu à la lettre  $u_i$  lu précédemment, cette fois nous avons une modification  $p \leftarrow p - 1 = i$  et on change de nouveau le sens de lecture,
4.  $u_j$  n'a pas d'effet à cet instant, la lecture se poursuit,
5. on rencontre la deuxième lettre  $u_i$ , on a alors  $p \leftarrow p + 1 = i + 1 = j$  et le sens de lecture s'inverse,
6. on revient  $u_j$ , ce qui a pour effet  $p \leftarrow p + 1 = j + 1$  et le sens de lecture s'inverse de nouveau,

7. retour au deuxième  $u_i$ , qui n'a pas d'incidence sur  $p$ .

Au final,  $p$  revient à la même valeur tout comme le sens de lecture. Nous faisons le même raisonnement pour le cas  $j = i - 1$  et  $p = j$ .

La troisième règle  $u_i u_j = u_j u_i$  pour  $|i - j| > 1$  se montre encore de la même façon. Si  $p = i$ , la lettre  $u_j$  n'aura aucune influence et alors  $p \leftarrow p + 1$  avec changement de sens de lecture. On a exactement les mêmes effets pour les autres valeurs  $i + 1, j$  et  $j + 1$ .  $\square$

Les éléments réduits de  $\mathcal{D}_n^K$  peuvent s'écrire sous forme normale de JONES, vu avec le théorème  $\star.20$ . Ces formes sont composées de parties particulières où les indices des lettres suivent une suite arithmétique décroissante de raison  $-1$ . Il est possible de résumer ce qu'il se passe lors de l'exécution de l'algorithme II.108 pour des mots ayant cette forme.

**Proposition II.112.** *Pour  $W = u_i u_{i-1} \dots u_{i-k}$  une partie d'un élément de  $\mathcal{D}_n^K$ , et  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  la position d'un brin, nous avons les cas suivants :*

- si  $p < i - k$  ou  $p > i + 1$ , alors l'algorithme continue sa lecture sans changer  $p$ ,
- si  $i - k \leq p \leq i + 1$  avec  $p$  pair alors :

$$p \leftarrow \begin{cases} p + 1 & \text{si } p = i - k, \\ p - 1 & \text{si } p = i - k + 1, \\ p - 2 & \text{sinon,} \end{cases}$$

- si  $i - k \leq p \leq i + 1$  avec  $p$  impair alors :

$$p \leftarrow \begin{cases} p + 1 & \text{si } p = i, \\ p - 1 & \text{si } p = i + 1, \\ p + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus le sens de lecture dépendant de la parité de  $p$ , celle-ci ne change que si  $p$  change de parité après la lecture de la partie  $W$ .

*Démonstration :*

Si  $p < i - k$  ou  $p > i + 1$ , alors l'algorithme parcourt  $W$  sans modifier  $p$  puisqu'aucune lettre ne peut interagir avec le brin suivi. Si maintenant  $i - k \leq p \leq i + 1$  est supposé pair, la lecture de  $W$  démarre de la droite. Si  $p = i - k$ , lors de la première itération nous avons  $p \leftarrow p + 1$  et comme le sens de lecture change, nous sortons de  $W$ . De même si  $p = i - k + 1$ , on a alors  $p \leftarrow p - 1$  et on sort de  $W$ .

Pour les possibilités restantes en supposant  $p$  pair, la première lettre interagissant avec  $p$  est  $u_{p-1}$ , on a alors  $p \leftarrow p - 1$ . Puis à l'itération suivante, comme le sens de lecture a changé, nous avons une interaction avec la lettre  $u_{p-2}$ , qui existe car par hypothèse  $p > i - k + 1$ ; nous avons alors de nouveau l'instruction  $p \leftarrow p - 1$ . Étant revenu dans le sens de lecture originel, et comme les indices des lettres de  $W$  sont rangés par ordre décroissant,  $p$  ne sera plus modifié. Au final, nous avons  $p \leftarrow p - 2$ . Si l'on suppose  $p$  impair, la preuve est quasiment symétrique.  $\square$

*Remarque II.113.* Il est possible d'intégrer la proposition II.112 dans l'algorithme II.108 afin qu'il ne parcoure plus  $W$  lettre par lettre, mais plutôt par morceaux de la forme  $W_l = u_{i_l} \dots u_{j_l}$ . Cela permet de réduire le nombre d'itérations, mais nécessite que l'entrée soit réduite et écrite sous la bonne forme.

La forme de  $W$  choisie dans la proposition II.112 correspond à une suite descendante d'indice dans les formes normales de JONES; cela va permettre d'étudier l'algorithme en réduisant puis en découpant  $W$ . Cela permet également de montrer que l'algorithme II.108 se termine en temps fini.

**Proposition II.114.** *L'algorithme II.108 se termine toujours en un nombre fini d'itérations.*

*Démonstration :*

Nous pouvons nous restreindre, grâce à la proposition II.111 et à la proposition II.109, aux éléments  $W = u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_k} \dots u_{j_k}$  réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit sous forme normale de JONES, et  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Grâce à la proposition II.112, nous savons comment répond l'algorithme localement aux

parties  $W_l = u_{i_l} \dots u_{j_l}$  de  $W$ . Regardons ce qu'il se passe lorsque l'on arrive à une partie  $W_l$  de  $W$  par la gauche,  $p$  est donc impair. Si  $p = i_l$  à ce moment-là, alors  $p \leftarrow i_l + 1$  et la lecture reprend en partant vers la gauche. Or comme  $W$  est écrit sous forme normale de JONES, aucune lettre ne peut modifier la valeur de  $p$ , et ainsi l'algorithme se termine. Si  $p = i_l + 1$  en arrivant, alors cette fois  $p \leftarrow i_l$  et nous devons analyser l'action de  $W_{l-1}$  sur  $p$  venant de sa droite. Dans tous les autres cas, d'après la proposition II.112 toujours,  $p \leftarrow p + 2$  si  $i_l > p \geq j_l$ , sinon  $p$  est inchangé; puis on doit regarder l'action de  $W_{l+1}$  sur  $p$  venant de sa gauche.

Si l'on regarde maintenant ce qu'il se passe lorsque l'on arrive à une partie  $W_l$  de  $W$  par la droite, on obtient à peu près les mêmes effets. Comme  $p$  est maintenant pair, si  $p = j_l + 1$  alors  $p \leftarrow j_l$  et la lecture reprend en partant vers la droite. Or, encore une fois dû à l'écriture de  $W$ , aucune lettre ne peut de nouveau agir sur  $p$ , l'algorithme se termine donc. Si  $p = j_l$  en arrivant, alors  $p \leftarrow j_l + 1$  et nous devons regarder l'action de  $W_{l+1}$  sur  $p$  venant de sa gauche. Pour les autres cas, si  $i_l + 1 \geq p < j_l + 1$  nous avons  $p \leftarrow p - 2$ , sinon  $p$  est inchangé et il faut alors continuer avec l'action de  $W_{l-1}$  sur  $p$  venant de sa droite.

Une fois ces comportements décrits, nous pouvons étudier les scénarios possibles lors de l'exécution de cet algorithme. Étant donné que le comportement est symétrique suivant que la valeur de départ de  $p$  soit impaire ou paire, nous ne développerons que le cas  $p$  impair. Nous commençons donc le parcours de  $W$  depuis la gauche. À chaque partie  $W_l$  rencontrée, nous avons vu que deux cas peuvent se produire :

- soit on traverse  $W_l$ , et alors la valeur de  $p$  reste de même parité mais peut changer,
- soit on change de sens de lecture, alors  $p \leftarrow p \pm 1$ .

On remarque que le premier scénario possible soit que l'on traverse complètement  $W$ , auquel cas l'algorithme se termine bien en nombre fini d'étapes et  $p$  n'a pas changé de parité. Supposons donc à présent qu'il existe  $l_1$  tel que le sens de lecture change au niveau de  $W_{l_1}$ . Si  $p = i_{l_1}$  lorsque l'on arrive à  $W_{l_1}$ , alors nous avons vu que l'algorithme se termine avec comme résultat  $p = i_{l_1} + 1$ . Supposons alors que  $p = i_{l_1} + 1$  à l'entrée de  $W_{l_1}$  et continuons l'algorithme, en lisant  $W$  vers la gauche.

De même, si à partir de ce point on ne change plus de sens de lecture, alors l'algorithme se termine également en un nombre fini d'étapes, on suppose donc qu'il existe  $l_2$  tel que le sens de lecture change une deuxième fois au niveau de  $W_{l_2}$ . Pour que ce soit le cas,  $p$  doit valoir soit  $j_{l_2}$  soit  $j_{l_2} + 1$  lorsque l'on arrive à cette partie. Cependant  $p$  ne peut valoir  $j_{l_2}$  à ce moment-là, en effet aucune lettre à droite de  $W_{l_2}$  n'influe sur le brin à cette position à cause de la forme normale de JONES de  $W$ . Il ne reste que le cas où  $p = j_{l_2} + 1$ , pour lequel nous savons que l'algorithme se termine avec comme réponse  $p = j_{l_2}$ . Dans tous les cas possibles, l'algorithme se termine avec un nombre fini d'itérations.  $\square$

✓ *Exemple II.115.* Dans la preuve de la proposition II.114, le cas considérant le double changement de parité en  $W_{l_1}$  puis en  $W_{l_2}$  est obtenu par exemple pour l'élément  $u_2u_1u_3u_2u_4 \in \mathcal{D}_5^K$  avec  $W_{l_1} = u_4$  et  $W_{l_2} = u_2u_1$  pour le cas  $p = 5$ .

Il est vrai qu'en ayant le parallèle de cet algorithme avec le suivi d'un brin dans un diagramme d'un élément réduit de  $\mathcal{D}_n^K$ , on admet quasiment immédiatement les propositions précédentes. Mais comme on peut le voir, les montrer en faisant abstraction de cette image est une tâche longue et tortueuse.<sup>1</sup>

### 5.1.2 Applications de l'algorithme de suivi de ligne

Nous allons aborder quelques propriétés de l'algorithme II.108 dans cette section. On peut d'ailleurs déduire de la preuve de la proposition II.114 le nombre maximal de demi-tours qu'un brin peut effectuer dans un diagramme réduit d'un élément de  $\mathcal{D}_n^K$ , ce qui correspond au nombre de changements de parité lors du suivi de ligne.

1. Sans mauvais jeux de mots, l'auteur a passé vraiment beaucoup de temps lors de la rédaction à se demander comment il allait écrire correctement ces preuves, sans compter le temps mis pour les trouver parfois.

**Proposition II.116.** *Pour  $W = u_{i_1} \dots u_{j_1} \dots u_{i_k} \dots u_{j_k}$  un élément réduit sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit sous forme normale de JONES, le nombre total de changements de parité de la valeur de  $p$  lors de l'exécution de l'algorithme II.108 est au maximum de  $2k$ . De plus ce maximum peut être atteint uniquement par les positions de départ des brins traversant entièrement  $W$ .*

*Démonstration :*

De par la preuve de la proposition II.114, nous savons que le sens de lecture entre les différentes parties  $W_l = u_{i_l} \dots u_{j_l}$  ne peut changer que deux fois au maximum, et que d'après la preuve de la proposition II.112 lorsque l'on traverse un bloc  $W_l$  la parité de  $p$  peut changer deux fois. Explorons les différents scénarios :

- Si l'on traverse entièrement  $W$  en changeant de parité deux fois à chaque partie  $W_l$ ,  $p$  aura changé de parité  $2k$  fois,
- Si l'on change une seule fois de sens de lecture au niveau d'une partie  $W_l$ , alors après ce demi-tour nous n'avons plus d'interaction avec les lettres de  $W$ , ainsi donc nous avons au plus  $2k - 1$  changements de parité de  $p$ ,
- Si l'on change deux fois de sens de lecture aux parties  $W_{l_1}$  puis  $W_{l_2}$ , il faut pour cela que lors du premier changement la valeur de  $p$  soit égale à  $i_{l_1} + 1$ , ce qui implique que  $p$  n'a pas changé de parité auparavant. La même remarque que le point précédent s'applique aussi pour le changement en  $W_{l_2}$ . Au final, nous avons un changement de parité au niveau de  $W_{l_1}$  et  $W_{l_2}$  chacun, puis deux fois plus de changements que de parties  $W_l$  pour  $l$  strictement entre  $l_1$  et  $l_2$ . On maximise donc avec  $l_1, l_2 \in \{1, k\}$ , ce qui nous donne alors un maximum de  $2(k - 2) + 2 = 2(k - 1)$  changements.

Au final le maximum attendu  $2k$  ne peut être atteint que par les brins traversant complètement  $W$ .  $\square$

Nous pouvons remarquer cette dernière propriété à propos de l'algorithme II.108.

**Proposition II.117.** *Pour  $W$  un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  fixé, l'application :*

$$\begin{aligned} f : \llbracket 1, n \rrbracket &\rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ p &\mapsto \text{SUIVREBRIN}(W, p) \end{aligned}$$

*est bijective.*

*Démonstration :*

En rappelant que l'algorithme II.108 décrit le suivi d'un brin démarrant en position  $p$  dans le diagramme orienté canoniquement de  $W$ , et que les éléments de  $\mathcal{D}_n^K$  correspondent exactement aux diagrammes reliant  $n$  paires de points sans croiser avec  $n$  brins, il est en particulier impossible que deux brins se rejoignent et aient une extrémité commune, ou qu'une extrémité ne soit pas reliée à un brin. L'application  $f$  est donc bien injective et surjective.  $\square$

À présent que nous avons le moyen de suivre un brin, il ne reste plus qu'à répéter cet algorithme autant de fois que nécessaire pour compter le nombre de composantes d'un élément réduit sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$ .

**Algorithme II.118 – Nombre de composantes d'un élément diagrammatique.**

(Pseudo code page suivante) *Pour un élément réduit sans boucles  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$ , l'algorithme suivant permet de compter le nombre de composantes de  $W$  après clôture.*

On commence par noter  $E$  l'ensemble des extrémités non visitées. Comme nous allons considérer la clôture de  $W$ , et que ces extrémités seront identifiées selon leur position,  $E$  n'est autre que l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On choisit ensuite une position de départ  $p$ , par exemple la position minimale encore présente dans  $E$ , on la retire de  $E$  car elle est dorénavant visitée. Puis on suit le brin qui correspond à cette extrémité suivant l'algorithme II.108, pour arriver en position  $p'$ . Tant qu'on n'est pas revenu au point de départ, c'est-à-dire si  $p \neq p'$ , on continue de suivre les brins démarrant en  $p'$ . Une fois la condition  $p = p'$  atteinte, alors on a parcouru entièrement une composante. On recommence ensuite les instructions précédentes avec une nouvelle position de départ, tant qu'il en reste. Une fois  $E$  vide, c'est-à-dire lorsque

---

**Pseudo code 5**      *Nombre de composantes d'un élément diagrammatique*      (Voir II.118)

---

**Requiert :**  $W$  élément réduit sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$ .


**Résultat :** Le nombre de composantes externes de  $W$  après clôture.

```

1: procédure NBComposante( $W$ )
2:    $c \leftarrow 0$ 
3:    $E \leftarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ 
4:   tant que  $E$  est non vide faire
5:      $p \leftarrow \min E$ 
6:      $p' \leftarrow p$ 
7:     répéter
8:        $E \leftarrow E \setminus \{p'\}$ 
9:        $p' \leftarrow \text{SUIVREBRIN}(W, p')$ 
10:    jusqu'à  $p = p'$ 
11:     $c \leftarrow c + 1$ 
12:  fin tant que
13:  retourner  $c$ 
14: fin

```

---

toutes les extrémités ont été visitées, on a parcouru toutes les composantes. 

Comme l'algorithme II.118 contient encore des boucles à nombre d'itérations variable, il convient de vérifier que celui-ci se termine en temps fini.

**Proposition II.119.** *L'algorithme II.118 se termine toujours en un nombre fini d'itérations.*

*Démonstration :*

Pour commencer, la boucle conditionnée par  $E$  se termine toujours, en effet  $E$  est un ensemble fini et celui-ci perd au moins un élément à chaque itération,  $E$  sera donc vide après un nombre fini d'itérations. Il ne reste qu'à vérifier que pour une position de départ  $p$ , le retour au point de départ lors de la deuxième boucle se réalise après un nombre fini d'étapes. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, alors il existe une séquence  $p_1, \dots, p_k$  de positions telles que :

$$\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \text{SUIVREBRIN}(W, p_i) = p_{i+1} \quad \text{et} \quad \text{SUIVREBRIN}(W, p_k) = p_1$$

Cependant cette boucle infinie a été initialisée par une instruction  $\text{SUIVREBRIN}(W, p') = p_j$ , et afin de simplifier les notations on peut supposer sans perte de généralité que  $p' = p$  et  $j = 1$ . Cela signifie que le brin démarrant en  $p^e$  position se termine en  $p_1^e$  position, mais c'est aussi le cas du brin démarrant en  $p_k^e$  position par hypothèse. Cela est une contradiction avec la proposition II.117.  $\square$

Les méthodes que nous venons de détailler sont extrêmement naïves, elles ont pour avantage d'être simples à appliquer. L'inconvénient cependant est que l'on ne peut obtenir un résultat fiable que pour un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  réduit et sans boucles, le problème étant que les boucles déjà présentes dans  $W$  ne peuvent être détectées, justement parce que ces boucles n'ont pas d'extrémités. Aussi, même si l'on peut améliorer un peu l'algorithme II.108 en réduisant le nombre d'itérations, la complexité de ces algorithmes est linéaire en la longueur de  $W$  quoi qu'il advienne.

### 5.1.3 Raisonnement avec les permutations

Une autre façon de compter le nombre de composantes d'un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  clos est d'établir une notation mettant en évidence cette propriété de manière naturelle. Pour reprendre les idées de la sous-section 5.1.1, deux étapes importantes sont à prendre en considération :

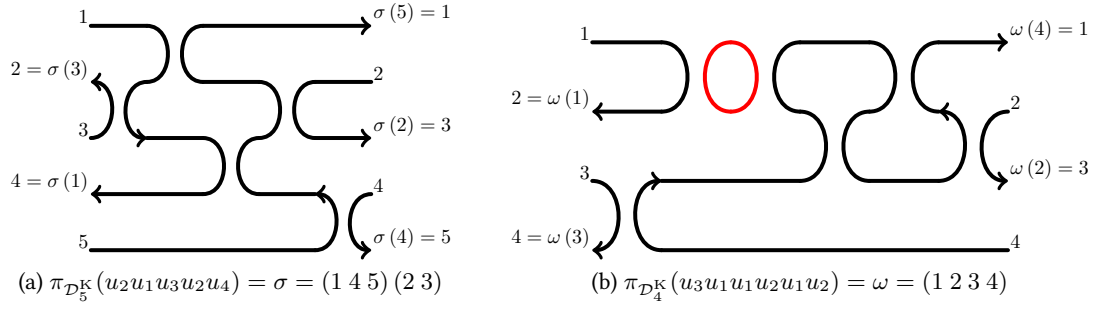


FIGURE 5.2 – Les deux figures montrent comment sont déterminées les permutations associées à ces éléments diagrammatiques. On remarque que les composantes internes, en particulier les boucles, ne sont pas prises en compte par  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}$ .

1. établir les positions des extrémités reliées par un brin,
2. lorsque que l'on suit une chaîne de positions reliées, on doit forcément revenir à la position initiale.

Pour le premier point, nous avons vu que considérer l'action d'associer à chaque extrémité celle qui se trouve de l'autre côté du brin correspondant est une bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , que sont justement les permutations. Quant au deuxième point, les permutations ont toutes un ordre fini, cette condition est donc remplie. Nous pouvons aussi penser à la notation sous forme de cycle des permutations qui réalise visuellement cette chaîne de positions. Nous introduisons alors une projection du monoïde diagrammatique dans le groupe des permutations.

**Définition II.120 – Projection canonique diagrammatique.**

Pour  $n \geq 1$  fixé, la *projection canonique diagrammatique* de  $\mathcal{D}_n^K$  vers  $\mathfrak{S}_n$  est l'application notée  $\pi_{\mathcal{D}_n^K} : \mathcal{D}_n^K \rightarrow \mathfrak{S}_n$  définie telle que :

$$\forall W \in \mathcal{D}_n^K, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W)(i) = \text{SUIVREBRIN}(W, i)$$

*Remarques II.121.*

1. Nous savons grâce à la proposition II.117 que les applications  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W)$  sont bijectives pour  $W \in \mathcal{D}_n^K$  fixé, la définition II.120 a donc un sens.
2. D'après la proposition II.111 et la proposition II.109, pour  $W \in \mathcal{D}_n^K$  et  $W'$  son équivalent réduit dont les boucles ont été retirées, on a  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W) = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W')$ .
3. La projection d'un élément  $\circ^c$  de  $\mathcal{D}_n^K$  est toujours l'identité de  $\mathfrak{S}_n$ , quel que soit  $c > 0$ .

Nous voyons deux exemples de projection en figure 5.2. Au vu des propriétés de l'algorithme II.108, la projection canonique diagrammatique respecte le quotient de  $\mathcal{D}_n^K$  par ses relations d'équivalences ainsi que par la relation supplémentaire :

$$\forall W_1, W_2 \in \mathcal{D}_n^K, W_1 \equiv W_2 \iff \exists c \in \mathbb{N}, W_1 = \circ^c W_2$$

**Proposition II.122.** Pour  $n \geq 1$  fixé, on note  $\mathcal{Q}$  le quotient du monoïde diagrammatique  $\mathcal{D}_n^K$  par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_i u_i = \circ u_i & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\ u_i u_j u_i = u_i & \text{pour } |i-j| = 1, \\ u_i u_j = u_j u_i & \text{pour } |i-j| > 1, \\ \circ^c W = W & \text{pour tout } c \in \mathbb{N} \text{ et } W \in \mathcal{D}_n^K \end{cases}$$

Alors pour  $W_1$  et  $W_2$  deux éléments équivalents de  $\mathcal{Q}$ , on a l'égalité  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W_1) = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W_2)$ .

*Démonstration :*

Découle immédiatement de la proposition II.109 et de la proposition II.111.  $\square$

Grâce à cette propriété, nous savons que les permutations obtenues avec la projection sont des invariants de  $\mathcal{D}_n^K$ . En particulier, nous avons la fonctionnalité suivante :

**Proposition II.123.** *Pour  $W$  un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  et  $u_i$  avec  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  un générateur, si on a l'égalité  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W) = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(Wu_i)$  alors  $Wu_i = \circ W$ .*

*Démonstration :*

Si  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W) = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(Wu_i)$  alors cela signifie que  $W$  et  $Wu_i$  sont équivalents par rapport aux relations données dans la proposition II.122. Dans le monoïde  $\mathcal{D}_n^K$ , cela veut dire qu'il existe  $c_1$  et  $c_2$  tel que  $\circ^{c_1} W' = \circ^{c_2} W'u_i$  avec  $W'$  l'élément  $W$  privé de ces boucles. Or la seule relation supprimant un seul générateur d'un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  est  $u_i u_i = \circ u_i$ . On en déduit que  $c_1 = c_2 + 1$ , et en posant  $c_2$  comme le nombre de boucles contenu dans  $W$ , on obtient bien finalement que  $\circ W = Wu_i$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant étudier l'itération de ces permutations. Comme les images de celles-ci sont les résultats de l'algorithme II.108, nous pouvons simuler l'algorithme II.118 grâce à l'écriture sous forme de cycles à support disjoint.

**Proposition II.124.** *Pour  $n \geq 1$  et  $W \in \mathcal{D}_n^K$  sans boucles fixés, l'écriture en cycle à support disjoint de  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W)$  contient autant de cycles que de composantes dans le diagramme clos de  $W$ .*

*Démonstration :*

Prenons un cycle  $\sigma$  présent dans la décomposition en cycle à support disjoint de  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W)$ . Pour  $p$  présent dans le support de  $\sigma$ , nous savons que  $\sigma(p) = \text{SUIVREBRIN}(W, p)$  par définition II.120 de la projection canonique de  $\mathcal{D}_n^K$ . En particulier, cela implique que :


$$\sigma^2(p) = \text{SUIVREBRIN}(W, \sigma(p))$$

et ainsi de suite. Cependant toute permutation a un ordre fini  $r$ , avec en particulier  $\sigma^r(p) = p$ . D'après l'algorithme II.118, il s'agit de la condition d'arrêt pour compter une composante de la clôture de  $W$ , on en déduit que  $\sigma$  correspond à la séquence des positions des extrémités par lesquelles cette composante passe. Comme cela est vrai pour tout cycle présent dans la décomposition, leur nombre correspond bien au nombre de composantes présentes dans le diagramme clos de  $W$ .  $\square$

Avec les propositions II.123 et II.124, il est maintenant possible de compter le nombre exact de composantes d'un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  après clôture même si  $W$  contient des boucles.

**Algorithme II.125 – Toutes les composantes d'un élément diagrammatique clos.**

(Pseudo code ci-contre) *Pour un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$ , l'algorithme suivant permet de compter le nombre de composantes de  $W$  après clôture, y compris les boucles de  $W$ .*

Nous commençons par comptabiliser les boucles en initialisant la variable  $c$  avec  $e$  le nombre d'occurrences de  $\circ$ . On enregistre ensuite la permutation image de la première lettre  $u_{i_1}$  dans  $\sigma$ . Au niveau de la boucle dépendant de  $l$ , on calcule à chaque itération la permutation image du sous-mot  $u_{i_1} \dots u_{i_l}$  par la projection  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}$  et on l'enregistre dans  $\sigma'$ . En comparant  $\sigma$  et  $\sigma'$ , nous savons si l'on vient de fermer une boucle non réduite grâce à la proposition II.123, on met alors à jour la variable  $c$  en conséquence. Une fois la permutation image du mot  $W$  obtenu, c'est-à-dire à la fin de la boucle, il ne reste qu'à ajouter les composantes restantes en comptant le nombre de cycles de cette dernière. 

## 5.2 Plongement dans les permutations

Avec la sous-section 5.1.3 nous avons vu comment associer à chaque élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  une permutation de  $n$  éléments. Cela nous a permis d'établir un algorithme permettant de compter toutes les

---

**Pseudo code 6**      *Toutes les composantes d'un élément diagrammatique clos*      (Voir II.125)

---

**Requiert :**  $W$  élément de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit comme  $W = \circ^e u_{i_1} \dots u_{i_k}$ .

**Résultat :** Le nombre de composantes total de  $W$  après clôture.

```

1: procédure NBComposante( $W$ )
2:    $c \leftarrow e$ 
3:    $\sigma \leftarrow \text{Id}_{\mathfrak{S}_n}$ 
4:   pour  $l$  allant de 1 à  $k$  faire
5:      $\sigma' \leftarrow \pi_{\mathcal{D}_n^K}(u_{i_1} \dots u_{i_l})$ 
6:     si  $\sigma = \sigma'$  alors
7:        $c \leftarrow c + 1$ 
8:     fin condition
9:      $\sigma \leftarrow \sigma'$ 
10:  fin pour
11:   $c \leftarrow c + \text{NbCycle}(\sigma)$ 
12:  retourner  $c$ 
13: fin

```

Où  $\text{NbCycle}(\sigma)$  retourne le nombre de cycles dans la décomposition en cycles disjoints de  $\sigma$ .

---

composantes de  $W$  après clôture. Nous avons également vu que la projection  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}$  est un invariant respectant les règles d'isotopie de  $\mathcal{D}_n^K$  modulo les boucles. Afin de considérer  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}$  comme un morphisme de monoïde, il ne reste qu'à trouver une loi sur les permutations qui correspond à la concaténation dans  $\mathcal{D}_n^K$ .

### 5.2.1 Le produit ping-pong

Cette sous-section va être consacrée à la définition et à l'étude du produit qui permettra à  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}$  de devenir un morphisme de monoïde. La découverte de ce produit vient naturellement lorsque l'on essaye de comprendre comment l'algorithme II.108 se comporte avec la notation des éléments de  $\mathcal{D}_n^K$  sous forme de permutations. Celui-ci a été nommé « produit ping-pong<sup>2</sup> », vous allez très vite comprendre pourquoi.

#### Définition II.126 – Produit ping-pong.

On définit pour  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  des permutations de  $\mathfrak{S}_n$  le *produit ping-pong*  $\sigma_1 \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons \sigma_k$  comme la composition avec un sens de lecture variable dépendant de la parité de l'élément actuellement calculé. Ainsi pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , si l'image d'un élément par  $\sigma_i$  est impaire, il doit être évalué ensuite par  $\sigma_{i+1}$ , sinon par  $\sigma_{i-1}$ . Le paramètre est évalué en premier par  $\sigma_1$  s'il est impair, sinon par  $\sigma_k$ , et le résultat final est obtenu lorsque  $\sigma_1$  renvoie une image paire, ou lorsque  $\sigma_k$  renvoie une image impaire.

✓ *Exemple II.127.* Voir la figure 5.3. À noter que seules les permutations (2 4 3) et (1 3 4 2) utilisées dans cet exemple ont un antécédent par  $\pi_{\mathcal{D}_4^K}$ .

Avant de montrer que les permutations munies de ce produit permettent à la projection canonique diagrammatique d'être un morphisme, étudions-le un peu. Commençons par vérifier, avec une telle définition, que l'on ne risque pas de rencontrer une succession infinie de compositions et qu'un tel produit donne bien une permutation en toutes situations.

---

2. Merci de ranger votre raquette de tennis de table, elle ne servira pas.

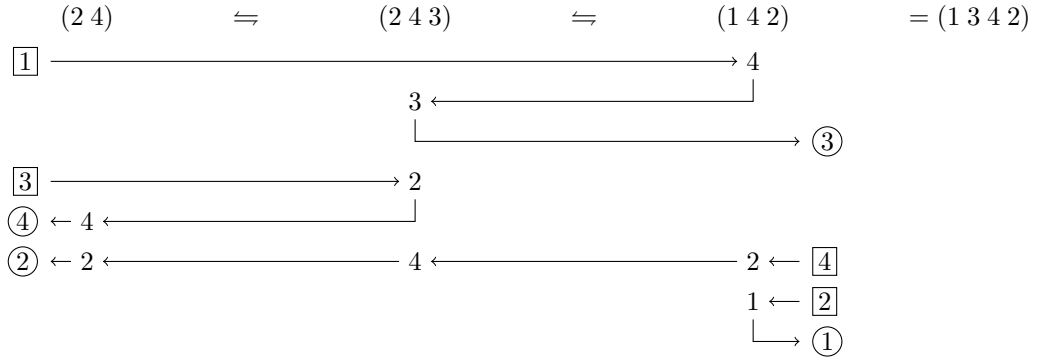


FIGURE 5.3 – Exemple de calcul avec le produit ping-pong. Les nombres encerclés sont les images de ceux encadrés. Les flèches et les autres nombres représentent les étapes du calcul.

**Proposition II.128.** *Pour  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  des permutations de  $\mathfrak{S}_n$ , le produit ping-pong  $\sigma_1 \Leftarrow \dots \Leftarrow \sigma_k$  est toujours univoquement déterminé et est bien une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ .*

*Démonstration :*

Par définition II.126, le produit ping-pong est une composition à sens de lecture variable. Ainsi pour un entier  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  fixé, il est possible de décrire l'image de  $i$  par  $\sigma_1 \Leftarrow \dots \Leftarrow \sigma_k$  comme une suite de compositions des permutations  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ . Cette suite ne sera évidemment pas la même pour une autre valeur de  $i$ , notons-la  $s_i = \sigma_{j_i} \circ \dots \circ \sigma_{j_1}$ . On en déduit alors que sous la condition que la suite  $s_i$  est fini, autrement dit si  $l < +\infty$ , alors l'image de  $i$  est univoquement déterminée par composition de bijections.

Supposons par l'absurde que la suite  $s_i$  est infinie. Comme  $k$  est fini, certaines permutations présentent dans  $s_i$  apparaissent une infinité de fois. Maintenant si  $\sigma_{j_p}$  apparaît une infinité de fois, étant donné que l'ensemble de définition  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est fini, un entier  $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$  a forcément été évalué une infinité de fois par  $\sigma_{j_p}$ . Toujours par définition II.126 pour  $p \geq 2$ , le  $p^{\text{e}}$  terme de la suite  $\sigma_{j_p}$  est forcément suivi et précédé par  $\sigma_{j_{p-1}}$  ou  $\sigma_{j_{p+1}}$ . Ainsi, suivant la parité de  $m$ , la permutation précédant  $\sigma_{j_p}$  au moment où celle-ci évalue  $m$  dans la suite sera toujours la même. Par induction, cela signifie que la suite  $s_i$  devient périodique à partir d'un certain rang. Suivant ce raisonnement, la suite  $s_i$  doit être de la forme :

$$s_i : \dots \circ \sigma_{j_p} \circ P_1 \circ \sigma_{j_1} \circ P_2 \circ \sigma_{j_p} \circ P_1 \circ \sigma_{j_1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (P_1 \circ \sigma_{j_1})(i) = m, \\ (P_1 \circ \sigma_{j_1} \circ P_2 \circ \sigma_{j_p})(m) = m \end{cases}$$

où  $P_1$  et  $P_2$  regroupent plusieurs permutations. On remarque que le début de la suite  $P_1 \circ \sigma_{j_1}$  apparaît forcément dans la partie périodique puisque les  $\sigma_{j_p}$  démarquées ici évaluent le même entier  $m$ , et doivent donc avoir les mêmes permutations qui les précèdent. La partie  $P_2$  permet quant à elle la périodicité de la suite, en effet :

$$(P_2 \circ \sigma_{j_p})(m) = (\sigma_{j_1}^{-1} \circ P_1^{-1})(m) = i$$

Ainsi à chaque occurrence de  $\sigma_{j_1}$ , cette permutation doit évaluer le paramètre de départ  $i$ . Or  $\sigma_{j_1}$  ne peut être que  $\sigma_1$  ou  $\sigma_k$  par définition II.126, car cette permutation démarre la suite  $s_i$ . On a ainsi deux cas :

- si  $\sigma_{j_1} = \sigma_1$ , cela signifie que  $i$  est impair. Or il est impossible que  $\sigma_1$  évalue un nombre impair sauf lors de sa première occurrence, puisqu'il n'y a pas de permutation à sa gauche dans le produit.
- de même si  $\sigma_{j_1} = \sigma_k$ , cela signifie que  $i$  est pair, et c'est de nouveau impossible que  $\sigma_k$  évalue un nombre pair en dehors de sa première occurrence pour la même raison.

Dans les deux cas, il est impossible que la permutation suivant  $P_2 \circ \sigma_{j_p}$  dans la suite  $s_i$  soit  $\sigma_{j_1}$ . Dès lors, il est impossible que l'entier  $m$  soit de nouveau évalué par  $\sigma_{j_p}$ . Cela implique, pour toutes les permutations apparaissant plusieurs fois dans la suite  $s_i$ , que celles-ci ne peuvent évaluer un élément de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  une unique fois, limitant leur occurrence à  $n$ . De ce fait, la suite  $s_i$  ne peut être infinie, nous sommes donc

arrivés à une contradiction.

Nous avons maintenant la preuve que l'image de  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  par le produit  $\sigma_1 \Leftarrow \cdots \Leftarrow \sigma_k$  est toujours univoquement déterminée, il ne reste qu'à montrer que le résultat de  $\sigma_1 \Leftarrow \cdots \Leftarrow \sigma_k$  est bien une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ . Considérons pour cela l'application :

$$\begin{aligned} f : \llbracket 1, n \rrbracket &\rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ i &\mapsto (\sigma_1 \Leftarrow \cdots \Leftarrow \sigma_k)(i) \end{aligned}$$

et montrons que celle-ci est injective. Soit donc  $i_1, i_2 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $f(i_1) = f(i_2)$ . Comme expliqué plus haut, on peut écrire l'action de  $f$  par une suite de compositions de permutations, écrivons donc :

$$\begin{aligned} s_{i_1} &= \sigma_{a_{i_1}} \circ \cdots \circ \sigma_{a_1}, & \text{avec } s_{i_1}(i_1) &= f(i_1) \\ s_{i_2} &= \sigma_{b_{i_2}} \circ \cdots \circ \sigma_{b_1}, & \text{avec } s_{i_2}(i_2) &= f(i_2) \end{aligned}$$

Comme les images  $f(i_1)$  et  $f(i_2)$  sont égales, elles ont en particulier la même parité. Cela veut dire que la dernière permutation des suites  $s_{i_1}$  et  $s_{i_2}$  est la même. Les permutations étant des bijections, l'antécédent de  $f(i_1)$  par  $\sigma_{a_{i_1}}$  et celui de  $f(i_2)$  par  $\sigma_{a_{i_2}}$  sont alors les mêmes, avec de ce fait la même parité, impliquant alors que  $\sigma_{a_{i_1-1}}$  et  $\sigma_{a_{i_2-1}}$  sont les mêmes permutations. Par induction, on vient à la conclusion que  $s_{i_2} = s_{i_1} \circ s'$  quitte à échanger les rôles de  $i_1$  et  $i_2$ , avec  $s'$  une suite de compositions de permutations. On peut alors écrire que  $s' = s_{i_1}^{-1} s_{i_2}$ , et en déduire que  $s'(i_2) = i_1$ .

Rappelons que la première permutation  $\sigma_{a_1}$  de la suite  $s_{i_1}$  dépend de la parité de  $i_1$ , et qu'en particulier  $\sigma_{a_1}$  ne peut évaluer  $i_1$  que si cette permutation se trouve en première occurrence de la suite. Or dans la suite  $s_{i_2}$  où  $\sigma_{a_1}$  est présente, elle doit effectivement évaluer  $i_1$  après  $s'$ . On en déduit que  $s'$  n'existe pas et que  $s_{i_1} = s_{i_2}$ , ce qui implique immédiatement que  $i_1 = i_2$ ,  $f$  est donc bien injective. Étant donné que  $f$  est une injection entre deux ensembles de même cardinal fini, c'est aussi une bijection.  $\square$

Une autre propriété importante à vérifier est l'associativité de ce produit.

**Proposition II.129.** *Le produit ping-pong est associatif.*

*Démonstration :*

Soient  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  des permutations de  $\mathfrak{S}_n$ . Nous allons montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$((\sigma_1 \Leftarrow \sigma_2) \Leftarrow \sigma_3)(i) = (\sigma_1 \Leftarrow \sigma_2 \Leftarrow \sigma_3)(i) = (\sigma_1 \Leftarrow (\sigma_2 \Leftarrow \sigma_3))(i)$$

On note pour cela  $\sigma_g = \sigma_1 \Leftarrow \sigma_2$  et  $\sigma_d = \sigma_2 \Leftarrow \sigma_3$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  fixé, le calcul de  $(\sigma_1 \Leftarrow \sigma_2 \Leftarrow \sigma_3)(i)$  peut être écrit comme une suite de compositions des permutations  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ , sans avoir deux occurrences d'une même permutation d'affilée. Lorsqu'une partie de cette suite composée uniquement des permutations  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  évalue un entier  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , cette partie correspond à la suite  $g_j$  de compositions de permutations obtenue en évaluant  $(\sigma_1 \Leftarrow \sigma_2)(j)$ , qui est égal à  $\sigma_g(j)$ . Ces parties peuvent donc être remplacées par  $\sigma_g$ , et la nouvelle écriture de  $S_i$  correspond à la suite de compositions de permutations décrite par le produit  $(\sigma_g \Leftarrow \sigma_3)(i)$ . Nous pouvons faire la même chose en remplaçant dans la première écriture de  $S_i$  les parties composées uniquement des permutations  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  par la permutation  $\sigma_d$ , ce qui donne une écriture de la suite de compositions de permutations décrite par le calcul  $(\sigma_1 \Leftarrow \sigma_d)(i)$ .

Ainsi, comme les produits  $(\sigma_g \Leftarrow \sigma_3)(i)$  et  $(\sigma_1 \Leftarrow \sigma_d)(i)$  sont décrits par la même succession de compositions de permutations donnée par  $(\sigma_1 \Leftarrow \sigma_2 \Leftarrow \sigma_3)(i)$ , leur résultat est le même. Cela étant vrai quel que soit le paramètre  $i$ , on en déduit que le produit ping-pong est associatif.  $\square$

Nous pouvons aussi déterminer quel est l'effet du produit ping-pong sur une permutation quelconque par une transposition.

**Proposition II.130.** *Pour  $n \geq 1$ ,  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  et  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a :*

– si  $i$  est impair :

$$((i \ i + 1) \Leftarrow \sigma)(a) = \begin{cases} i + 1 & \text{si } a = i, \\ \sigma(i) & \text{si } a = \sigma^{-1}(i + 1), \\ \sigma(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(\sigma \Leftarrow (i \ i + 1))(a) = \begin{cases} i & \text{si } a = i + 1, \\ \sigma(i + 1) & \text{si } a = \sigma^{-1}(i), \\ \sigma(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

– si  $i$  est pair :

$$(\sigma \Leftarrow (i \ i + 1))(a) = \begin{cases} i + 1 & \text{si } a = i, \\ \sigma(i) & \text{si } a = \sigma^{-1}(i + 1), \\ \sigma(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$((i \ i + 1) \Leftarrow \sigma)(a) = \begin{cases} i & \text{si } a = i + 1, \\ \sigma(i + 1) & \text{si } a = \sigma^{-1}(i), \\ \sigma(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

– si  $\sigma$  et  $(i \ i + 1)$  sont des permutations à support disjoint alors :

$$\sigma \Leftarrow (i \ i + 1) = (i \ i + 1) \Leftarrow \sigma = \sigma \circ (i \ i + 1).$$

*Démonstration :*

Il suffit de suivre la définition II.126 pour chaque cas. Par exemple, pour le cas  $i$  impair, le calcul de  $((i \ i + 1) \Leftarrow \sigma)(a)$  avec  $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$  suivra l'un de ces cas :

1. si  $a = i$ , comme  $i$  est impair on évalue  $(i \ i + 1)(i)$  ce qui donne  $i + 1$ , et comme  $i + 1$  est maintenant pair et retourné par la permutation la plus à gauche, il s'agit du résultat final.
2. si  $a = \sigma^{-1}(i + 1)$ , nous ne connaissons pas la parité de  $a$ . Étudions chaque cas :
  - si  $a$  est impair, alors nous pouvons supposer que  $a \neq i$  puisque ce cas est déjà fait. Comme  $a$  ne peut être égal à  $i + 1$  à cause de leurs parités différentes, la première permutation  $(i \ i + 1)$  n'a pas d'effets sur  $a$ , on évalue donc ensuite  $\sigma(a) = i + 1$ .
  - si  $a$  est pair, on commence par évaluer  $\sigma(a) = i + 1$ .

Dans les deux cas nous pouvons supposer que  $a \neq i$  et nous devons ensuite évaluer  $i + 1$  par la permutation  $(i \ i + 1)$ , qui retourne  $i$ . Par changement de parité, nous devons maintenant évaluer  $\sigma(i)$ . Nous avons de nouveau deux cas :

- si  $\sigma(i)$  est impair, alors il s'agit de notre résultat final,
- si  $\sigma(i)$  est pair, nous retournons à la permutation  $(i \ i + 1)$ . Or  $\sigma(i) \neq i + 1$ , en effet sinon on aurait  $a = \sigma^{-1}(i + 1) = i$ . Ainsi  $\sigma(i)$  est constant pour  $(i \ i + 1)$ , et il s'agit de la valeur finale.

Dans les deux cas, on obtient  $((i \ i + 1) \Leftarrow \sigma)(a) = \sigma(i)$  pour  $a = \sigma^{-1}(i + 1)$ .

3. Maintenant si  $a \notin \{i, \sigma^{-1}(i + 1)\}$ , on a le raisonnement suivant :
  - Si  $a$  est impair, la première permutation  $(i \ i + 1)$  n'a pas d'effet sur  $a$ , et on continue avec  $\sigma$ ,
  - si  $a$  est pair, on commence par la permutation  $\sigma$ .

Dans les deux cas,  $a$  est évalué par  $\sigma$  et devient  $\sigma(a)$ . Nous avons encore deux cas suivant sa parité :

- si  $\sigma(a)$  est impair, il s'agit de notre résultat final,
- si  $\sigma(a)$  est pair, on doit de nouveau regarder l'effet de  $(i \ i + 1)$ . Comme  $a \neq \sigma^{-1}(i + 1)$  par hypothèse, il s'agit de notre résultat final.

On obtient bien pour les deux cas que  $((i \ i + 1) \Leftarrow \sigma)(a) = \sigma(a)$ .

Le raisonnement pour étudier  $\sigma \Leftarrow (i \ i + 1)$  est analogue, tout comme le cas  $i$  pair. Concernant le dernier

point, si l'on suppose que  $\sigma$  et  $(i\ i+1)$  sont des permutations à support disjoint, alors à chaque évaluation par un entier  $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , seule l'une des deux permutations agira sur  $a$ , et a fortiori cette unique action détermine le résultat final. Étant donné que la permutation  $\sigma \circ (i\ i+1)$  agit de la même manière, on en déduit sous cette condition que  $\sigma \Leftrightarrow (i\ i+1) = \sigma \circ (i\ i+1) = (i\ i+1) \Leftrightarrow \sigma$ .  $\square$

On peut alors exprimer ce comportement du produit ping-pong vis-à-vis de l'inverse pour la composition classique.

**Proposition II.131.** *Pour  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  et  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a :*

$$((i\ i+1) \Leftrightarrow \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \Leftrightarrow (i\ i+1)$$

*Démonstration :*

Si  $i$  est impair, on a d'après la proposition II.130 pour  $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$(\sigma^{-1} \Leftrightarrow (i\ i+1))(a) = \begin{cases} i & \text{si } a = i+1, \\ \sigma^{-1}(i+1) & \text{si } a = \sigma(i), \\ \sigma^{-1}(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$((i\ i+1) \Leftrightarrow \sigma)(a) = \begin{cases} i+1 & \text{si } a = i, \\ \sigma(i) & \text{si } a = \sigma^{-1}(i+1), \\ \sigma(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque ainsi que :

$$(\sigma^{-1} \Leftrightarrow (i\ i+1)) \circ ((i\ i+1) \Leftrightarrow \sigma) = \text{Id}_{\mathfrak{S}_n} = ((i\ i+1) \Leftrightarrow \sigma) \circ (\sigma^{-1} \Leftrightarrow (i\ i+1))$$

et on conclut que  $((i\ i+1) \Leftrightarrow \sigma)^{-1} = (\sigma^{-1} \Leftrightarrow (i\ i+1))$ . On procède de la même manière si  $i$  est pair.  $\square$

*Remarque II.132.* Cela n'a pas été précisé dans la proposition II.131, mais nous avons aussi la relation :

$$(\sigma \Leftrightarrow (i\ i+1))^{-1} = (i\ i+1) \Leftrightarrow \sigma^{-1}$$

## 5.2.2 Lien entre le produit ping-pong et le monoïde diagrammatique

Après l'introduction du produit ping-pong, il est à présent temps de vérifier qu'il convient pour transporter l'étude du monoïde diagrammatique entièrement aux permutations.

**Théorème II.133 – Représentation du monoïde diagrammatique avec les permutations.**

La projection  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}$  est un morphisme de monoïde entre  $\mathcal{D}_n^K$  muni de la concaténation et  $\mathfrak{S}_n$  muni du produit ping-pong.

*Démonstration :*

On vérifie aisément que  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(\text{Id}_{\mathcal{D}_n^K}) = \text{Id}_{\mathfrak{S}_n}$ , il ne reste qu'à vérifier que pour tout  $W_1, W_2$  des éléments du monoïde diagrammatique on ait bien  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W_1 W_2) = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W_1) \Leftrightarrow \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W_2)$ . Nous pouvons sans perte de généralité nous restreindre au cas où  $W_2$  est un générateur de  $\mathcal{D}_n^K$ . Soit  $W$  un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  et  $u_i$  le  $i^{\text{e}}$  générateur de  $\mathcal{D}_n^K$ . On note  $\sigma_W = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W) \in \mathfrak{S}_n$ . On a par définition II.120 que  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(u_i) = (i\ i+1)$  et par proposition II.130 :

– si  $i$  est impair :

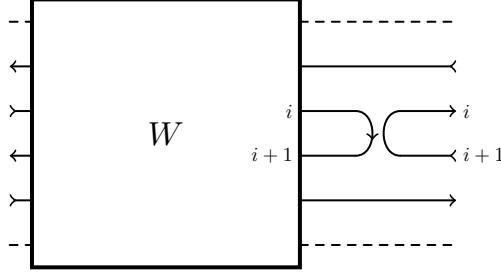
$$(\sigma_W \Leftrightarrow (i\ i+1))(a) = \begin{cases} i & \text{si } a = i+1, \\ \sigma_W(i+1) & \text{si } a = \sigma_W^{-1}(i), \\ \sigma_W(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

– si  $i$  est pair :

$$(\sigma_W \Leftarrow (i \ i + 1))(a) = \begin{cases} i + 1 & \text{si } a = i, \\ \sigma_W(i) & \text{si } a = \sigma_W^{-1}(i + 1), \\ \sigma_W(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

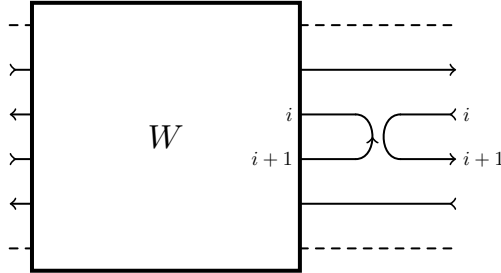
Regardons maintenant le résultat de  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(Wu_i)$  :

– Si  $i$  est impair, nous avons la situation suivante :



Nous pouvons immédiatement dire que  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(Wu_i)(i + 1) = i$ . De plus, si on considère le brin en  $i^e$  position sortant de  $W$ , nous voyons clairement que celui-ci continue son chemin dans  $W$  en rentrant en  $(i + 1)^e$  position. Nous pouvons par ailleurs remarquer qu'il s'agit de la seule action possible par  $u_i$  pour un brin sortant de  $W$  à sa droite, on en déduit donc que  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(Wu_i)(\sigma_W^{-1}(i)) = \sigma_W(i + 1)$ . À présent pour un brin ne démarrant pas en  $(i + 1)^e$  ou en  $(\sigma_W^{-1}(i))^e$  position, comme  $u_i$  ne peut agir sur ce brin, sa position d'arrivée ne dépend que de  $W$ , et donc si ce brin démarre en  $a$  il termine en  $\sigma_W(a)$ . On conclut donc pour  $i$  impair que  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W_1u_i) = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W_1) \Leftarrow \pi_{\mathcal{D}_n^K}(u_i)$ .

– Si  $i$  est pair, nous avons la situation suivante :



Ce cas se traite de façon analogue au précédent. On peut encore une fois établir immédiatement que  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(Wu_i)(i) = i + 1$ ; ensuite l'étude du brin sortant de  $W$  en  $(i + 1)^e$  position de  $W$  amène à la situation  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(Wu_i)(\sigma_W^{-1}(i + 1)) = \sigma_W(i)$ . Finalement l'argument concernant les autres brins, déjà donné au cas précédent, conclut que  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W_1u_i) = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W_1) \Leftarrow \pi_{\mathcal{D}_n^K}(u_i)$  pour  $i$  pair.  $\square$

Ce morphisme n'a malheureusement aucune chance d'être injectif ou surjectif, mais ces défauts ne posent pas vraiment de soucis particuliers. En effet le défaut d'injectivité vient de la non-détection des boucles  $\circ$ , ainsi que de l'isotopie si l'on considère les multitudes d'écritures non réduites d'un même élément de  $\mathcal{D}_n^K$  comme différentes; et le défaut de surjectivité provient seulement de la taille du groupe des permutations qui est un espace d'arrivée trop grand.

**Proposition II.134.** *Le morphisme  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}$  a pour noyau l'ensemble  $\{\circ^c \mid c \in \mathbb{N}\}$  et ne peut être surjectif pour  $n \geq 3$ .*

*Démonstration :*

Commençons par le noyau de ce morphisme. Par définition II.120, l'image d'un élément diagramma-

tique dépend de l'algorithme II.108. Nous savons que  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(\mathbb{1}_n) = \text{Id}_{\mathfrak{S}_n}$ , et par la proposition II.109 nous savons que l'ajout de boucles  $\circ$  n'affecte pas la réponse de l'algorithme. Par conséquent tout élément de la forme  $\circ^c$  avec  $c \in \mathbb{N}$  est envoyé sur la bijection triviale. Pour montrer qu'il s'agit des seuls éléments dans le noyau de  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}$ , considérons  $W$  un élément de  $\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}$  contenant au moins un générateur  $u_i$  avec  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ce générateur se trouve à l'extrémité gauche de  $W$ . Suivant l'algorithme II.108 et la parité de  $i$ , nous aurons alors soit  $\text{SUIVREBRIN}(W, i) = i+1$  soit  $\text{SUIVREBRIN}(W, i+1) = i$ , ce qui empêche  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(W)$  d'être l'identité dans les permutations. Ainsi on a bien  $\ker(\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}) = \{\circ^c \mathbb{1}_n \mid c \in \mathbb{N}\}$ .

Maintenant concernant la surjectivité, nous savons par la proposition II.122 que la projection  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}$  passe au quotient par les relations régissant le monoïde diagrammatique modulo les boucles, en particulier cela signifie que le cardinal de l'ensemble de toutes les images possibles de  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}$  est exactement le nombre de classes d'équivalences, qui est  $\text{Cat}(n)$  par la proposition \*22. Or pour  $n \geq 3$ , on a  $\text{Cat}(n) < n! = |\mathfrak{S}_n|$ , ainsi  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}$  ne peut être surjective.  $\square$

*Remarques II.135.*

1. Malgré le défaut d'injectivité, rappelons tout de même que grâce à la proposition II.122 les permutations obtenues par le morphisme  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}$  sont des invariants pour les classes d'équivalence du monoïde diagrammatique.
2. L'auteur a tenté de chercher un sous-ensemble particulier de  $\mathfrak{S}_n$  permettant de rendre  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}$  surjective. Les permutations à support non croisé semblaient être une piste naturelle, puisque les éléments diagrammatiques ne peuvent contenir des croisements, mais on trouve un contre-exemple pour  $n = 6$  :

$$W = u_4 u_3 u_2 u_1 u_5 u_4 u_3 u_2, \quad \pi_{\mathcal{D}_6^{\mathbb{K}}}(W) = (1 \ 5 \ 4) (2 \ 3 \ 6)$$

Une vérification faite à la main montre cependant qu'il n'y a pas de contre-exemple pour  $n \leq 5$ .

Grâce à ce morphisme, nous allons pouvoir en apprendre plus à la fois sur le produit ping-pong et sur les éléments diagrammatiques. Nous pouvons notamment remarquer que les relations du monoïde diagrammatique sont transportées aux permutations.

**Proposition II.136.** *Pour  $\omega_i = (i \ i+1)$ ,  $\omega_j = (j \ j+1)$  des transpositions de  $\mathfrak{S}_n$ , on a :*

$$\begin{cases} \omega_i \Leftrightarrow \omega_i = \omega_i & \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\ \omega_i \Leftrightarrow \omega_j \Leftrightarrow \omega_i = \omega_i & \text{pour } |i-j| = 1, \\ \omega_i \Leftrightarrow \omega_j = \omega_j \Leftrightarrow \omega_i = \omega_i \circ \omega_j & \text{pour } |i-j| > 1 \end{cases}$$

*Démonstration :*

Découle immédiatement du théorème II.133 et de la proposition II.130 concernant le lien avec la composition dans la troisième relation.  $\square$

Nous pouvons aussi donner un sens à l'inverse d'une permutation image d'un élément diagrammatique par ce morphisme.

**Proposition II.137.** *Pour  $W = u_{i_1} \dots u_{i_k}$  un élément de  $\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}$  et  $W' = u_{i_k} \dots u_{i_1}$  l'élément miroir de  $W$ , nous avons  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(W') = \pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(W)^{-1}$ .*

*Démonstration :*

On montre cette propriété par induction sur la longueur de  $W$ . Pour  $W = \mathbb{1}_n$ , on a  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(\mathbb{1}_n) = \text{Id}_{\mathfrak{S}_n}$  qui est son propre inverse. Le même argument suit pour  $W = u_i$  avec  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

Supposons qu'un élément  $W = u_{i_1} \dots u_{i_k}$  et son élément miroir  $W' = u_{i_k} \dots u_{i_1}$  vérifient la propriété. On note  $\sigma_W = \pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(W)$  et on vérifie que la propriété est toujours vérifiée par  $W u_j$  et  $u_j W'$  avec  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Or on a par la proposition II.131 :

$$\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(u_j W') = (j \ j+1) \Leftrightarrow \sigma_W^{-1} = (\sigma_W \Leftrightarrow (j \ j+1))^{-1} = \pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(W u_j)^{-1}$$

La propriété est ainsi démontrée par induction.  $\square$

*Remarque II.138.* Si un élément diagrammatique est un palindrome, c'est-à-dire qu'il est équivalent à son miroir, alors la permutation qui lui est associée est une involution. En particulier, son écriture en cycle à support disjoint n'est composée que de 2-cycles.

Une dernière propriété assez longue à vérifier permet de décrire la permutation associée à un élément diagrammatique « retourné ».

**Proposition II.139.** *Pour  $W = u_{i_1} \dots u_{i_k}$  un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  et  $W' = u_{n-i_1} \dots u_{n-i_k}$  le retournement de  $W$ , nous avons :*

$$\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W') = \begin{cases} \omega \circ \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W) \circ \omega & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \omega \circ \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W)^{-1} \circ \omega & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

avec  $\omega$  la permutation définie telle que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\omega(i) = n + 1 - i$ .

*Démonstration :*

Nous rappelons que la conjugaison d'une permutation  $(a_1 \dots a_m)$  par  $\sigma$  a pour résultat :

$$\sigma \circ (a_1 \dots a_m) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \dots \sigma(a_m))$$

De plus comme  $\omega$  est une involution, on a  $\omega^{-1} = \omega$ . On montre la propriété par récurrence sur la longueur de  $W$ . Le cas  $W = \mathbb{1}_n$  est immédiat, et pour  $W = u_i$  avec  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  on a :

$$\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W') = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(u_{n-i}) = (n-i \ n-i+1) = \omega(i \ i+1) \omega^{-1}$$

Or  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W) = (i \ i+1)$  qui est une involution, ainsi peu importe la parité de  $n$ , on a bien le résultat annoncé.

Supposons qu'un élément  $W = u_{i_1} \dots u_{i_k}$  et son retournement  $W' = u_{n-i_1} \dots u_{n-i_k}$  vérifient la propriété. On note  $\sigma_W = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W)$  et  $\sigma_{W'} = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W')$  et on étudie la propriété pour  $Wu_j$  et  $W'u_{n-j}$  avec  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Si l'on suppose  $n$  impair, alors  $n+1-j$  est de la même parité que  $j$ , on en déduit grâce à la proposition II.130 que :

– si  $j$  est impair :

$$(\sigma_{W'} \Leftrightarrow (n-j \ n-j+1))(a) = \begin{cases} n+1-j & \text{si } a = n-j, \\ \sigma_{W'}(n-j) & \text{si } a = \sigma_{W'}^{-1}(n+1-j), \\ \sigma_{W'}(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

– si  $j$  est pair :

$$(\sigma_{W'} \Leftrightarrow (n-j \ n-j+1))(a) = \begin{cases} n-j & \text{si } a = n+1-j, \\ \sigma_{W'}(n+1-j) & \text{si } a = \sigma_{W'}^{-1}(n-j), \\ \sigma_{W'}(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour développer le cas  $j$  impair, on a du côté de  $\omega \circ \pi_{\mathcal{D}_n^K}(Wu_j) \circ \omega$  :

– si  $a = n-j$ , alors  $\omega(n-j) = j+1$  et :

$$\begin{aligned} (\omega \circ (\sigma_W \Leftrightarrow (j \ j+1)) \circ \omega)(n-j) &= (\omega \circ (\sigma_W \Leftrightarrow (j \ j+1)))(j+1) = \omega(j) \\ &= n+1-j, \end{aligned}$$

– si  $a = \sigma_{W'}^{-1}(n+1-j)$ , alors par hypothèse de récurrence :

$$\omega(\sigma_{W'}^{-1}(n+1-j)) = (\omega \circ \sigma_{W'}^{-1} \circ \omega)(j) = \sigma_W^{-1}(j)$$

et :

$$\begin{aligned} (\omega \circ (\sigma_W \Leftrightarrow (j \ j+1)) \circ \omega)(a) &= (\omega \circ (\sigma_W \Leftrightarrow (j \ j+1)))(\sigma_W^{-1}(j)), \\ &= \omega(\sigma_W(j+1)) \\ &= (\omega \circ \sigma_W \circ \omega)(n-j) \\ &= \sigma_{W'}(n-j) \end{aligned}$$

– Pour les autres valeurs de  $a$ , on a  $\omega(a) = n-a$ . De plus  $\omega(a) \notin \{j+1, \sigma_W^{-1}(j)\}$  car  $a \notin$

$$\begin{aligned} \{n - j, \sigma_{W'}^{-1}(n + 1 - j)\}, \text{ on en déduit par hypothèse de récurrence :} \\ (\omega \circ (\sigma_W \Leftarrow (j \ j + 1)) \circ \omega)(a) &= (\omega \circ (\sigma_W \Leftarrow (j \ j + 1)))(n - a) \\ &= \omega(\sigma_W(n - a)) \\ &= (\omega \circ \sigma_W \circ \omega)(a) \\ &= \sigma_{W'}(a) \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(W') = \omega \circ \pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(Wu_j) \circ \omega$  si  $n$  et  $j$  sont impairs. Le cas  $n$  impair et  $j$  pair se montre de la même manière. Regardons à présent ce qu'il se passe si  $n$  est pair. Pour commencer,  $n + 1 - j$  et  $j$  sont maintenant de parité différente, cela implique donc :

– si  $j$  est impair :

$$(\sigma_{W'} \Leftarrow (n - j \ n - j + 1))(a) = \begin{cases} n - j & \text{si } a = n + 1 - j, \\ \sigma_{W'}(n + 1 - j) & \text{si } a = \sigma_{W'}^{-1}(n - j), \\ \sigma_{W'}(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

– si  $j$  est pair :

$$(\sigma_{W'} \Leftarrow (n - j \ n - j + 1))(a) = \begin{cases} n + 1 - j & \text{si } a = n - j, \\ \sigma_{W'}(n - j) & \text{si } a = \sigma_{W'}^{-1}(n + 1 - j), \\ \sigma_{W'}(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Détaillons le cas  $j$  impair. Tout d'abord, on a par la proposition II.131 :

$$\omega \circ \pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(Wu_j)^{-1} \circ \omega = \omega \circ ((j \ j + 1) \Leftarrow \sigma_W^{-1}) \circ \omega$$

Ensuite :

– si  $a = n + 1 - j$ , alors  $\omega(n + 1 - j) = j$  et :

$$\begin{aligned} (\omega \circ ((j \ j + 1) \Leftarrow \sigma_W^{-1}) \circ \omega)(n + 1 - j) &= (\omega \circ ((j \ j + 1) \Leftarrow \sigma_W^{-1}))(j) = \omega(j + 1) \\ &= n - j \end{aligned}$$

– si  $a = \sigma_{W'}^{-1}(n - j)$ , alors par hypothèse de récurrence :

$$\omega(\sigma_{W'}^{-1}(n - j)) = (\omega \circ \sigma_{W'}^{-1} \circ \omega)(j + 1) = \sigma_W(j + 1)$$

et :

$$\begin{aligned} (\omega \circ ((j \ j + 1) \Leftarrow \sigma_W^{-1}) \circ \omega)(a) &= (\omega \circ ((j \ j + 1) \Leftarrow \sigma_W^{-1}))(\sigma_W(j + 1)) \\ &= \omega(\sigma_W^{-1}(j)) = (\omega \sigma_W^{-1} \omega)(j) \\ &= \sigma_{W'}(n + 1 - j) \end{aligned}$$

– Pour les autres valeurs de  $a$ , on a  $\omega(a) = n - a$ . De plus  $\omega(a) \notin \{j, \sigma_W(j + 1)\}$  car  $a \notin \{n + 1 - j, \sigma_{W'}^{-1}(n - j)\}$ , on en déduit par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} (\omega \circ ((j \ j + 1) \Leftarrow \sigma_W^{-1}) \circ \omega)(a) &= (\omega \circ ((j \ j + 1) \Leftarrow \sigma_W^{-1}))(n - a) \\ &= \omega(\sigma_W^{-1}(n - a)) \\ &= (\omega \circ \sigma_W^{-1} \circ \omega)(a) \\ &= \sigma_{W'}(a) \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(W') = \omega \circ \pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}(Wu_j)^{-1} \circ \omega$  si  $n$  est pair et  $j$  impair. Le cas  $n$  pair et  $j$  impair se montre encore une fois de la même manière.  $\square$

### 5.2.3 Conséquences et applications

Le produit ping-pong et le morphisme  $\pi_{\mathcal{D}_n^{\mathbb{K}}}$  permettent d'énoncer de nouveaux résultats ou d'améliorer d'autres concernant les éléments diagrammatiques ou même le polynôme de JONES. Il est, par

**Pseudo code 7** *Toutes les composantes d'un élément diagrammatique clos optimisé* (Voir II.140)**Requiert :**  $W$  élément de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit comme  $W = \circ^e u_{i_1} \dots u_{i_k}$ .**Résultat :** Le nombre de composantes total de  $W$  après clôture.

```


1: procédure NBComposante( $W$ )
2:    $c \leftarrow e$ 
3:    $\sigma \leftarrow \text{Id}_{\mathfrak{S}_n}$ 
4:   pour  $l$  allant de 1 à  $k$  faire
5:      $\sigma' \leftarrow \sigma \Leftrightarrow (i_l \ i_l + 1)$  Formule donnée en proposition II.130
6:     si  $\sigma = \sigma'$  alors
7:        $c \leftarrow c + 1$ 
8:     fin condition
9:      $\sigma \leftarrow \sigma'$ 
10:  fin pour
11:   $c \leftarrow c + \text{NBcycle}(\sigma)$ 
12:  retourner  $c$ 
13: fin

```

Où  $\text{NBcycle}(\sigma)$  retourne le nombre de cycles dans la décomposition en cycles disjoints de  $\sigma$ .

exemple, maintenant possible de compter le nombre de composantes d'un élément diagrammatique non réduit sans avoir à suivre ses brins.

**Algorithme II.140 – Toutes les composantes d'un élément diagrammatique clos optimisé.**(Pseudo code ci-dessus) Pour un élément réduit sans boucles  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$ , cet algorithme permet de compter le nombre de composantes de  $W$  après clôture sans avoir à utiliser l'algorithme II.108.

Il s'agit d'une simple amélioration de l'algorithme II.125 grâce au produit ping-pong. En utilisant la proposition II.130, la complexité de celui-ci est toujours linéaire en la taille de  $W$  si l'on ne tient pas compte de l'appel à  $\text{NBcycle}(\sigma)$ , mais nous n'avons besoin de lire  $W$  qu'une seule fois. Par ailleurs, si l'on écrit les permutations au sein de l'algorithme à chaque instant sous forme de cycles à support disjoint, nous n'avons effectivement pas la nécessité d'augmenter la complexité; mais il nous faut pour cela connaître le comportement de cette écriture sous l'action du produit ping-pong, ce que l'on peut voir avec le lemme II.143. 

Nous pouvons aussi calculer le polynôme de JONES grâce à ce produit.

**Algorithme II.141 – Calcul du polynôme de JONES – avec les permutations.**(Pseudo code ci-contre) Pour un mot de tresse à  $n$  brins  $\beta$  de longueur  $l$ , l'algorithme suivant permet de calculer le polynôme de JONES de l'entrelacs obtenu en clôturant la tresse représentée par  $\beta$ .

Le calcul utilisera le crochet de KAUFFMAN non clos de  $\beta$  et notamment son écriture en somme de polynômes de choix, vu en définition II.48. On note alors  $W_k$  les éléments réduits sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$ , et  $\alpha_k$  les permutations images de  $W_k$  par la projection  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}$ , avec  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ . Les polynômes de choix sont regroupés dans un tableau  $P$  dont les éléments sont indexés par les  $\alpha_k$ . Une première boucle s'occupe de l'action de chaque lettre  $\sigma_{i_j}^{e_j}$  de  $\beta$  sur  $P$ . Nous avons pour cela besoin d'une deuxième boucle permettant de décrire le produit de  $u_{i_j}$  sur chaque  $W_k$ , que l'on effectue avec leurs permutations associées et le produit ping-pong. Cela permet de détecter pour chaque produit si un facteur  $\delta$  apparaît avec la proposition II.123. Une fois le calcul de  $\langle \beta \rangle$  terminé avec la première boucle, il nous suffit de définir le vecteur de composante  $C$ , contenant le nombre de composantes après clôture de chaque élément réduit  $W_k$ , puis de calculer le produit scalaire  $P \cdot C$  pour obtenir le crochet de KAUFFMAN. La détermination de

**Pseudo code 8**      *Calcul du polynôme de JONES – avec les permutations*      (Voir II.141)

**Requiert :**  $n$  nombre de brins supérieur ou égal à 2,  
 $l$  longueur du mot de tresse supérieur ou égal à 0,  
 $\beta$  mot de tresse à  $n$  brins de longueur  $l$  écrit comme  $\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \dots \sigma_{i_l}^{e_l}$ .


**Résultat :** Le polynôme de JONES de l'entrelacs associé au mot de tresse  $\beta$ .

```

1: procédure POLYNOMEJONESPERMUTATION( $n, l, \beta$ )
2:    $P \leftarrow [0, \dots, 0]$       ▷      Tableau de taille Cat( $n$ ) des polynômes de choix de  $\langle \beta \rangle$ 
3:    $P[\text{Id}_{\mathfrak{S}_n}] \leftarrow 1$ 
4:   pour  $j$  allant de 1 à  $l$  faire      ▷      Action de chaque lettre de  $\beta$ 
5:      $P' \leftarrow [0, \dots, 0]$       ▷      Tableau de taille Cat( $n$ ) temporaire
6:     pour  $k$  allant de 1 à  $\text{Cat}(n)$  faire      ▷      Choix de séparation  $\rangle \langle$  de la  $j^{\text{e}}$  lettre  $\sigma_{i_j}^{e_j}$ 
7:        $c \leftarrow 0$ 
8:        $\gamma \leftarrow \alpha_k \Leftarrow (i_j \ i_j + 1)$ 
9:       si  $\gamma = \alpha_k$  alors      ▷      Application de la proposition II.123
10:         $c \leftarrow 1$ 
11:       fin condition
12:        $P'[\gamma] \leftarrow P'[\gamma] + \tau^{-e_{i_j}} \delta^c P[\alpha_k]$ 
13:     fin pour
14:      $P \leftarrow \tau^{e_{i_j}} P + P'$       ▷      Action de la  $j^{\text{e}}$  lettre  $\sigma_{i_j}^{e_j}$ 
15:   fin pour
16:    $C \leftarrow [\text{NBCYCLE}(\alpha_1), \dots, \text{NBCYCLE}(\alpha_{\text{Cat}(n)})]$       ▷      Vecteur de composante
17:    $P \leftarrow P \cdot C$       ▷      Clôture de  $\langle \beta \rangle$ 
18:    $\omega \leftarrow \sum_{i=1}^l e_i$       ▷      Entortillement de l'entrelacs associé à  $\beta$ 
19:   retourner  $((-\tau^{-3})^\omega P)_{\tau=t^{-\frac{1}{4}}}$ 
20: fin

```

**Où** les polynômes de choix sont associés aux éléments réduits sans boucles  $W_k$  de  $\mathcal{D}_n^K$ , les  $\alpha_k$  sont les permutations issues de la projection des  $W_k$ , et  $\text{NBCYCLE}(\alpha)$  retourne le nombre de cycles à supports disjoints dans la décomposition de  $\alpha$ . Les tableaux  $P$  et  $P'$  sont indexés de la même manière par les  $\alpha_k$ .

l'entortillement est faite grâce aux puissances des lettres de  $\beta$ , car une tresse a tous ses brins orientés de la même façon pour la clôture standard. Nous avons à partir de ce point tout ce qu'il faut pour finalement obtenir le polynôme de JONES. 

*Remarque II.142.* On remarque que le cheminement général ressemble beaucoup à l'algorithme II.83, nous faisons que réécrire différemment le raisonnement vu avec les matrices diagrammatiques.

Nous pouvons étudier également comment le nombre de composantes varie à chaque fois que l'on ajoute une lettre à un élément diagrammatique  $W$ . Il suffit pour cela de regarder comment évolue la décomposition en cycle disjoint d'une permutation avec le produit ping-pong.

**Lemme II.143.** Pour  $n \geq 1$ ,  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  et  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a :

- si  $i$  est impair, le calcul  $(i \ i + 1) \Leftarrow \sigma$  donne :
  - si  $\sigma = (a_1 \ \dots \ a_k \ i)$  ou  $\sigma = (a_1 \ \dots \ a_k \ i + 1)$  :
 
$$(i \ i + 1) \Leftarrow \sigma = (i \ i + 1 \ a_1 \ \dots \ a_k),$$

- si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i b_1 \cdots b_l i + 1)$  :  

$$(i i + 1) \Leftarrow \sigma = (i i + 1 a_1 \cdots a_k) \circ (b_1 \cdots b_l),$$
  - si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i) \circ (b_1 \cdots b_l i + 1)$  :  

$$(i i + 1) \Leftarrow \sigma = (i i + 1 b_1 \cdots b_l a_1 \cdots a_k),$$
  - et le produit  $\sigma \Leftarrow (i i + 1)$  :
    - si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i)$  ou  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i + 1)$  :  

$$\sigma \Leftarrow (i i + 1) = (i + 1 i a_1 \cdots a_k),$$
    - si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i + 1 b_1 \cdots b_l i)$  :  

$$\sigma \Leftarrow (i i + 1) = (i + 1 i a_1 \cdots a_k) \circ (b_1 \cdots b_l),$$
    - si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i + 1) \circ (b_1 \cdots b_l i)$  :  

$$\sigma \Leftarrow (i i + 1) = (i + 1 i b_1 \cdots b_l a_1 \cdots a_k);$$
  - si  $i$  est pair, le calcul  $(i i + 1) \Leftarrow \sigma$  donne :
    - si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i)$  ou  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i + 1)$  :  

$$\sigma \Leftarrow (i i + 1) = (i + 1 i a_1 \cdots a_k),$$
    - si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i + 1 b_1 \cdots b_l i)$  :  

$$\sigma \Leftarrow (i i + 1) = (i + 1 i a_1 \cdots a_k) \circ (b_1 \cdots b_l),$$
    - si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i + 1) \circ (b_1 \cdots b_l i)$  :  

$$\sigma \Leftarrow (i i + 1) = (i + 1 i b_1 \cdots b_l a_1 \cdots a_k);$$
  - et le produit  $\sigma \Leftarrow (i i + 1)$  :
    - si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i)$  ou  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i + 1)$  :  

$$(i i + 1) \Leftarrow \sigma = (i i + 1 a_1 \cdots a_k),$$
    - si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i b_1 \cdots b_l i + 1)$  :  

$$(i i + 1) \Leftarrow \sigma = (i i + 1 a_1 \cdots a_k) \circ (b_1 \cdots b_l),$$
    - si  $\sigma = (a_1 \cdots a_k i) \circ (b_1 \cdots b_l i + 1)$  :  

$$(i i + 1) \Leftarrow \sigma = (i i + 1 b_1 \cdots b_l a_1 \cdots a_k),$$
  - en particulier si  $\sigma = (i i + 1)$ , alors  $(i i + 1) \Leftarrow \sigma = \sigma \Leftarrow (i i + 1) = (i i + 1)$ ,
  - si  $\{i, i + 1\} \cap \text{Supp}(\sigma) = \emptyset$ , on a alors  $(i i + 1) \Leftarrow \sigma = \sigma \Leftarrow (i i + 1) = (i i + 1) \circ \sigma$ .
- Dans tous les cas décrits,  $i, i + 1 \notin \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l\}$  et  $k, l \geq 0$ . Si  $l = 0$ , le cycle  $(b_1 \cdots b_l)$  devient l'identité.

*Démonstration :*

Découle de la proposition II.130. □

Nous en déduisons le résultat suivant concernant l'évolution du nombre de composantes.

**Lemme II.144.** *Pour  $W$  un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  et  $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , le nombre de composantes après clôture de  $Wu_i$  diffère d'exactly 1 par rapport à celui de  $W$ .*

*Démonstration :*

Conséquence directe du lemme II.143 et de la proposition II.124. On utilise aussi la proposition II.123 pour les cas où  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(Wu_i) = \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W)$ . Précisons que si  $W$  est tel que sa projection est de la forme  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W) = (a_1 \cdots a_k i)$  avec  $l > 0$ , alors cela signifie que  $i + 1$  est un point fixe pour  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W)$ . Ainsi, comme  $i + 1 \in \text{Supp}(\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W) \Leftarrow (i i + 1))$ , nous obtenons que  $i + 1$  n'est plus un point fixe, ce qui retire bien une composante. On a la même situation en échangeant les rôles de  $i$  et  $i + 1$ . □

Comme dit en introduction de cette sous-section, nous pouvons grâce à ces résultats déduire des propriétés sur le polynôme de JONES, à travers bien sûr le crochet de KAUFFMAN. Nous pouvons par

exemple étudier le degré minimal et maximal du polynôme de JONES. Cela a déjà été fait de manière plus précise et générale par FIEDLER [Fie91], même auparavant par KAUFFMAN [Kau87, Proposition 2.9 p. 400], mais la proposition suivante utilise une preuve essentiellement algébrique plutôt que topologique.

**Théorème II.145 – Écart entre les degrés extrémaux du polynôme de JONES.**

Pour un entrelacs  $L$  obtenu avec une tresse non triviale à  $n \geq 2$  brins représentée par un mot de longueur  $l \geq 1$ , l'écart entre le degré minimal et maximal du polynôme de JONES de  $L$  est borné par  $n + l - 2$ .

*Démonstration :*

On suppose que le mot de tresse  $\beta$  n'est pas vide, en particulier on a alors  $n \geq 2$  et  $l \geq 1$ . Si  $l = 1$ , alors le mot de tresse s'écrit  $\beta = \sigma_i^e$  et on a  $\langle \beta \rangle = \tau^e + \tau^{-e} u_i$ . Comme  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(u_i) = (i \ i + 1)$ , par la proposition II.124 nous savons que la clôture de  $u_i$  aura une composante de moins que celle de  $\mathbb{1}_n$ , on en déduit avec  $\delta = -\tau^2 - \tau^{-2}$  :

$$\langle \widehat{\beta} \rangle = \tau^e \delta^{n-1} + \tau^{-e} \delta^{n-2}$$

ce qui nous donne concernant le degré minimal et maximal :

$$\deg_{\max} \left( \langle \widehat{\beta} \rangle \right) \leq \max \{2(n-1) + e, 2(n-2) - e\} = 2(n-1) + e,$$

$$\deg_{\min} \left( \langle \widehat{\beta} \rangle \right) \geq \min \{-2(n-1) + e, -2(n-2) - e\} = -2(n-1) + e.$$

pour  $e = \pm 1$ . On remarquera par ailleurs que pour  $e = 1$ , le degré minimum est atteint pour les deux termes, et de même pour le degré maximal avec  $e = -1$ , ce qui nous oblige à utiliser des inégalités. Nous pouvons en déduire une majoration pour l'écart entre ces degrés extrémaux :

$$\deg_{\max} \left( \langle \widehat{\beta} \rangle \right) - \deg_{\min} \left( \langle \widehat{\beta} \rangle \right) \leq 2(n-1) + e + 2(n-1) - e = 4(n-1)$$

La normalisation du crochet ne faisant que translater les degrés, l'écart n'est pas modifié par cette opération. Avec le changement de variable  $\tau = t^{-\frac{1}{4}}$ , on trouve bien un écart majoré par  $n-1 = n+l-2$ .

Pour  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $e = \pm 1$  et  $\beta$  un mot de tresse à  $n \geq 2$  brins de longueur  $l \geq 1$  tel que :

$$\langle \beta \rangle = \sum_{i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_i W_i$$

avec  $W_i$  les éléments diagrammatiques réduits de  $\mathcal{D}_n^K$ , nous allons borner la variation de l'écart entre les degrés extrémaux lorsque l'on ajoute une lettre  $\sigma_j^e$  à  $\beta$ . Tout d'abord, on a :

$$\langle \beta \sigma_j^e \rangle = \langle \beta \rangle (\tau^e + \tau^{-e} u_j) = \tau^e \langle \beta \rangle + \tau^{-e} \langle \beta \rangle u_j$$

ce qui donne après clôture :

$$\langle \widehat{\beta \sigma_j^e} \rangle = \text{Cl} (\tau^e \langle \beta \rangle + \tau^{-e} \langle \beta \rangle u_j) = \tau^e \text{Cl} (\langle \beta \rangle) + \tau^{-e} \text{Cl}_{u_j} (\langle \beta \rangle)$$

Concernant le degré maximal de ce polynôme, on a :

$$\deg_{\max} \left( \langle \widehat{\beta \sigma_j^e} \rangle \right) \leq \max \{e + \deg_{\max} (\text{Cl} (\langle \beta \rangle)), -e + \deg_{\max} (\text{Cl}_{u_j} (\langle \beta \rangle))\}$$

Or par le lemme II.144, nous savons que pour  $W_i$  un élément réduit sans boucles de  $\mathcal{D}_n^K$ , le nombre de composantes de  $W_i u_j$  varie d'exactlyment 1 par rapport à celui de  $W_i$ . On en déduit avec  $c_i$  le nombre de composantes après clôture de  $W_i$  :

$$\begin{aligned} \deg_{\max} (\text{Cl}_{u_j} (\langle \beta \rangle)) &\leq \max_{i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} \{ \deg_{\max} (P_i) - e + 2(c_i + 1) \} \\ &\leq 2 - e + \max_{i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} \{ \deg_{\max} (P_i) + 2c_i \} \\ &\leq 2 - e + \max_{i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} \{ \deg_{\max} (P_i \text{Cl} (W_i)) \} \end{aligned}$$

$$\leq 2 - e + \deg_{\max}(\text{Cl}(\langle \beta \rangle))$$

Et en particulier on obtient que :

$$\deg_{\max}(\langle \widehat{\beta\sigma_j^e} \rangle) \leq \deg_{\max}(\text{Cl}(\langle \beta \rangle)) + \max\{e, 2 - e\}$$

De même pour le degré minimal, on a :

$$\deg_{\min}(\langle \widehat{\beta\sigma_j^e} \rangle) \geq \deg_{\min}(\text{Cl}(\langle \beta \rangle)) + \min\{e, -2 - e\}$$

En notant  $E$  l'écart entre les degrés extrémaux de  $\langle \widehat{\beta} \rangle$ , on a :

$$\begin{aligned} \deg_{\max}(\langle \widehat{\beta\sigma_j^e} \rangle) - \deg_{\min}(\langle \widehat{\beta\sigma_j^e} \rangle) &\leq E + \max\{e, 2 - e\} - \min\{e, -2 - e\} \\ &\leq E + \begin{cases} 1 - (-3) & \text{si } e = 1, \\ 3 - (-1) & \text{si } e = -1 \end{cases} \\ &\leq E + 4 \end{aligned}$$

L'écart entre le degré maximal et minimal augmente au plus de 4 pour le crochet de KAUFFMAN, et donc l'écart entre le degré minimal et maximal du polynôme de JONES augmente au plus de 1 quand la longueur du mot de tresse augmente aussi de 1. Cela permet de conclure que l'écart des degrés extrémaux du polynôme de JONES est borné par  $n + l - 2$  quand il provient de la clôture d'une tresse à  $n \geq 2$  brins représentée par un mot de longueur  $l \geq 1$ .  $\square$

*Remarques II.146.*

1. En utilisant la démonstration du théorème II.145, il n'est pas difficile de montrer que pour  $L$  un entrelacs représenté par un mot de tresse  $\beta$  vérifiant les conditions de la proposition, on a :

$$\deg_{\max}(V_L) \leq \frac{1}{2}(n - 1 - l^- + 3l^+),$$

$$\deg_{\min}(V_L) \geq -\frac{1}{2}(n - 1 - l^+ + 3l^-)$$

où  $l^+$  est le nombre de lettres positives de  $\beta$  et  $l^-$  le nombre de lettres négatives, avec  $l^+ + l^- = l$  la longueur de  $\beta$ . On notera que l'écart calculé à partir de ces bornes est un peu moins précis.

2. En comparant avec le théorème de FIEDLER [Fie91, *Theorem 1 p. 3*], la borne donnée dans le théorème II.145 est plus large d'une quantité  $k$ , où  $k + 1$  correspond au nombre de générateurs et de leurs inverses différents présents dans la tresse. De ce fait on a  $k \leq 2(n - 1) - 1$ , ce qui majore la différence de précision entre ces deux résultats en fonction du nombre de brins  $n$  de la tresse.
3. Dans le cas où la longueur de  $\beta$  est exactement 1, on peut montrer que l'écart entre les degrés extrémaux vaut exactement  $n - 2$ . En effet il a été précisé dans la démonstration du théorème II.145 que le degré minimal lorsque  $e = 1$  était atteint par les deux termes de la somme, de même pour le cas du degré maximal avec  $e = -1$ . En décrivant plus précisément ces deux termes, on remarque que leurs monômes de plus bas degré s'annulent. Le véritable degré minimal est en fait plus proche de 0 que de 4 par rapport à la borne utilisée, ce qui crée une différence de 1 sur l'écart du polynôme de JONES.

Bien que le théorème II.145 ne propose pas la meilleure borne possible, elle est tout de même atteinte par des mots de tresses particuliers.

**Proposition II.147.** *Pour tout  $n \geq 2$  et  $l \geq 2$ , la borne décrite dans le théorème II.145 est atteinte si et seulement si  $\beta$  est un mot de tresse décrit par la concaténation de  $l$  fois la même lettre.*

*Démonstration :*

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\beta$  est mot de tresse à  $n \geq 2$  brins composé d'exactlyment

$l \geq 2$  lettres  $\sigma_1$ . On a d'après la proposition II.99 :

$$\langle \beta \rangle = \tau^l \left( \mathbb{1}_2 + \left[ \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \tau^{-2(2i+1)} \right] u_1 \right)$$

On calcule la clôture de ce crochet :

$$\begin{aligned} \text{Cl}(\langle \beta \rangle) &= \tau^l \left( \text{Cl}(\mathbb{1}_2) + \left[ \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \tau^{-2(2i+1)} \right] \text{Cl}(u_1) \right) \\ &= \tau^l \left( \delta^{n-1} + \left[ \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \tau^{-2(2i+1)} \right] \delta^{n-2} \right) \end{aligned}$$

Il nous reste à évaluer les degrés extrémaux, qui sont :

$$\begin{aligned} \deg_{\max}(\text{Cl}(\langle \beta \rangle)) &= l + \max \left\{ 2(n-1), 2(n-2) + \max_{i=0}^{l-1} \{-2(2i+1)\} \right\} \\ &= l + \max \{ 2(n-1), 2(n-2) - 2 \}, \\ &= l + 2(n-1) \\ \deg_{\min}(\text{Cl}(\langle \beta \rangle)) &= l + \min \left\{ -2(n-1), -2(n-2) + \min_{i=0}^{l-1} \{-2(2i+1)\} \right\} \\ &= l + \min \{ -2(n-1), -2(n-2) - 2(2l-1) \} \\ &= l + \min \{ -2(n-1), -2(n+2l-3) \} \quad \text{et } l \geq 2 \\ &= l - 2(n+2l-3) \end{aligned}$$

Nous avons bien à chaque fois des égalités, en effet les termes  $\delta^{n-1}$  et  $\delta^{n-2} \left[ \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \tau^{-2(2i+1)} \right]$  ont des degrés extrémaux strictement différents, grâce notamment à l'hypothèse  $l \geq 2$ . Nous avons à présent l'écart entre les degrés extrémaux du crochet de KAUFFMAN :

$$\deg_{\max}(\text{Cl}(\langle \beta \rangle)) - \deg_{\min}(\text{Cl}(\langle \beta \rangle)) = 2(n-1) + 2(n+2l-3) = 4(n-2+l)$$

Ainsi lors du passage au polynôme de JONES, l'écart devient effectivement  $n-2+l$ .

Concernant l'implication directe, il suffit de revenir dans la preuve du théorème II.145 avec ses notations, lorsque le nombre de composantes de  $W_i$  varie d'exactly 1. En fait, si l'indice  $i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$  décrivant le polynôme de choix  $P_i$  ayant le plus haut degré perd une composante au lieu d'en gagner une lors de l'action de  $u_j$ , alors le degré maximum ne peut atteindre sa borne maximale, qui sera alors en avance de 2. Il est donc nécessaire que chaque lettre ajoutée au mot de tresse  $\beta$  soit d'indice  $i$  pour que le degré maximal reste égal à sa borne maximale, en particulier cela signifie aussi que  $\beta$  est composé de  $l$  fois la même lettre. Le raisonnement étant le même pour le degré minimal avec les mêmes conclusions, l'écart maximal décrit par le théorème II.145 n'est atteint que par des mots de tresses ayant  $l \geq 2$  fois la même lettre.  $\square$

*Remarque II.148.* Une précédente remarque énonçait que l'écart entre les degrés extrémaux du polynôme de JONES d'un entrelacs issu de la clôture d'une tresse ne contenant qu'un seul croisement est d'exactly  $n-2$ , en particulier cela implique que la borne annoncée par le théorème II.145 ne sera jamais atteinte pour  $l=1$ .

D'autres propriétés du polynôme de JONES peuvent être expliquées grâce au produit ping-pong. Nous pouvons par exemple étudier l'action de certaines transformations sur un diagramme d'entrelacs ou d'une tresse close sur cet invariant. Commençons par la plus simple, qui ne nécessite pas ce qui a été fait auparavant, mais qui va de paire avec les suivantes.

**Proposition II.149.** On définit l'application  $\mathcal{I}_n : B_n \rightarrow B_n$  telle que :

$$\mathcal{I}_n(\sigma_{i_1}^{e_1} \dots \sigma_{i_k}^{e_k}) = \sigma_{i_1}^{-e_1} \dots \sigma_{i_k}^{-e_k}$$

En notant  $\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \dots \sigma_{i_k}^{e_k}$ , on a alors que  $\langle \mathcal{I}_n(\beta) \rangle = \langle \beta \rangle_{\tau \leftrightarrow \tau^{-1}}$ .

*Démonstration :*

Il suffit de regarder la définition I.71 du crochet de KAUFFMAN. En remplaçant chaque lettre par son inverse, on échange simplement les rôles de  $\tau$  et  $\tau^{-1}$ .  $\square$

**▲ Attention II.150.** L'application  $\mathcal{I}_n$  ne renvoie pas l'inverse d'une tresse ! Elle se contente simplement d'inverser chaque générateur individuellement.

Continuons avec une application renversante.

**Proposition II.151.** On définit l'application  $\mathcal{F}_n : B_n \rightarrow B_n$  telle que :

$$\mathcal{F}_n(\sigma_{i_1}^{e_1} \dots \sigma_{i_k}^{e_k}) = \sigma_{i_k}^{e_k} \dots \sigma_{i_1}^{e_1}$$

En notant  $\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \dots \sigma_{i_k}^{e_k}$ , on a alors que  $\langle \mathcal{F}_n(\beta) \rangle = \langle \beta \rangle$ .

*Démonstration :*

Choisissons  $S \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^k$  une séparation de croisements pour  $\beta$  et notons  $W$  l'élément diagrammatique apparaissant dans l'état  $\langle \beta \mid S \rangle$ . En notant  $S'$  la suite  $S$  dont les indices ont été renversés, c'est-à-dire que  $S'_1 = S_k, S'_2 = S_{k-1}, \dots$ , alors  $S'$  est une séparation de croisements pour  $\mathcal{F}_n(\beta)$  qui agit de la même façon que  $S$  sur  $\beta$ . On en déduit que  $\langle \beta \mid S \rangle$  et  $\langle \mathcal{F}_n(\beta) \mid S' \rangle$  ont le même coefficient polynomial, mais leur élément diagrammatique associé sont miroirs l'un de l'autre. Ainsi l'écriture comme somme des états donne :

$$\langle \beta \rangle = \sum_{i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_i W_i \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{F}_n(\beta) \rangle = \sum_{i \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket} P_i W_i'$$

où  $W_i'$  est l'élément miroir de  $W_i$ . Or nous avons vu en proposition II.137 que la permutation associée à  $W_i'$  est l'inverse de celle associée à  $W_i$ , ainsi  $W_i$  et  $W_i'$  ont le même nombre de cycles à support disjoint dans leur décomposition. Cela implique que  $\text{Cl}(W_i') = \text{Cl}(W_i)$ , et donc nous avons bien  $\langle \mathcal{F}_n(\beta) \rangle = \langle \beta \rangle$ .  $\square$

*Remarque II.152.* En composant  $\mathcal{I}_n$  et  $\mathcal{F}_n$ , on obtient l'application renvoyant pour chaque tresse son inverse.

Voici la dernière application qui vérifie le même genre de propriété sur le crochet de KAUFFMAN.

**Proposition II.153.** On définit l'application  $\mathcal{A}_n : B_n \rightarrow B_n$  telle que :

$$\mathcal{A}_n(\sigma_{i_1}^{e_1} \dots \sigma_{i_k}^{e_k}) = \sigma_{n-i_1}^{e_1} \dots \sigma_{n-i_k}^{e_k}$$

En notant  $\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \dots \sigma_{i_k}^{e_k}$ , on a alors que  $\langle \mathcal{A}_n(\beta) \rangle = \langle \beta \rangle$ .

*Démonstration :*

Choisissons  $S \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^k$  une séparation de croisements pour  $\beta$ , alors le polynôme apparaissant dans l'état  $\langle \beta \mid S \rangle$  et  $\langle \mathcal{A}_n(\beta) \mid S \rangle$  sera le même puisque les signes des croisements n'ont pas changés et que la structure horizontale est globalement la même. En revanche, l'élément diagrammatique  $W = u_{i_1} \dots u_{i_k}$  associé à  $\langle \beta \mid S \rangle$  verra l'indice de ces lettres échangées dans  $\langle \mathcal{A}_n(\beta) \mid S \rangle$ , qui s'exprimera alors  $W' = u_{n-i_1} \dots u_{n-i_k}$ . On a vu en proposition II.139 que :

$$\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W') = \begin{cases} \omega \circ \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W) \circ \omega & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \omega \circ \pi_{\mathcal{D}_n^K}(W)^{-1} \circ \omega & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

avec  $\omega$  la permutation définie telle que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\omega(i) = n + 1 - i$ . Or  $\omega$  est une involution, ainsi l'écriture de  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W')$  est une conjugaison de  $\pi_{\mathcal{D}_n^K}(W)$  ou de son inverse. Comme la conjugaison ne change pas le nombre de cycles à support disjoint dans leur décomposition, on en déduit par la proposition II.124 que  $W$  et  $W'$  ont le même nombre de composantes. Cela implique que  $\text{Cl}(W') = \text{Cl}(W)$ , et donc nous avons bien  $\langle \mathcal{A}_n(\beta) \rangle = \langle \beta \rangle$ .  $\square$

On peut alors en déduire le résultat suivant :

**Proposition II.154.** *Pour  $\beta$  une tresse à  $n$  brins, les tresses  $\mathfrak{A}_n(\beta)$  et  $\mathfrak{B}_n(\beta)$  ont le même polynôme de JONES que  $\beta$  après clôture, tandis que  $\mathcal{I}_n(\beta)$  inverse les puissances de  $t$ .*

*Démonstration :*

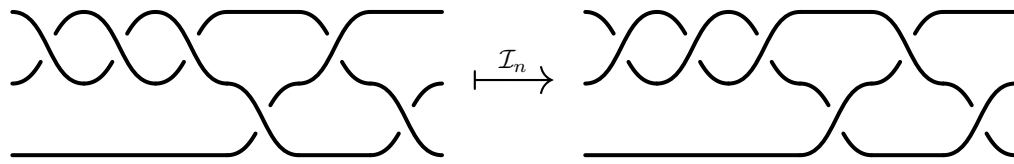
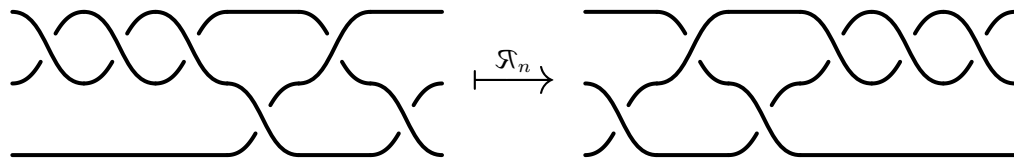
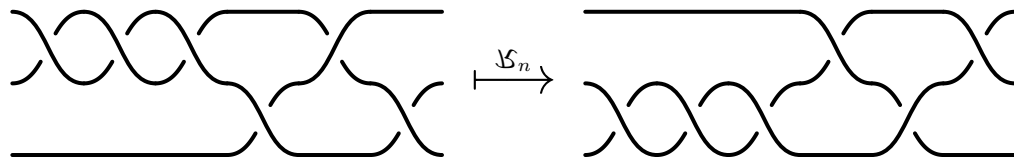
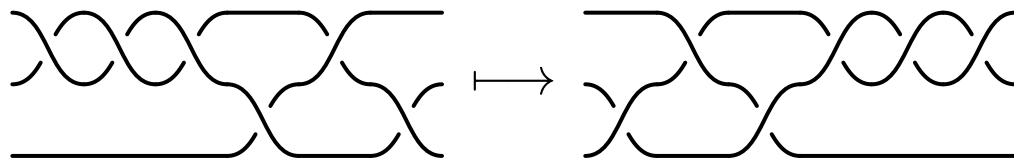
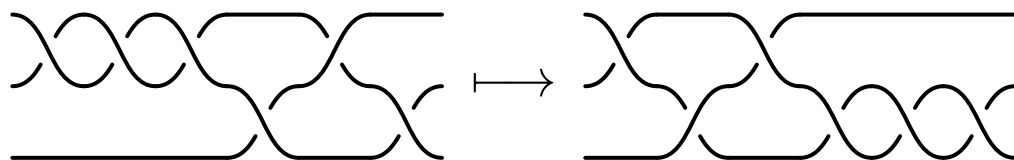
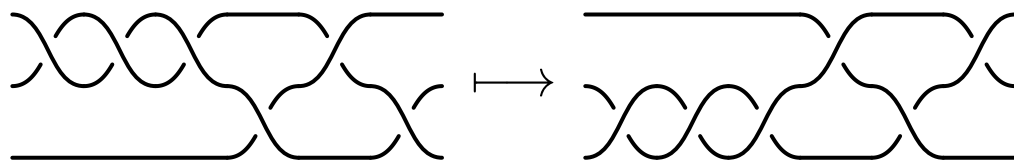
Découle immédiatement de la proposition II.151 et proposition II.153 pour la première partie. Concernant  $\mathcal{I}_n(\beta)$ , nous savons grâce à la proposition II.149 que :

$$\langle \mathcal{I}_n(\beta) \rangle = \langle \beta \rangle_{\tau \leftrightarrow \tau^{-1}}.$$

De plus, l'entortillement de  $\mathcal{I}_n(\beta)$  est l'opposé de celui de  $\beta$ , autrement dit  $\text{wr}(\mathcal{I}_n(\beta)) = -\text{wr}(\beta)$ . On en déduit alors que le crochet de KAUFFMAN normalisé de  $\mathcal{I}_n(\beta)$  correspond à celui de  $\beta$  en inversant les rôles de  $\tau$  et  $\tau^{-1}$ . Finalement, on en déduit que le polynôme de JONES obtenu à partir de  $\mathcal{I}_n(\beta)$  s'obtient à partir de celui de  $\beta$  en échangeant  $t$  et  $t^{-1}$ .  $\square$




*Remarques II.155.*

1. Les trois applications  $\mathcal{I}_n$ ,  $\mathfrak{A}_n$  et  $\mathfrak{B}_n$  correspondent en réalité à des transformations de l'espace, notamment des symétries et rotations d'angle  $\pi$ . Par exemple  $\mathcal{I}_n \circ \mathfrak{B}_n$  est la symétrie d'axe parallèle à la direction générale des brins,  $\mathcal{I}_n \circ \mathfrak{A}_n$  est la symétrie d'axe perpendiculaire à cette même direction, et  $\mathfrak{B}_n \circ \mathfrak{A}_n$  est une rotation d'angle  $\pi$ . On peut voir ces actions en figure 5.4.
2. Ces trois mêmes applications forment un groupe isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ . On retrouve ce groupe, pas tout à fait engendré par les mêmes applications, et la preuve de cet isomorphisme dans l'article de FROMENTIN [Fro21, Lemma 5.15 p. (21)]. Pour l'anecdote, le programme qu'il a utilisé pour compter les tresses vérifiait en même temps si ces mêmes tresses donnaient un nœud 5-trivial ou 6-trivial après clôture. Cependant, aucun résultat n'a été trouvé.

(a) Effet de  $\mathcal{I}_n$ (b) Effet de  $\mathcal{S}_n$ (c) Effet de  $\mathcal{Y}_n$ (d) Symétrie d'axe verticale exprimée par  $\mathcal{S}_n \circ \mathcal{I}_n$ , équivaut à inverser la tresse(e) Symétrie centrale exprimée par  $\mathcal{S}_n \circ \mathcal{Y}_n$ , équivaut à une rotation d'angle  $\pi$ (f) Symétrie d'axe horizontale exprimée par  $\mathcal{Y}_n \circ \mathcal{I}_n$ FIGURE 5.4 – L'action de  $\mathcal{I}_n$ ,  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{Y}_n$  ainsi que certaines de leurs compositions sur un diagramme de tresse.

### 5.3 Bibliographie de ce chapitre

La bibliographie complète ainsi que le détail de chaque référence est accessible en page 191.

- [Fie91]  Thomas FIEDLER. « On the degree of the Jones polynomial ». Dans : *Topology* 30.1, p. 1-8.
- [Fro21]  Jean FROMENTIN. « Experiments on growth series of braid groups ». Dans : *Journal of Algebra*, S002186932100288X. En presse.
- [Kau87]  Louis Hirsch KAUFFMAN. « State models and the Jones polynomial ». Dans : *Topology* 26.3, p. 395-407.



**\***

## ***Annexes***



---

Théories en lien avec les nœuds

---

**Sommaire du présent chapitre**

<b>A.1 Groupe de tresses</b>	<b>153</b>
A.1.1 Approche géométrique . . . . .	154
A.1.2 Structure de groupe . . . . .	156
<b>A.2 Les monoïdes de KAUFFMAN</b>	<b>158</b>
A.2.1 Le monoïde diagrammatique . . . . .	158
A.2.2 Le monoïde diagrammatique tressé . . . . .	164
<b>A.3 L'algèbre de TEMPERLEY-LIEB</b>	<b>166</b>
<b>A.4 Bibliographie de ce chapitre</b>	<b>167</b>

Dans ce mémoire, nous allons utiliser des notions et résultats d'autres domaines de recherche en lien avec la théorie des nœuds. Dans ce court chapitre, nous exposons certains outils venant du groupe des tresses, du monoïde diagrammatique et de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB.

## A.1 Groupe de tresses

Comme nous avons comparé la définition des nœuds en mathématiques avec ceux de la vie courante, les tresses dont nous allons discuter ici peuvent elles aussi être comparées à une tresse de cheveux, ou à un scoubidou. Nous allons bien sûr décrire une définition plus complète, pour éviter toute ambiguïté lors des raisonnements. L'idée générale reste tout de même l'emmêlement<sup>1</sup> de plusieurs fils, ayant chacun deux extrémités, ne faisant jamais demi-tour et ne se passant pas au travers les uns des autres.

---

1. On prend le soin ici d'éviter les mots « enchevêtrements » et « enlacement », ce dernier étant parfois utilisé comme synonyme d'entrelacs dans la littérature.

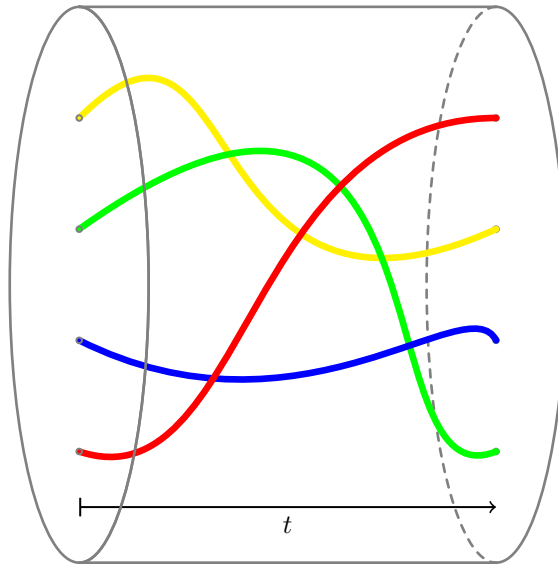


FIGURE A.1 – Représentation d'une tresse géométrique dans son cylindre avec l'axe temporel. Il faut imaginer ce dessin en trois dimensions, c'est pour cela que les « croisements » apparents ici ne sont pas marqués, ils ne sont en fait pas présents dans la tresse géométrique.

### A.1.1 Approche géométrique

Fixons d'abord ce qui va composer les tresses, les fils ou ficelles, que l'on appellera « brins » par la suite. Ces brins ne peuvent pas se couper, sont bornés, suivent une direction générale, et leurs extrémités sont fixées. Nous verrons la possibilité de les déformer plus tard.

#### Définition \*.1 – Brin de tresse.

Un brin de tresse est une fonction continue  $b : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}^2 \times [0, 1]$ , strictement croissante en la deuxième coordonnée, où  $\mathcal{D}^2$  est le disque unité fermé, identifié comme partie de  $\mathbb{R}^2$ . Les extrémités  $b(0)$  et  $b(1)$ , par convention, se situent sur l'axe des ordonnées, plus précisément dans l'ensemble  $\{0\} \times [0, 1] \times \{0\}$  et  $\{0\} \times [0, 1] \times \{1\}$  respectivement.

L'espace de vie  $\mathcal{D}^2 \times [0, 1]$  peut être vu comme un cylindre, dont chaque tranche donne la position du brin  $b$  par rapport au temps  $t \in [0, 1]$ . Nous allons souvent faire référence à cet axe temporel pour simplifier nos définitions et descriptions.

Pour se rapprocher de la notion de tresse, il ne reste qu'à considérer plusieurs brins, tous contenus dans un même cylindre.

#### Définition \*.2 – Tresse géométrique.

Une tresse géométrique à  $n$  brins est la donnée de  $n$  brins  $b_1, b_2, \dots, b_n$  tels que pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  les brins  $b_i$  et  $b_j$  ne s'intersectent pas, autrement dit pour tout  $t, t' \in [0, 1]$ , on a  $b_i(t) \neq b_j(t')$ .

Nous en voyons une première représentation en figure A.1. Les tresses géométriques ne sont pas définies à déformation près, comme les nœuds, ce qui rend leur étude assez peu intéressante. Ajoutons donc cette possibilité au travers d'une nouvelle définition :

#### Définition \*.3 – Tresse.

---

Une *tresse à  $n$  brins* est la classe d'isotopie d'une tresse géométrique à  $n$  brins.

*Remarque \*4.* L'isotopie utilisée ici est ambiante, comme celle des entrelacs.

Parmi les tresses, il en existe une particulière dont les brins vont directement de leurs extrémités de gauche vers celles de droite sans être tressés. Il s'agit de la tresse triviale.

**Définition \*5 – Tresse triviale.**

La *tresse triviale à  $n$  brins*, noté  $\mathbb{1}_n$ , est la classe d'isotopie de la tresse géométrique contenant les brins  $b_1, \dots, b_n$  définis comme :

$$b_i : \begin{array}{ll} [0, 1] & \rightarrow \mathcal{D}^2 \times [0, 1] \\ t & \mapsto \left( \left( 0, \frac{i}{n+1} \right), t \right) \end{array}$$

Nous verrons plus loin leur rôle particulier. Remarquons que les tresses géométriques sont des éléments des tresses, nous dirons plus simplement que ce sont des représentations. De la même façon qu'avec les nœuds, chaque diagramme d'un nœud n'est pas le nœud lui-même, seulement une représentation possible. Cependant les représentations données par les tresses géométriques sont assez libres, et il est possible de les standardiser. Pour cela, nous devons déformer les tresses géométriques, comme les diagrammes de nœuds, tout en restant dans la même classe d'équivalence.

La première étape est de supprimer l'illusion tridimensionnelle du cylindre, l'objectif étant d'arriver à un équivalent des diagrammes de nœud, c'est-à-dire une représentation en 2 dimensions avec des croisements. On considère ainsi une projection  $\rho$ , qui envoie les tresses géométriques sur le plan  $\mathbb{R}^2$ , de façon à ce que l'axe temporel coïncide avec l'intervalle  $[0, 1]$  situé sur l'axe des abscisses, et que les extrémités en  $t = 0$  soient alignées sur l'axe des ordonnées. Nous avons ainsi automatiquement les extrémités en  $t = 1$  alignées sur la droite verticale passant par  $(1, 0)$ .

Suite à cette projection, nous devons, comme avec les diagrammes de nœuds, faire en sorte que chaque croisement corresponde à la superposition d'exactly 2 points, et que les croisements forment un ensemble discret du plan.

Nous remarquons maintenant que notre projection ressemble à une succession d'évènements survenus en fonction du temps, ces évènements étant les croisements. En particulier, comme les croisements sont en nombre fini car ceux-ci sont répartis de manière discrète dans le plan, nous pouvons nous arranger pour les disperser équitablement dans le temps, ainsi les droites verticales contenant un croisement sont toutes espacées de la même façon.

Finalement, pour simplifier l'allure de chaque brin, nous pouvons les aplanir lorsqu'ils ne sont pas croisés. Pour cela, on s'appuie sur des lignes horizontales espacées de la même manière. Il y a autant de lignes que de brins, et ceux-ci doivent suivre au maximum ces dites lignes. Leurs extrémités y reposent également.

Nous avons à présent une représentation très épurée d'une tresse, que nous appellerons « diagramme de tresse ». Toutes ces étapes sont illustrées en figure A.2.

**Définition \*6 – Diagramme de tresse.**

Le *diagramme d'une tresse* est l'image  $D$  d'une projection  $\rho$  envoyant l'espace  $\mathcal{D}^2 \times [0, 1]$  correspondant à une tresse géométrique sur  $[0, 1]^2$ , comme décrit précédemment. En particulier  $D$  doit, quitte à déformer ou changer  $\rho$ , vérifier les propriétés suivantes :

- (i) Le nombre d'antécédents d'un point de  $D$  est au plus 2,
- (ii) L'ensemble des points de  $D$  ayant plusieurs antécédents, que l'on appellera *croisements*, est discret dans le plan,
- (iii) Si  $D$  contient des croisements, alors ceux-ci sont régulièrement espacés horizontalement dans  $[0, 1]^2$ ,

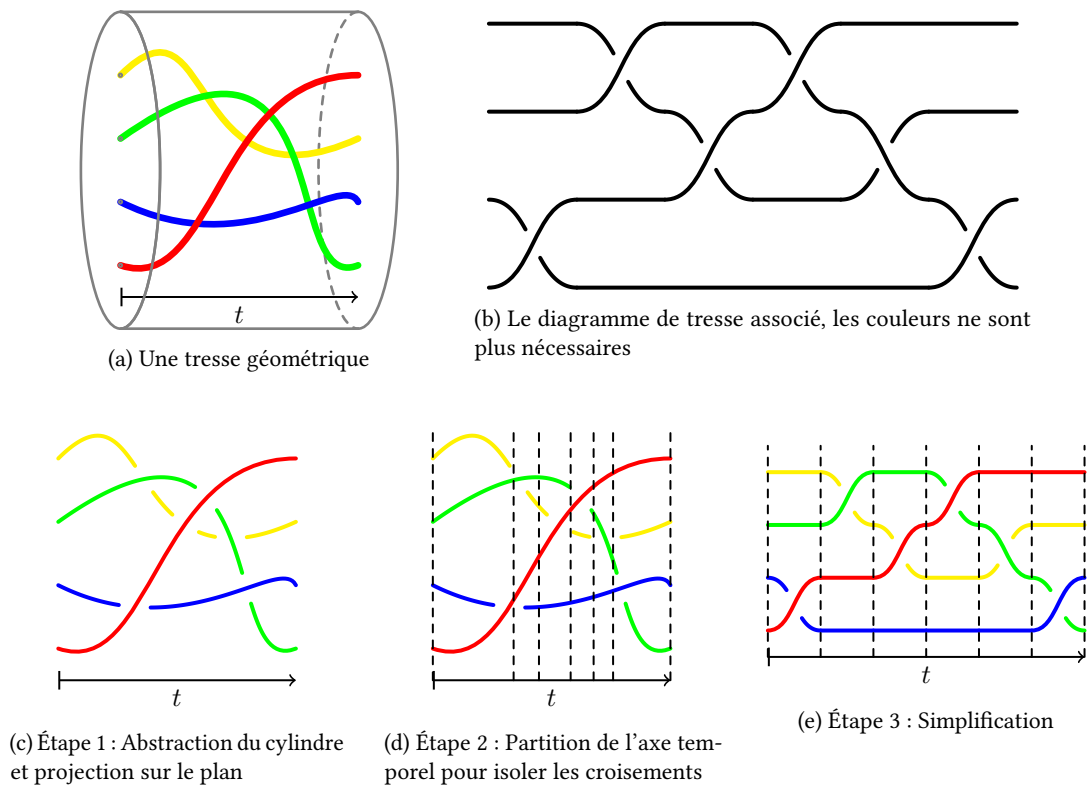


FIGURE A.2 – On standardise ici la figure A.1 afin d'obtenir un diagramme de tresse, qui est plus épuré et minimaliste.

(iv) Les images des brins dans  $D$  sont des portions de droites régulièrement espacées verticalement dans  $[0, 1]^2$ , en dehors des voisinages des croisements dans lesquels ceux-ci sont impliqués.

L'isotopie des tresses peut être retranscrite sur le diagramme, notamment via les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> mouvements de REIDEMEISTER qui s'y appliquent parfaitement. On peut déformer un diagramme de tresse de façon analogue à la déformation des diagrammes de nœuds.

### A.1.2 Structure de groupe

Après avoir vu plusieurs représentations des tresses, nous allons aborder la structure de groupe que l'on peut leur attribuer. Il nous faut pour cela une opération qui préserve l'ensemble des tresses, ayant un élément neutre et disposant pour chaque tresse d'un inverse.

Une opération vérifiant tous ces critères, et intuitive, est la concaténation, appelée aussi produit. Le principe est de joindre deux tresses ayant le même nombre de brins ensemble, en recollant les extrémités à droite de l'une avec celles se trouvant à gauche de l'autre, comme en figure A.3d. Cette opération donne toujours une tresse, qui de plus préserve le nombre de brins. L'élément neutre serait la tresse triviale, en effet recoller une telle tresse revient juste à allonger les extrémités sans croiser de nouveau les brins. Pour l'élément inverse, il suffit de considérer son image dans un miroir. Concaténer une tresse et son image miroir va en effet, par utilisation successive du 2<sup>e</sup> mouvement de REIDEMEISTER, éliminer tous les croisements par paires.

**Définition \*7 – Produit de tresses.**

Pour  $\beta_1$  et  $\beta_2$  deux tresses ayant  $n$  brins, dénotés  $b_{1,1}, \dots, b_{1,n}$  et  $b_{2,1}, \dots, b_{2,n}$  respectivement, on définit le *produit de tresse*  $\beta_1\beta_2$  comme la tresse composée des brins  $b_1, \dots, b_n$  définis comme :

$$b_i(t) = \begin{cases} b_{1,i}(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ b_{2,j}(2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

où  $j$  est l'unique indice tel que  $b_{1,i}(1) = b_{2,j}(0)$ .

*Remarque \*8.* Le produit de tresse n'est pas commutatif.

Nous pouvons maintenant introduire les groupes de tresses. Bien qu'il soit présenté comme une définition ici, il faut normalement montrer qu'il existe bien une structure de groupe avec les tresses rigoureusement. L'exercice n'est pas difficile, les idées ont d'ailleurs été évoquées en introduction de cette sous-section, mais la démonstration est laissée au lecteur.

**Définition \*9 – Groupe de tresses.**

Le *groupe de tresses* à  $n$  brins est donné par le triplet  $(B_n, \cdot, \mathbb{1}_n)$ , où  $B_n$  est l'ensemble des tresses à  $n$  brins et  $\cdot$  est le produit de tresse défini en définition \*7. On notera plus brièvement ce groupe  $B_n$ .

Comme tout groupe, ceux de tresses sont engendrés par des éléments générateurs, et des relations. Pour identifier les générateurs tout d'abord, remarquons qu'une tresse n'est qu'une concaténation de plusieurs croisements. Chaque croisement se démarque seulement par leur position dans la tresse, c'est-à-dire de leur ordre d'apparition de la gauche vers la droite ainsi que de leur action sur les brins, ainsi que de leur sens. L'ordre d'apparition n'est pas lié au générateur, il s'agit là plutôt d'une question de commutativité de ceux-ci et donc d'une relation, par contre les deux autres informations sont bien inhérentes au croisement.

**Définition \*10 – Générateurs des groupes de tresses.**

Les *générateurs* du groupe  $B_n$  sont donnés par les éléments  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , où  $\sigma_i$  est défini comme le croisement faisant passer le  $i^{\text{e}}$  brins par-dessus le  $(i+1)^{\text{e}}$ . L'élément  $\sigma_i^{-1}$  est l'inverse de  $\sigma_i$ , défini par l'inversion du croisement de  $\sigma_i$ .

Il faudrait de même une démonstration rigoureuse pour montrer que ces éléments engendrent bien les groupes de tresse. Les relations sur les générateurs peuvent être trouvées en s'inspirant des déformations possibles des diagrammes de tresse. Concernant l'ordre d'apparition dans la tresse, que l'on évoquait auparavant, on remarque que deux croisements n'interagissant pas sur les mêmes brins peuvent commuter.

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ pour } |i-j| > 1$$

Nous avons déjà discuté du 2<sup>e</sup> mouvement de REIDEMEISTER qui correspond à la concaténation d'un élément et de son inverse, relation présente dans tous les groupes.

$$\sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_i = \mathbb{1}$$

Le 3<sup>e</sup> mouvement est aussi applicable dans le cas des tresses et peut être transcrit comme relation de groupe. Il s'agit de déplacer un brin par-dessus un croisement, ce qui peut s'écrire comme :

$$\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \text{ pour } |i-j| = 1$$

Il s'agit en effet des seules relations des groupes de tresses, donnant la présentation de groupe suivante démontrée par ARTIN.

**Théorème \*11 – Présentation des groupes de tresses.**

Pour  $n \geq 1$ , le groupe de tresses  $B_n$  est donné par la présentation de groupe suivante :

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i - j| = 1 \end{array} \right. \right\rangle$$

**ARTIN (1947)** – [Art47, Theorem 16 p. 115]

De plus comme les diagrammes de tresse peuvent être vus comme une succession d'évènements, il est possible de noter ces diagrammes sous forme de mots; les générateurs du groupe associé et leurs inverses faisant office de lettres.

**Définition \*12 – Mot de tresse.**

Un mot de tresse représentant une tresse à  $n$  brins est un mot en les lettres  $\sigma_i^{\pm 1}$ , qui sont les générateurs et leurs inverses de  $B_n$ .

*Remarque \*13.* On confondra très souvent une tresse et l'une de ses écritures sous forme de mot par abus de langage, cependant il s'agit bien de deux objets différents !

Il existe une autre présentation avec des générateurs plus complexes, donné par BIRMAN, KO ET LEE [BKL98]. Cette dernière représentation est qualifiée de « duale ». Une autre propriété du groupe des tresses est de se plonger de façon canonique dans le groupe des permutations.

**Définition \*14 – Projection canonique dans les permutations.**

Pour  $n \geq 0$ , le groupe des tresses à  $n$  brins  $B_n$  se plonge dans le groupe des permutations  $\mathfrak{S}_n$  via l'application  $\pi_{B_n} : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$  telle que pour  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , si le brin démarrant en  $i^{\text{e}}$  position à droite dans le diagramme d'une tresse  $\beta$  termine en  $j^{\text{e}}$  position à gauche, alors  $(\pi_{B_n}(\beta))(i) = j$ . Autrement dit, en définissant  $\pi_{B_n}$  sur les générateurs, on a  $\pi_{B_n}(\sigma_i) = (i \ i + 1)$ .

## A.2 Les monoïdes de KAUFFMAN

En ayant introduit son crochet, KAUFFMAN [Kau87, 4p. 405] a défini un monoïde dont les éléments sont des  $n$ -enchevêtrements sans croisements. Ces éléments apparaissent naturellement lorsque l'on calcule le crochet de KAUFFMAN d'un entrelacs représenté par une tresse. La représentation sous forme de diagramme de ses éléments, ainsi que leurs relations, sont identiques aux éléments formant la base de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB. Cette ressemblance est une expression de la nature du polynôme de JONES, lié à la fois au crochet de KAUFFMAN ainsi qu'à l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB. KAUFFMAN [Kau90, Définition 3.3 p. 435] en définira une deuxième en mélangeant le premier avec les tresses et donnera quelques propriétés associées.

### A.2.1 Le monoïde diagrammatique

Au sein de la définition I.71 du crochet de KAUFFMAN, une règle consiste à séparer un croisement de deux manières différentes. Dans le cadre précis des tresses, la séparation d'un croisement donne dans un cas le remplacement de celui-ci par la tresse triviale, dans l'autre un diagramme comportant deux demi-cercles opposés à la place du croisement. En effectuant ce remplacement sur les générateurs des tresses, on obtient des diagrammes élémentaires que nous appelons<sup>2</sup> *demi-tours*.

2. Dans l'article de KAUFFMAN [Kau87], ces diagrammes ont été nommés « hook » que l'on traduit par « crochet », mais on change ici le nom pour éviter toutes confusions.

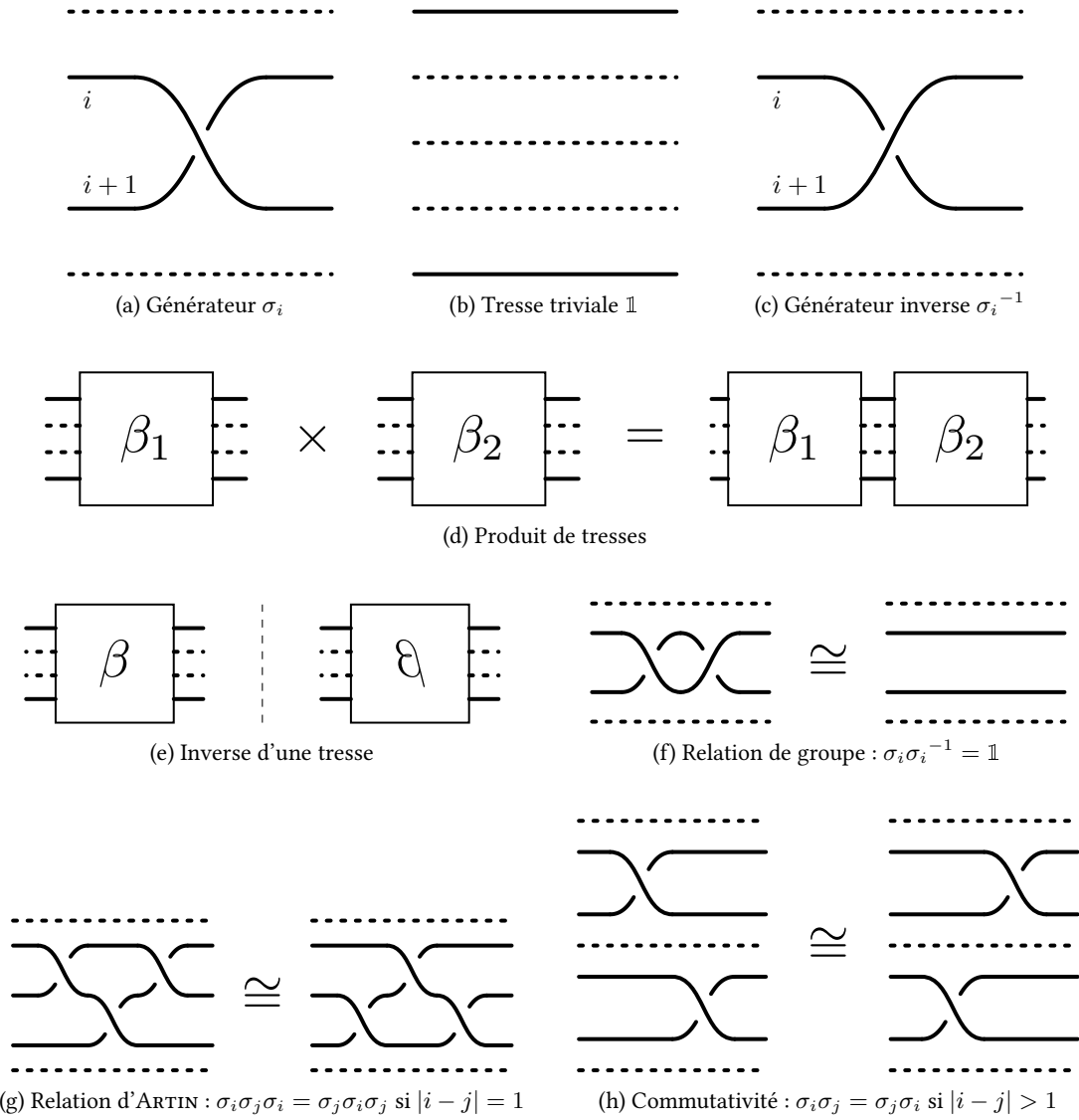


FIGURE A.3 – Représentation sous forme de diagramme des générateurs, relations, produit et neutre des groupes de tresses.

**Définition \*15 – Demi-tours.**

Pour  $n \geq 2$  un entier fixé et  $0 < i < n$ , on définit le  $i^{\text{e}}$  *demi-tour* à  $n$  brins comme le diagramme composé de  $n$  paires de points, disposés équitablement et alignés sur deux axes parallèles, chacun relié par un segment à son voisin d'en face; excepté pour ceux se trouvant en  $i^{\text{e}}$  et  $i + 1^{\text{e}}$  positions qui sont reliés à leur voisin se trouvant sur le même axe.

En considérant la même opération de concaténation que les tresses, ces demi-tours permettent de générer un ensemble de diagrammes, tous ayant  $n$  paires d'extrémités et ne contenant pas de croisement. Nous avons alors un monoïde, auquel nous ajoutons une relation d'isotopie pour garder l'esprit de déformation venant des nœuds.

Grâce à l'isotopie, des relations apparaissent dans ce monoïde. Pour les étudier, et les décrire, nous allons transcrire ces diagrammes en termes de mots, dont les lettres représentent les demi-tours. Nous notons ainsi  $u_i$  le  $i^{\text{e}}$  demi-tour. La première relation que l'on constate, et qui est présente également avec les tresses, est la commutation de deux demi-tours suffisamment éloignés, c'est-à-dire  $u_i u_j = u_j u_i$  pour  $|i - j| \geq 2$ . Une autre fait intervenir des demi-tours proches suivant une configuration précise, et donne  $u_i u_{i+1} u_i = u_i$ ; il s'agit donc d'une simplification isotopique.

Hormis ses deux relations, nous pouvons en considérer une troisième concernant un élément particulier pouvant apparaître dans ces diagrammes : les boucles. Elles apparaissent notamment lorsque deux demi-tours sont placés face à face, et plus précisément ces deux demi-tours fusionnent pour n'en former plus qu'un agrémenté d'une boucle. Nous pouvons alors utiliser l'isotopie pour déplacer ces boucles où que ce soit, ou les déformer. Ces boucles étant particulières, nous pouvons les symboliser par une lettre,  $\circ$ . Ainsi, on peut considérer que  $\circ$  commute avec tous les  $u_i$ , et on peut écrire une dernière relation  $u_i^2 = \circ u_i$ . Nous voyons toutes ces relations en figure A.4.

**Définition \*16 – Monoïde diagrammatique de KAUFFMAN.**

Pour  $n$  un entier, le *monoïde diagrammatique de KAUFFMAN* est l'ensemble des diagrammes générés par les demi-tours à  $n$  brins  $u_i$  pour  $1 < i < n$  et de la boucle  $\circ$  muni de la concaténation; il est noté  $\mathcal{D}_n^K$ . Il est régi par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_i^2 = \circ u_i = u_i \circ & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\ u_i u_j u_i = u_i & \text{pour } |i - j| = 1, \\ u_i u_j = u_j u_i & \text{pour } |i - j| > 1 \end{cases}$$

L'élément neutre sera noté  $\mathbb{1}_n$  car celui-ci se représente exactement comme la tresse triviale.

*Remarque \*17.* On observe que les boucles  $\circ$  rappellent beaucoup la deuxième règle de calcul du crochet de KAUFFMAN en définition I.71.

À cause de la possibilité d'ajouter des boucles, le monoïde  $\mathcal{D}_n^K$  est infini, il suffit de choisir un élément puis de lui ajouter des boucles pour en créer d'autres tous distincts et non isotopes. En revanche si nous oublions ces boucles, le nombre de classes d'isotopie restantes est bien fini. De plus, il est possible de choisir un représentant minimal de cette classe, au sens où celui-ci se compose d'un minimum de demi-tours.

**Définition \*18 – Diagramme de KAUFFMAN réduit.**

Un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  est dit *réduit* si celui-ci se compose du minimum de demi-tours nécessaires à son écriture.

Pour dénombrer ces classes d'équivalences, ou de manière équivalente dénombrer les éléments réduits sans boucles, nous pouvons écrire les éléments de  $\mathcal{D}_n^K$  sous la forme d'une représentation par parenthèses, ce qui a été abordé par KAUFFMAN [Kau90, *Fact p. 441*] ou; en donnant une forme normale de ces éléments, ce qui a été mentionné par JONES [Jon83, *Aside 4.1.4 p. 14*].

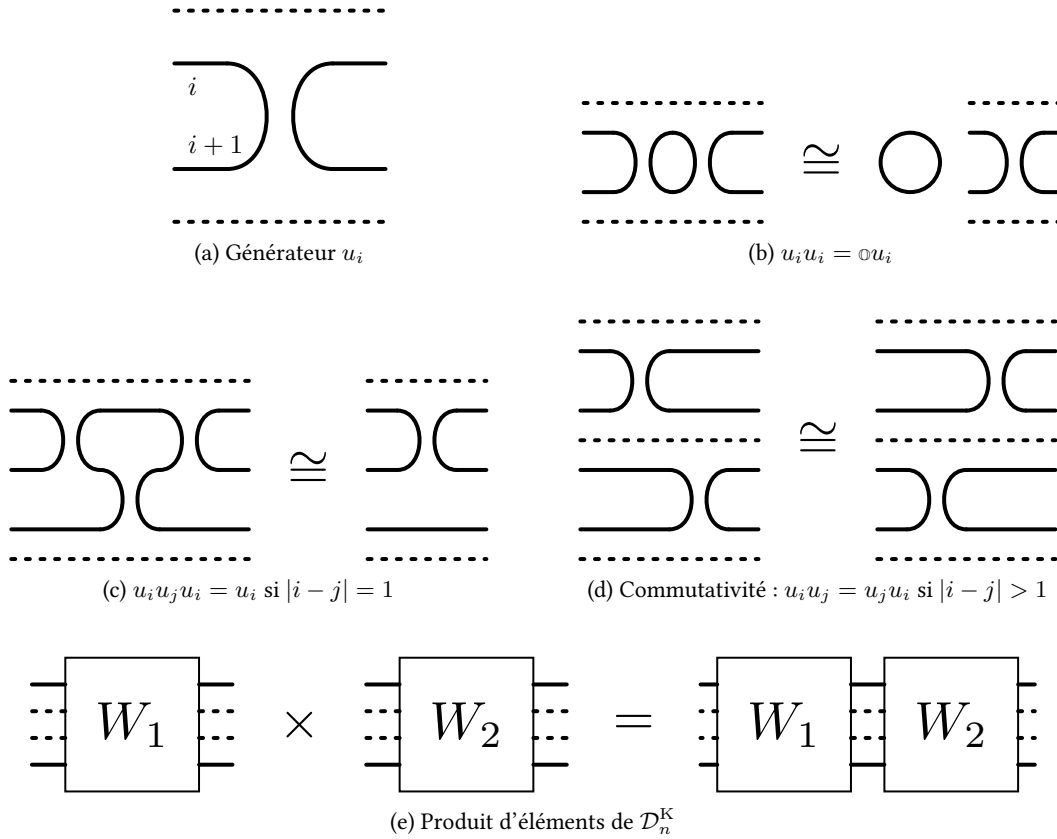


FIGURE A.4 – Représentation sous forme de diagramme des générateurs, relations et produit du monoïde diagrammatique. Le neutre est représenté par un diagramme équivalent à la tresse triviale.

Avant de présenter cette forme normale, considérons la propriété suivante :

**Lemme \*19.** *Tout élément de  $\mathcal{D}_n^K$  réduit s'écrivant comme  $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$  ne peut contenir qu'une seule et unique fois la lettre  $u_m$  où  $m = \max(i_1, i_2, \dots, i_k)$ .*

*Démonstration :*

La preuve est donnée par JONES [Jon83, Lemma 4.1.2 p. 13]. Il s'agit simplement d'une récurrence sur  $k$ , où  $k = 0$  est un cas particulier correspondant à  $\mathbb{1}_n$ . Le cas  $k = 1$  est évident. Une fois cette propriété supposée vraie pour tout rang jusqu'à  $k$ , supposons par l'absurde qu'il existe un élément  $W$  réduit s'écrivant avec  $k + 1$  demi-tours de la forme :

$$W = W_1 u_m W_2 u_m W_3$$

où les  $W_i$  ne contiennent pas de  $u_m$ . Si maintenant  $W_2$  ne contient pas de  $u_{m-1}$ , alors  $u_m$  commute avec  $W_2$  et nous avons  $W_1 u_m W_2 u_m W_3 = \circ W_1 W_2 u_m W_3$ . Si  $W_2$  contient  $u_{m-1}$ , par hypothèse de récurrence nous avons  $W_2 = V_1 u_{m-1} V_2$  où  $V_1$  et  $V_2$  ne contiennent pas  $u_{m-1}$ . On a alors :

$$W_1 u_m W_2 u_m W_3 = W_1 u_m V_1 u_{m-1} V_2 u_m W_3 = W_1 V_1 u_m u_{m-1} u_m V_2 W_3 = W_1 V_1 u_m V_2 W_3$$

Finalement le mot  $W$  n'était pas réduit, ce qui est une contradiction. Ainsi, tous les mots s'écrivant avec  $k + 1$  demi-tours ne contiennent qu'une seule fois leur lettre d'indice maximale, ce qui termine la récurrence.  $\square$

Nous pouvons maintenant introduire la forme normale de JONES<sup>3</sup> :

#### **Théorème \*20 – Forme normale de JONES.**

Tout élément de  $\mathcal{D}_n^K$  s'écrit sous la forme normale suivante :

$$\circ^r \cdot u_{i_1} u_{i_1-1} \dots u_{j_1} \cdot u_{i_2} u_{i_2-1} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_k} u_{i_k-1} \dots u_{j_k}$$

où :

$$\begin{cases} r, k \in \mathbb{N}, & \text{en particulier } r = k = 0 \text{ donne l'identité } \mathbb{1}_n, \\ i_\alpha \geq j_\alpha & \text{pour tout } \alpha \in \llbracket 1, k \rrbracket, \\ i_{\alpha+1} > i_\alpha & \text{pour tout } \alpha \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \\ j_{\alpha+1} > j_\alpha & \text{pour tout } \alpha \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \end{cases}$$

**JONES (1983)** – [Jon83, Aside 4.1.4 p. 14]

*Démonstration :*

Considérons un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$ . Notons  $u_m$  la lettre d'indice maximal de  $W$ , le premier objectif est de simplifier  $W$  pour que  $u_m$  n'y apparaisse qu'une seule fois. Pour cela, dans une portion  $V = u_m V_1 u_m$  de  $W$ , nous avons les cas suivants :

- si  $V_1$  ne contient pas  $u_{m-1}$ , alors  $V = \circ u_m V_1$ ,
- si  $V_1$  contient une seule fois la lettre  $u_{m-1}$ , alors  $V = u_m \nu_1 u_{m-1} \nu_2 u_m = u_m \nu_1 \nu_2$ ,
- si  $V_1$  contient au moins deux fois la lettre  $u_{m-1}$ , alors  $V = u_m \nu_1 u_{m-1} \nu_2 \dots \nu_{l-1} u_{m-1} \nu_l u_m$ . Il s'agit alors, pour chaque portion  $u_{m-1} \nu_i u_{m-1}$  de simplifier l'expression pour que la lettre  $u_{m-1}$ , qui est d'indice maximal pour  $V_1$ , n'apparaît qu'une seule fois.

Le troisième cas ne peut se répéter indéfiniment, puisque l'indice maximal décroît strictement à chaque itération. Suivant cette méthode, nous pouvons supposer que  $W$  s'écrit  $W = \circ^{r+1} W' u_m W_1$ . Nous avons maintenant deux cas :

- Soit  $W_1$  ne contient pas  $u_{m-1}$ , dans ce cas  $W$  s'écrit sous la forme  $W = \circ^{r+1} W' u_m$  où  $W'$  intègre dorénavant  $W_1$ ,
- Soit  $W_1$  contient effectivement  $u_{m-1}$ . Comme il s'agit de la lettre d'indice maximal de  $W_1$ , nous pouvons encore une fois le simplifier pour que cette lettre n'apparaît qu'une fois comme pré-

3. Bien que JONES ne fasse que mentionner ce résultat, l'auteur n'a trouvé nulle part ailleurs une description ou une preuve de celui-ci. Les auteurs utilisant ou mentionnant ce fait ne donnent pas de sources claires. À défaut, celui-ci est attribué à JONES.

cédemment, ainsi  $W_1 = \circ^{r_2} W_1' u_{m-1} W_2$ . On en déduit que  $W = \circ^{r_1+r_2} W' u_m u_{m-1} W_2$  où  $W'$  intègre dorénavant  $W_1'$ .

On recommence le raisonnement précédent avec  $W_2$ , et après itération nous avons l'écriture  $W = \circ^{r'} W' u_m u_{m-1} \dots u_{m-s}$  où  $0 < s < m$  et avec  $W'$  approprié.

En itérant ce procédé avec  $W'$ , qui diminue à chaque fois de longueur, nous finissons par obtenir une écriture sous la forme :

$$W = \circ^r \cdot u_{i_1} u_{i_1-1} \dots u_{j_1} \cdot u_{i_2} u_{i_2-1} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_k} u_{i_k-1} \dots u_{j_k}$$

où :

$$\begin{cases} r, k \in \mathbb{N}, & \text{en particulier } r = k = 0 \text{ donne l'identité } \mathbb{1}_n, \\ i_\alpha \geq j_\alpha & \text{pour tout } \alpha \in \llbracket 1, k \rrbracket, \\ i_{\alpha+1} > i_\alpha & \text{pour tout } \alpha \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \end{cases}$$

Il ne reste qu'à faire en sorte que  $j_{\alpha+1} > j_\alpha$  pour tout  $\alpha \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ . Supposons que nous ayons une portion de diagramme s'écrivant

$$V = u_{i_a} u_{i_a-1} \dots u_{j_a} \cdot u_{i_b} u_{i_b-1} \dots u_{j_b}$$

avec  $i_a < i_b$  et  $j_a > j_b$ . En particulier, on peut écrire :

$$V = u_{i_a} u_{i_a-1} \dots u_{j_a} \cdot u_{i_b} u_{i_b-1} \dots u_{j_a} \dots u_{j_b}$$

Déplaçons la lettre  $u_{j_a}$  de gauche le plus à droite possible et simplifions :

$$\begin{aligned} V &= u_{i_a} u_{i_a-1} \dots u_{j_a+1} \cdot u_{i_b} u_{i_b-1} \dots u_{j_a+2} \cdot u_{j_a} u_{j_a+1} u_{j_a} \cdot u_{j_a-1} \dots u_{j_b} \\ &= u_{i_a} u_{i_a-1} \dots u_{j_a+1} \cdot u_{i_b} u_{i_b-1} \dots u_{j_a+2} \cdot u_{j_a} u_{j_a-1} \dots u_{j_b} \\ &= u_{i_a} u_{i_a-1} \dots u_{j_a+1} \cdot u_{j_a} u_{j_a-1} \dots u_{j_b} \cdot u_{i_b} u_{i_b-1} \dots u_{j_a+2} \\ &= u_{i_a} u_{i_a-1} \dots u_{j_b} \cdot u_{i_b} u_{i_b-1} \dots u_{j_a+2} \end{aligned}$$

Comme  $j_b < j_a + 2$ ,  $V$  est maintenant écrit sous la forme de JONES. L'élément  $W$  précédent peut donc être réécrit pour obtenir la forme souhaitée.  $\square$

L'écriture sous forme normale de JONES permet, comme nous allons le voir, de réduire les éléments de  $\mathcal{D}_n^K$  ainsi que de leur donner une forme standard. Elle nous sera utile pour également dénombrer ces éléments réduits.

**Proposition \*21.** *Un élément de  $\mathcal{D}_n^K$  s'écrivant sous la forme normale de JONES est réduit.*

*Démonstration :*

Pour qu'une réduction puisse avoir lieu, il est nécessaire qu'une lettre soit présente deux fois, les seules relations diminuant la longueur du mot étant  $u_i^2 = \circ u_i$  et  $u_i u_{i\pm 1} u_i = u_i$ . Ainsi, dans un élément de la forme  $u_{i_a} u_{i_a-1} \dots u_{j_a}$  de telles simplifications ne peuvent avoir lieu. Considérons donc un élément écrit sous forme normale de JONES et supposons qu'une lettre  $u_k$  y soit présente en double. Nous pouvons résumer cette situation avec cette écriture :

$$W = \dots \cdot u_{i_a} u_{i_a-1} \dots u_k u_{k-1} \dots u_{j_a} \cdot \dots \cdot u_{i_b} u_{i_b-1} \dots u_{k+1} u_k \dots u_{j_b} \cdot \dots$$

Dans la première partie,  $u_k$  ne peut passer à droite de  $u_{k-1}$ , et dans la deuxième  $u_k$  ne peut passer à gauche de  $u_{k+1}$ , ces deux lettres ne pourront donc jamais être suffisamment proches pour qu'une simplification ait lieu. Supposons maintenant que  $u_{j_a} = u_k$ , alors dans ce cas, comme  $j_b > j_a = k$ , la lettre  $u_k$  n'apparaît pas dans le bloc  $u_{i_b} u_{i_b-1} \dots u_{j_b}$ . De même si l'on suppose que  $u_{i_b} = u_k$ , comme  $i_a < i_b = k$  la lettre  $u_k$  n'apparaît pas dans le bloc  $u_{i_a} u_{i_a-1} \dots u_{j_a}$ . Ainsi, l'élément  $W$  ne peut être davantage simplifié, il est donc réduit.  $\square$

Nous pouvons maintenant dénombrer les classes d'isotopie de  $\mathcal{D}_n^K$ .

**Proposition \*22.** *Il y a exactement  $\text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  classes d'isotopie de  $\mathcal{D}_n^K$  modulo les boucles  $\circ$ .*

*À propos de la démonstration :*

La remarque de JONES [Jon83, *Aside 4.1.4 p. 14*] explique comment le dénombrement est effectué en associant les formes normales de JONES possibles à des chemins. Cela est également montré par WESTBURY [Wes95, 2, *Proposition p. 543, 545*] en utilisant les diagrammes de parenthèses.

## A.2.2 Le monoïde diagrammatique tressé

Nous avons vu que le monoïde  $\mathcal{D}_n^K$  est obtenu en remplaçant tous les croisements d'une tresse par des demi-tours, et que cela était justifié par la séparation des croisements lors du calcul du crochet de KAUFFMAN. Pour continuer avec cette remarque, lors du calcul non complété du crochet, les diagrammes intermédiaires présentent un mélange de demi-tours et de croisements, c'est-à-dire un objet généré à la fois par les demi-tours et les générateurs des tresses.

KAUFFMAN [Kau90] a utilisé ces objets pour construire une algèbre permettant d'étudier son invariant, un polynôme en deux variables différent du HOMFLY construit à partir d'une relation d'écheveau faisant intervenir 4 diagrammes<sup>4</sup> quasiment identiques au lieu de 3. Cet invariant ne sera pas discuté dans cette thèse, l'algèbre associée pour l'étudier non plus, mais la dynamique introduite par le mélange des demi-tours avec les croisements nous intéresse au plus haut point. Définissons d'abord l'ensemble de ces objets.

### Définition \*23 – Monoïde diagrammatique tressé de KAUFFMAN.

Pour  $n$  un entier, le *monoïde diagrammatique tressé de KAUFFMAN* est l'ensemble des diagrammes générés par les générateurs d'ARTIN, les demi-tours à  $n$  brins et de la boucle  $\circ$  muni de la concaténation; il est noté  $\mathcal{B}_n^K$ . L'élément neutre est encore noté  $\mathbb{1}_n$ . L'ensemble de ces diagrammes est considéré à isotopie près.

Si dans le premier monoïde il était relativement évident de trouver les relations transcrivant l'équivalence isotopique, il s'agit d'un exercice bien plus complexe pour  $\mathcal{B}_n^K$ . Nous avons en premier lieu celles venant du groupe des tresses ainsi que celles venant du monoïde diagrammatique de KAUFFMAN. Il ne reste qu'à déterminer celle faisant intervenir à la fois des demi-tours et des croisements. On remarquera assez vite qu'il est possible de créer des torsades, comme en figure A.5. Cela nous donne deux nouvelles relations, symbolisant le premier mouvement de REIDEMEISTER.

Une dernière catégorie de relations concerne la reconfiguration du voisinage d'un croisement avec un demi-tour. Elles sont décrites en figure A.6.

Nous avons finalement le théorème suivant.

### Théorème \*24 – Relations du monoïde diagrammatique tressé de KAUFFMAN.

L'isotopie du monoïde  $\mathcal{B}_n^K$  est décrite par les relations suivantes :

(i) venant de  $B_n$  :

$$\begin{cases} \sigma_i \sigma_i^{-1} = \mathbb{1}_n = \sigma_i^{-1} \sigma_i & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1, \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{pour } |i-j| > 1, \end{cases}$$

(ii) venant de  $\mathcal{D}_n^K$  :

$$\begin{cases} u_i^2 = \circ u_i = u_i \circ & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \\ u_i u_j u_i = u_i & \text{pour } |i-j| = 1, \\ u_i u_j = u_j u_i & \text{pour } |i-j| > 1, \end{cases}$$

4. De ce fait, certaines propriétés comme le théorème I.70 ne lui sont pas applicables.

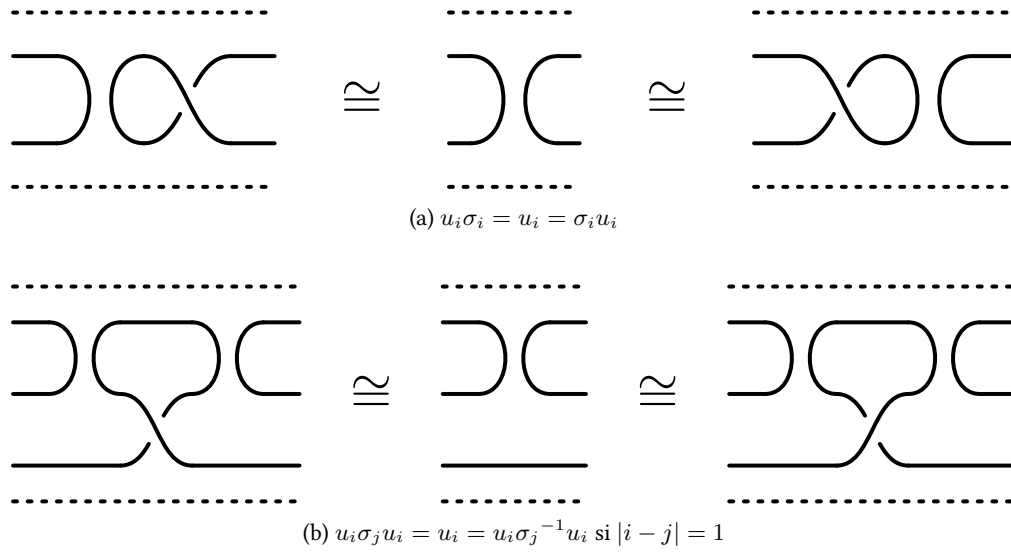


FIGURE A.5 – Les relations liées au premier mouvement de REIDEMEISTER. Ce sont des torsades horizontales pour la première figure, verticales pour la seconde. La première relation est également vraie en remplaçant  $\sigma_i$  par  $\sigma_i^{-1}$ , que ce soit dans un seul membre ou dans les deux.

(iii) décrivant le 1<sup>er</sup> mouvement de REIDEMEISTER :

$$\begin{cases} \sigma_i^{\pm 1} u_i = u_i = u_i \sigma_i^{\pm 1} & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, \\ u_i \sigma_j^{\pm 1} u_i = u_i & \text{pour } |i - j| = 1, \end{cases}$$

(iv) et celles dites de reconfiguration :

$$\begin{cases} \circ \sigma_i = \sigma_i \circ & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, \\ \sigma_i^e \sigma_j^e u_i = u_j \sigma_i^e \sigma_j^e = u_j u_i & \text{pour } |i - j| = 1 \text{ et } e = \pm 1, \\ u_i \sigma_j^e = u_i u_j \sigma_i^{-e} & \text{pour } |i - j| = 1 \text{ et } e = \pm 1, \\ \sigma_j^e u_i = \sigma_i^{-e} u_j u_i & \text{pour } |i - j| = 1 \text{ et } e = \pm 1. \end{cases}$$

KAUFFMAN (1990) – [Kau90, Theorem 4.4 p. 444]

*Démonstration :*

Donné par KAUFFMAN dans le cadre de l'isotopie régulière. Pour ce qui concerne le 1<sup>er</sup> mouvement de REIDEMEISTER, son écriture correspond à un croisement ayant deux de ses extrémités immédiatement reliées, sans interactions avec d'autres croisements. Au vu de la représentation standard de  $\mathcal{B}_n^K$ , avec des brins, un croisement ne peut voir ses extrémités reliées de cette façon que de deux manières :

- soit ce sont les extrémités situées à gauche (ou respectivement à droite), dans ce cas nous pouvons y accoler un demi-tour,
- soit ce sont les extrémités situées au-dessus (ou respectivement en dessous). Nous avons alors besoin de deux demi-tours décalés d'un brin par rapport au croisement pour créer un chemin entre les deux extrémités souhaitées.

Étant donné que seules deux situations sont possibles et que chacune d'elle est décrite par une relation, nous en déduisons que l'isotopie de  $\mathcal{B}_n^K$  est entièrement décrite par les relations annoncées.  $\square$

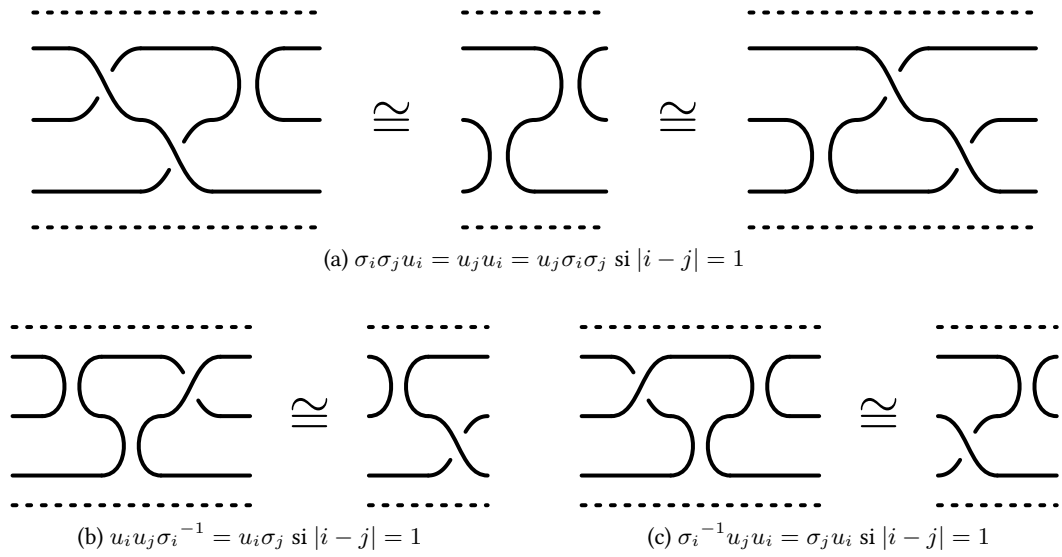


FIGURE A.6 – Ces relations dites de reconfiguration sont propres au monoïde diagrammatique tressé. Celles en figure A.6b et figure A.6c reposent sur le même principe.

### A.3 L'algèbre de TEMPERLEY-LIEB

Initialement introduite par TEMPERLEY et LIEB [TL71] pour répondre à des problèmes physiques modélisés par la théorie des graphes, l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB apparaît pour la première fois dans la théorie des nœuds au travers du polynôme de JONES. Sa construction nécessite une représentation des groupes de tresses en utilisant les algèbres de VON NEUMANN, qui peuvent à leur tour être vues comme l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB dans certains cas. On retrouve d'ailleurs une ressemblance avec les tresses au niveau de la représentation sous forme de diagramme des éléments de cette algèbre.

La présentation de cette algèbre sera très succincte, en effet seuls ses éléments et leurs interactions nous seront utiles. La structure d'algèbre ne sera pas abordée en détail par exemple, car en dehors de l'utilisation que l'on en fera dans ce mémoire. Nous donnons néanmoins sa définition.

#### Définition \*.25 – Algèbre de TEMPERLEY-LIEB.

Pour  $R$  un anneau commutatif,  $\delta$  un élément de  $R$  et  $n \geq 1$ , l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB  $TL_n(\delta)$  est la  $R$ -algèbre engendrée par les éléments  $u_1, \dots, u_n$  vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_i^2 = \delta u_i & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ u_i u_j u_i = u_i & \text{pour } |i - j| = 1, \\ u_i u_j = u_j u_i & \text{pour } |i - j| > 1 \end{cases}$$

Ces éléments  $u_i$  nous intéressent particulièrement, en effet ceux-ci apparaissent lorsque l'on calcule le crochet de KAUFFMAN d'une tresse non close. Comme la tresse n'est pas close, ce calcul donne alors un polynôme en les éléments de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB. Pour observer cela, il faut introduire la représentation sous forme de diagramme de ces éléments.

La représentation sous forme de diagramme des éléments de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB se constitue, comme les tresses, de brins, à la grande différence que ceux-ci ne se croisent jamais et qu'ils peuvent faire demi-tour. Le générateur  $u_i$  se représente de la manière suivante : tous les brins sauf le  $i^{\text{e}}$  et le  $(i + 1)^{\text{e}}$  sont

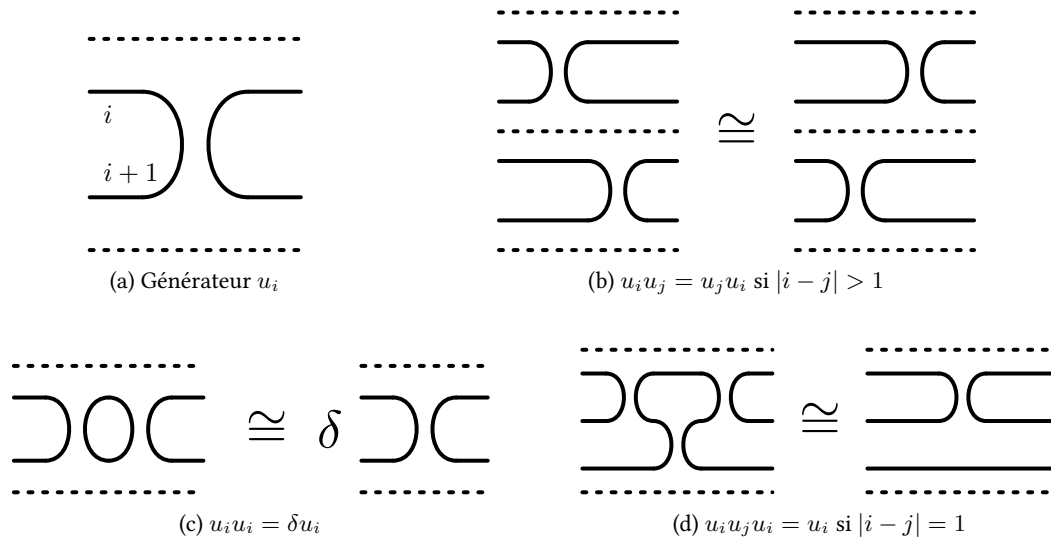


FIGURE A.7 – Représentation sous forme de diagramme des générateurs et relations de l’algèbre de TEMPERLEY-LIEB.

droits; concernant les extrémités restantes en  $i^e$  et  $(i + 1)^e$  positions, celles-ci se rejoignent en formant en demi-cercle. Nous obtenons alors la figure A.7a. Cette représentation reprend bien évidemment les règles fournies par l’algèbre. On peut voir cet aspect visuel en figure A.7.

## A.4 Bibliographie de ce chapitre

La bibliographie complète ainsi que le détail de chaque référence est accessible en page 191.

- [Art47] Emil ARTIN. « Theory of Braids ». Dans : *The Annals of Mathematics* 48.1, p. 101-126.
- [BKL98] Joan BIRMAN, Ki Hyoung KO et Sang Jin LEE. « A New Approach to the Word and Conjugacy Problems in the Braid Groups ». Dans : *Advances in Mathematics* 139.2, p. 322-353.
- [Jon83] Vaughan Frederick Randal JONES. « Index for subfactors ». Dans : *Inventiones Mathematicae* 72.1, p. 1-25.
- [Kau87] Louis Hirsch KAUFFMAN. « State models and the Jones polynomial ». Dans : *Topology* 26.3, p. 395-407.
- [Kau90] Louis Hirsch KAUFFMAN. « An invariant of regular isotopy ». Dans : *Transactions of the American Mathematical Society* 318.2, p. 417-471.
- [TL71] Harold Neville Vazeille TEMPERLEY et Elliott Hershel LIEB. « Relations between the ‘percolation’ and ‘colouring’ problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices : some exact results for the ‘percolation’ problem ». Dans : *Proceedings of the Royal Society of London A* 322.1549, p. 251-280.
- [Wes95] Bruce W. WESTBURY. « The representation theory of the Temperley-Lieb algebras ». Dans : *Mathematische Zeitschrift* 219.1, p. 539-565.



**Sommaire du présent chapitre**

<b>B.1 Appariements</b>	<b>169</b>
<b>B.2 Nombre de combinaisons d'une somme</b>	<b>170</b>
<b>B.3 Perturbation de la forme normale de JONES</b>	<b>173</b>

Certaines parties de ce mémoire nécessitent des notions ou réflexions annexes qui ne sont pas forcément directement reliées aux nœuds. Elles sont regroupées dans ce chapitre.

**B.1 Appariements**

Nous avons vu en définition I.102 que les  $n$ -enchevêtrements peuvent être clos en reliant leurs extrémités deux par deux. Nous pouvons être plus précis ici, notamment en donnant une manière standard de clore un enchevêtrement, et donc a fortiori une manière standard de choisir des paires d'extrémités, comme pour les tresses. Nous introduisons ainsi les « appariements », qui déterminent quelles paires d'extrémités doivent être reliées pour que l'on considère la clôture comme standard.

**Définition \*.26 – Appariement.**

Pour  $T$  un  $n$ -enchevêtrement, on note  $e_1, \dots, e_{2n}$  ses extrémités, indexées de façon consécutive le long de la bordure du disque contenant  $T$ . Un *appariement* est la donnée d'une partition non croisée  $\mathcal{E}$  de l'ensemble des extrémités de sorte que chaque élément de  $\mathcal{E}$  soit un ensemble de deux extrémités  $\{e_i, e_j\}$  avec  $i$  et  $j$  de parités différentes. On dira que  $T$  est *apparié* s'il est muni d'un appariement  $\mathcal{E}$ .

Afin que la notion d'« appariement standard » se rapproche de celle des tresses, de celles des diagrammes membre du monoïde diagrammatique de KAUFFMAN, ou de tout diagramme ayant ses extrémités placées de façon symétrique par rapport à une droite, cet appariement doit aussi vérifier le fait que ses paires peuvent être toutes séparées par une même droite. Le plus simple, puisque la numérotation des extrémités est consécutive le long d'un cercle, est d'associer le premier  $e_1$  avec le dernier  $e_{2n}$ , puis

le second  $e_2$  avec l'avant-dernier  $e_{2n-1}$ , et ainsi de suite jusqu'à la paire composée de  $e_n$  et  $e_{n+1}$ . En faisant cela, la droite passant par le milieu de  $[e_1e_{2n}]$  et le milieu de  $[e_n e_{n+1}]$  séparera toutes les paires d'extrémités. On notera toutes fois que cet appariement est dépendant de l'indexation des extrémités choisie, mais elle est unique à rotation près.

**Définition \*27 – Appariement standard.**

L'appariement standard d'un  $n$ -enchevêtrement ayant ses extrémités indexées par  $e_1 \dots, e_{2n}$  est l'appariement  $\mathcal{E}$  donné par :

$$\mathcal{E} = \{\{e_i, e_j\} \mid i = r, j = 2n - r + 1, r \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

*Remarque \*28.* Comme les tresses et les éléments de  $\mathcal{D}_n^K$  sont en particulier des  $n$ -enchevêtrements, ils peuvent également être munis d'un appariement, qui plus est différent de l'identification habituelle des extrémités se trouvant en même position de part et d'autre du diagramme. Cette identification habituelle est en outre un appariement standard, où  $e_1$  et  $e_{2n}$  sont les extrémités gauche et droite respectivement du premier brin, ainsi que  $e_n$  et  $e_{n+1}$  les extrémités gauche et droite respectivement du dernier brin.

**Définition \*29 – Clôture standard d'un enchevêtrement.**

Pour  $T$  un  $n$ -enchevêtrement apparié, la *clôture standard* de  $T$  est la clôture reliant toutes les paires d'extrémités définies par l'appariement de  $T$ .

Les appariements ne servent pas seulement à définir une clôture standard, en effet si un ensemble d'enchevêtrements a le même appariement, alors nous pouvons harmoniser la notion de clôture sur cet ensemble.

**Définition \*30 – Ensemble d'enchevêtrements appariés homogène.**

Un sous-ensemble  $E$  de  $\mathcal{T}_n$  est dit *homogène* si pour tout  $n$ -enchevêtrement  $T$  et  $T'$  de  $E$  :

- (i)  $T$  et  $T'$  sont appariés par le même ensemble,
- (ii) lorsque  $T$  et  $T'$  sont superposés, de façon à ce que les cercles les délimitant soient confondus, alors les extrémités de  $T$  et  $T'$  sont également confondus,
- (iii) les extrémités sont indexées de la même façon pour  $T$  et  $T'$ .

## B.2 Nombre de combinaisons d'une somme

Imaginons que nous souhaitons additionner des paramètres  $i_1, \dots, i_n$  variant chacun dans un intervalle entier différent ou non. La somme  $s$  de ces paramètres peut donner, pour des valeurs  $i_1, \dots, i_n$  différentes, le même résultat. On s'intéresse ici au nombre de combinaisons différentes des valeurs des paramètres  $i_1, \dots, i_n$  qui donne une même somme  $S$  fixée.

Pour simplifier notre approche, commençons par deux paramètres  $a \in \llbracket m_a, M_a \rrbracket$  et  $b \in \llbracket m_b, M_b \rrbracket$ . La somme  $s$  de ces deux paramètres est comprise dans  $\llbracket m_a + m_b, M_a + M_b \rrbracket$ , et il n'est pas difficile de voir que ces valeurs extrêmes ne sont atteintes qu'une seule fois. Pour les autres valeurs possibles, nous pouvons énumérer ces combinaisons. Notons pour cela  $e_a = M_a - m_a$ ,  $e_b = M_b - m_b$  et supposons

sans perte de généralité que  $e_a \leq e_b$  :

$s$	Card ( $\mathcal{C}$ )	$\mathcal{C}$
$m_a + m_b$	1	$\{(m_a, m_b)\}$
$m_a + m_b + 1$	2	$\{(m_a + 1, m_b), (m_a, m_b + 1)\}$
...	...	...
$M_a + m_b - 1$	$e_a - 1$	$\{(M_a - 1, m_b), (M_a - 2, m_b + 1), (m_a, m_b + e_a - 1)\}$
$M_a + m_b$	$e_a$	$\{(M_a, m_b), (M_a - 1, m_b + 1), \dots, (m_a, m_b + e_a)\}$
$M_a + m_b + 1$	$e_a$	$\{(M_a, m_b + 1), (M_a - 1, m_b + 2), \dots, (m_a, m_b + e_a + 1)\}$
...	...	...
$M_b + m_a - 1$	$e_a$	$\{(M_a, M_b - e_a - 1), (M_a - 1, M_b - e_a), \dots, (m_a, M_b - 1)\}$
$M_b + m_a$	$e_a$	$\{(M_a, M_b - e_a), (M_a - 1, M_b - e_a + 1), \dots, (m_a, M_b)\}$
$M_b + m_a + 1$	$e_a - 1$	$\{(M_a, M_b - e_a + 1), (M_a - 1, M_b - e_a + 2), \dots, (m_a + 1, M_b)\}$
...	...	...
$M_a + M_b - 1$	2	$\{(M_a, M_b - 1), (M_a - 1, M_b)\}$
$M_a + M_b$	1	$\{(M_a, M_b)\}$

On observe que le nombre de combinaisons croît, stagne puis décroît suivant trois périodes déterminées par les deux écarts  $e_a$  et  $e_b$ . Évidemment nous sommes ici dans un cas très simple, extrapoler une formule générale qui pour une somme fixée de  $n$  paramètres renvoie le nombre de combinaisons associées à partir de cet exemple est impossible.

Avant de donner des définitions et résultats sur ce genre de problème, continuons cet exemple en ajoutant un troisième paramètre  $c \in \llbracket m_c, M_c \rrbracket$ , et on note toujours  $e_c = M_c - m_c$ . Pour étudier cette somme de trois paramètres, nous pourrions encore une fois tout énumérer, mais faisons-le en utilisant le travail déjà effectué pour deux paramètres. Pour cela nous devons nous ramener à deux paramètres en notant  $d \in \llbracket m_a + m_b, M_a + M_b \rrbracket$  un paramètre regroupant la somme de  $a$  et  $b$ . Il y a cependant une différence non négligeable : les valeurs de  $d$  sont déjà des résultats d'une somme et sont donc pondérées par le nombre de combinaisons précédemment explicitées. Nous avons par exemple pour  $0 < h < \min(e_a, e_b, e_c)$  :

$S$	Card ( $\mathcal{C}$ )	$\mathcal{C}$
$m_a + m_b + m_c$	$1 \times 1$	$\{(m_a + m_b, m_c)\}$
$m_a + m_b + m_c + h$	$1 \times 1 + 2 \times 1 + \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} (m_a + m_b, m_c + h), \\ (m_a + m_b + 1, m_c + h - 1), \dots \end{array} \right\}$
$M_a + m_b + m_c + 1$	$e_a \times 1 + e_a \times 1 + \dots$	$\left\{ \begin{array}{l} (M_a + m_b + 1, m_c), \\ (M_a + m_b, m_c + 1), \dots \end{array} \right\}$

Le nombre de combinaisons est écrit sous cette forme exprès, en effet nous pouvons également imaginer que les valeurs du paramètre  $c$  sont également pondérées. Cette écriture laisse également penser que nous pourrions écrire ces nombres comme un produit scalaire de deux vecteurs. Tout ceci avait pour but de faire remarquer la mise en abîme possible de ce genre de problème et de présenter une manière possible de les étudier.

**Définition \*.31 – Paramètre pondéré.**

On appelle *paramètre pondéré* une variable  $v$  prenant des valeurs entières comprises entre son minimum  $m_v$  et son maximum  $M_v$ , et associée à une application de poids  $\rho_v : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que :

$$\rho_v(x) = \begin{cases} \rho_v(x) > 0 & \text{si } x \in \llbracket m_v, M_v \rrbracket, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons évoqué l'idée d'obtenir le nombre de combinaisons avec un produit scalaire. Vérifions que c'est bien possible.

**Proposition \*32.** Soient  $a$  et  $b$  deux paramètres pondérés bornés par  $\llbracket m_a, M_a \rrbracket$  et  $\llbracket m_b, M_b \rrbracket$  respectivement. Une somme  $s$  fixée réalisable par  $a + b$  admet  $A \cdot B$  combinaisons, où  $A$  et  $B$  sont des vecteurs indexés à partir de 0 décrits comme :

$$\forall i \in \llbracket 0, M_b - m_b \rrbracket, A_i = \rho_a(s - m_b - i) \quad \text{et} \quad B_i = \rho_b(m_b + i)$$

et  $A \cdot B$  désigne le produit scalaire de ces vecteurs.

*Démonstration :*

Pour  $s$  une somme fixée, si  $b$  est également fixé à une valeur  $x_b \in \llbracket m_b, M_b \rrbracket$ , alors le paramètre  $a$  doit valoir  $s - x_b$ , et donc le nombre de combinaisons pour  $s$  et  $b$  fixés correspond à  $\rho_a(s - x_b)\rho_b(x_b)$ . Notons que dans le cas où  $s - x_b \notin \llbracket m_a, M_a \rrbracket$ , alors  $\rho_a(s - x_b) = 0$  et donc le nombre de combinaisons de ce cas est nul. En parcourant alors les valeurs  $x_b$  possibles, le nombre de combinaisons pour  $s$  devient alors :

$$\rho_a(s - m_b)\rho_b(m_b) + \cdots + \rho_a(s - M_b)\rho_b(M_b) = \sum_{i=0}^{M_b - m_b} \rho_a(s - m_b - i)\rho_b(m_b + i) = A \cdot B$$

où  $A$  et  $B$  sont des vecteurs de tailles  $M_b - m_b + 1$  définis comme dans l'énoncé.  $\square$

*Remarque \*33.* On peut définir de manière analogue ces mêmes vecteurs pour qu'ils soient de taille  $M_a - m_a + 1$  en choisissant d'abord une valeur pour le paramètre pondéré  $a$ .

Grâce à cette méthode de calcul vectorielle, nous pouvons même envisager de dénombrer les combinaisons de toutes les sommes en même temps grâce à une matrice. De même que dans la proposition \*32, les indices des lignes et colonnes sont indexés à partir de 0 par souci de lisibilité.

**Proposition \*34.** Soient  $a$  et  $b$  deux paramètres pondérés à valeur dans  $\llbracket m_a, M_a \rrbracket$  et  $\llbracket m_b, M_b \rrbracket$  respectivement. On note  $e_a = M_a - m_a$ ,  $e_b = M_b - m_b$ ,  $A$  une matrice de taille  $(e_a + e_b + 1) \times (e_b + 1)$  et  $B$  un vecteur définis comme :

$$\forall i \in \llbracket 0, e_a + e_b \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, e_b \rrbracket, A_{i,j} = \rho_a(m_a + i - j), \quad B_j = \rho_b(m_b + j).$$

Alors le vecteur  $AB = S$  de taille  $e_a + e_b + 1$  contient le nombre de combinaisons possibles pour une somme  $s \in \llbracket m_a + m_b, M_a + M_b \rrbracket$  en la  $(s - m_a - m_b)^e$  coordonnée.

*Démonstration :*

Fixons une somme  $s \in \llbracket m_a + m_b, M_a + M_b \rrbracket$  et calculons-la  $(s - m_a - m_b)^e$  coordonnée du vecteur obtenu via le produit  $AB$  :

$$\begin{aligned} (AB)_{s - m_a - m_b} &= \sum_{j=0}^{e_b} A_{s - m_a - m_b, j} B_j = \sum_{j=0}^{e_b} \rho_a(m_a + (s - m_a - m_b) - j) \rho_b(m_b + j) \\ &= \sum_{j=0}^{e_b} \rho_a(s - m_b - j) \rho_b(m_b + j) \end{aligned}$$

Par la proposition \*32, cette dernière somme donne bien le nombre de combinaisons possibles pour obtenir la somme  $s$ .  $\square$

Il est maintenant assez simple de généraliser à une somme de plus de deux paramètres pondérées en itérant la proposition \*34.

**Proposition \*35.** Pour  $v_1, \dots, v_k$  des paramètres pondérés à valeurs dans  $\llbracket m_1, M_1 \rrbracket, \dots, \llbracket m_k, M_k \rrbracket$  respectivement, on note  $e_1 = M_1 - m_1, \dots, e_k = M_k - m_k$  les différents écarts. Le nombre de combinaisons possibles pour obtenir une somme  $s = v_1 + \cdots + v_k \in \llbracket \sum_{l=1}^k m_l, \sum_{l=1}^k M_l \rrbracket$  est donné par la  $(s - \sum_{l=1}^k m_l)^e$  coordonnée du vecteur  $S = V_1 \cdots V_k$  avec  $V_l$  des matrices de taille  $(1 + \sum_{a=1}^k e_a) \times$

$(1 + \sum_{a=l+1}^k e_a)$  telles que :

$$\forall i \in \left[0, \sum_{a=l}^k e_a\right], \forall j \in \left[0, \sum_{a=l+1}^k e_a\right], \quad (V_l)_{i,j} = \rho_{v_l}(m_l + i - j)$$

*Démonstration :*

Dans le cas d'un seul paramètre pondéré  $v$  borné par  $m_v$  et  $M_v$ , les sommes possibles sont exactement les valeurs que peut prendre  $v$ , et donc la matrice de taille  $(1 + M_v - m_v) \times 1$  définie par :

$$\forall i \in [0, M_v - m_v], \quad (V)_{i,0} = \rho_v(m_v + i - 0)$$

détient aussi exactement le nombre de combinaisons possibles pour chacune d'entre elles. Si l'on suppose maintenant que notre propriété est vraie pour  $k - 1$  paramètres pondérés  $v_2, \dots, v_k$ , il nous faut étudier le cas de  $k$  paramètres pour terminer cette preuve par récurrence. Or si la propriété est vraie pour  $k - 1$  paramètres pondérés, nous pouvons les englober dans un unique paramètre pondéré  $v'$  borné par  $[\sum_{l=2}^k m_l, \sum_{l=2}^k M_l]$ . Les valeurs  $x$  de  $v'$  ont alors pour poids la  $(x - \sum_{l=2}^k m_l)^e$  coordonnée du vecteur  $V_2 \cdots V_k$ , qui correspond par hypothèse au nombre de combinaisons pour obtenir  $x$ . Nous sommes ainsi revenus au cas de deux paramètres  $v_1$  et  $v'$ , il ne reste donc plus qu'à appliquer la proposition \*34, qui nous donne qu'une somme  $s = v_1 + v'$  est ainsi atteinte suivant le nombre de combinaisons calculé à la  $(x - m_1 - \sum_{l=2}^k m_l)^e$  coordonnée du vecteur  $V_1 (V_2 \cdots V_k)$ .  $\square$

### B.3 Perturbation de la forme normale de JONES

Le but de cette section est de comprendre comment la forme normale de JONES se comporte avec la concaténation. On commence par perturber un bloc normal de la forme :  $u_i \cdot u_{i-1} \cdots u_{j+1} \cdot u_j$ .

**Proposition \*36.** Pour  $n \geq 2$ , des indices  $i, j, k \in [1, \text{Cat}(n)]$  avec  $i \geq j$ , l'écriture sous forme normale de JONES du produit  $u_k \cdot u_i \cdots u_j$  où  $u_i \cdots u_j = u_i \cdot u_{i-1} \cdots u_{j+1} \cdot u_j$  s'écrit :

- (i) si  $k < j$ ,  $u_k \cdot u_i \cdots u_j$ ,
- (ii) si  $j \leq k < i - 1$ ,  $u_k \cdots u_j \cdot u_i \cdots u_{k+2}$ ,
- (iii) si  $k = i - 1$  et  $j < i$ ,  $u_{i-1} \cdots u_j$ ,
- (iv) si  $k = i$ ,  $\circ \cdot u_i \cdots u_j$ ,
- (v) si  $k = i + 1$ ,  $u_{i+1} \cdots u_j$ ,
- (vi) si  $k > i + 1$ ,  $u_i \cdots u_j \cdot u_k$ .

*Démonstration :*

Dans le premier cas, si  $k < j$  alors l'écriture  $u_k \cdot u_i \cdots u_j$  vérifie déjà les conditions de la forme normale, il n'y a donc pas de changement. Pour le dernier cas, si  $k > i + 1$  alors  $u_k$  commute avec toutes les lettres composant  $u_i \cdots u_j$ , on peut ainsi écrire  $u_k \cdot u_i \cdots u_j = u_i \cdots u_j \cdot u_k$  qui est maintenant sous forme normale. Pour le quatrième cas, si  $k = i$  alors on a  $u_i \cdot u_i \cdots u_j = \circ \cdot u_i \cdots u_j$  qui est sous forme normale. Concernant le cinquième, si  $k = i + 1$  la lettre  $u_k$  vient compléter l'écriture  $u_i \cdots u_j$ , ce qui donne bien  $u_{i+1} \cdots u_j$  sous forme normale.

Il nous reste les deux cas les plus intéressants. Le troisième cas suppose que  $k = i - 1$  et  $j < i$ , en effet si  $k = i - 1$  et  $j = i$  alors nous nous sommes dans le premier cas. Avec ces hypothèses, nous avons alors  $u_k \cdot u_i \cdots u_j = u_{i-1} \cdot u_i \cdot u_{i-1} \cdots u_j = u_{i-1} \cdots u_j$  et cette écriture est bien une forme normale. Pour le deuxième cas maintenant, on suppose que  $j \leq k < i - 1$ , ce qui implique que  $u_i \cdots u_j$  est composé d'au moins trois lettres. On réécrit alors le produit de cette façon :

$$\begin{aligned} u_k \cdot u_i \cdots u_j &= u_k \cdot u_i \cdots u_{k+2} \cdot u_{k+1} \cdot u_k \cdots u_j = u_i \cdots u_{k+2} \cdot u_k \cdot u_{k+1} \cdot u_k \cdots u_j \\ &= u_i \cdots u_{k+2} \cdot u_k \cdots u_j \\ &= u_k \cdots u_j \cdot u_i \cdots u_{k+2} \end{aligned}$$

la dernière commutation étant justifiée par le fait que les lettres composant  $u_i \dots u_{k+2}$  sont d'indice strictement supérieur d'au moins 2 par rapport à ceux de  $u_k \dots u_j$ . Comme de plus nous avons  $k < i$  et  $j < k + 2$ , cette dernière écriture respecte les conditions de la forme normale de JONES.  $\square$

Nous allons également avoir besoin de la perturbation à droite d'un bloc normal, qui se décrit de façon analogue.

**Proposition \*37.** *Pour  $n \geq 2$ , des indices  $i, j, k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$  avec  $i \geq j$ , l'écriture sous forme normale de JONES du produit  $u_i \dots u_j \cdot u_k$  où  $u_i \dots u_j = u_i \cdot u_{i-1} \dots u_{j+1} \cdot u_j$  s'écrit :*

- (i) si  $k > i$ ,  $u_i \dots u_j \cdot u_k$ ,
- (ii) si  $j + 1 < k \leq i$ ,  $u_{k-2} \dots u_j \cdot u_i \dots u_k$ ,
- (iii) si  $k = j + 1$  et  $j < i$ ,  $u_i \dots u_{j+1}$ ,
- (iv) si  $k = j$ ,  $\circ \cdot u_i \dots u_j$ ,
- (v) si  $k = j - 1$ ,  $u_i \dots u_{j-1}$ ,
- (vi) si  $k < j - 1$ ,  $u_k \cdot u_i \dots u_j$ .

*Démonstration :*

Analogue à celle de la proposition \*36, la numérotation des cas de cette proposition est d'ailleurs telle que les cas analogues avec l'autre proposition ont le même numéro.  $\square$

On peut à présent perturber une forme normale de JONES plus générale. Nous allons voir que l'ajout d'une seule lettre peut parfois changer globalement la forme normale, nous divisons donc cette étude en plusieurs propositions. L'une des plus importantes est la suivante, car elle permet de déplacer la nouvelle lettre au niveau du premier bloc avec lequel elle peut interagir.

**Proposition \*38.** *Pour  $n \geq 2$ , un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit sous la forme normale de JONES*

$$W = \circ^c u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

et  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$ , on a les deux cas suivants :

- (i) si  $k > i_l + 1$ , alors  $u_k \cdot W = W \cdot u_k$  où cette dernière écriture est sous forme normale,
- (ii) sinon il existe un unique  $a \in \llbracket 1, l \rrbracket$  tel que  $i_{a-1} + 1 < k \leq i_a + 1$  ou bien  $a = 1$ .

*Démonstration :*

Si  $k > i_l + 1$ , alors  $u_k$  commute avec toutes les lettres de  $W$ , puisque  $i_l$  est l'indice maximal qui y apparaît. Ainsi on peut écrire  $u_k \cdot W = W \cdot u_k$ , qui est alors la forme normale recherchée. Dans le cas où  $k \leq i_l + 1$ , il existe au moins un  $a \in \llbracket 1, l \rrbracket$  tel que  $k \leq i_a + 1$ . Si on suppose que  $a$  est minimal, cela implique en particulier que  $i_{a-1} + 1 < k$  si  $a > 1$ , d'où l'unicité annoncée.  $\square$

Nous pouvons alors traiter l'interaction la plus simple.

**Proposition \*39.** *Pour  $n \geq 2$ , un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit sous la forme normale de JONES*

$$W = \circ^c u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

et  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$  tel que  $k \leq i_l + 1$ , si  $k = i_a$  où  $a$  est donné par la proposition \*38 alors  $u_k \cdot W = \circ W$ .

*Démonstration :*

Avec l'hypothèse  $k \leq i_l + 1$ , nous avons effectivement par la proposition \*38 l'existence d'un unique  $a \in \llbracket 1, l \rrbracket$  tel que  $a = 1$  ou  $i_{a-1} + 1 < k \leq i_a + 1$ . Si  $a = 1$ , alors on peut appliquer immédiatement le quatrième cas de la proposition \*36 qui nous donne le résultat attendu. Si  $a > 1$ , alors le sixième cas de cette même proposition permet de commuter  $u_k$  avec toutes les lettres présentes avant  $u_{i_a}$ , et nous pouvons alors utiliser le quatrième cas encore une fois.  $\square$

Pour les autres cas, nous devons nous intéresser aux interactions déclenchant une réaction en chaîne.

**Proposition \*40.** *Pour  $n \geq 2$ , un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit sous la forme normale de JONES*

$$W = u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

et  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$  tel que pour tout  $b \in \llbracket 1, l \rrbracket$  on a l'inégalité  $j_b \leq k + 2(b - 1) < i_b - 1$ , alors la forme normale de  $u_k \cdot W$  est donnée par :

$$u_k \cdot W = u_k \dots u_{j_1} \cdot u_{i_1} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_{l-1}} \dots u_{j_l} \cdot u_{i_l} \dots u_{k+2l}$$

*Démonstration :*

Il suffit d'appliquer récursivement le deuxième cas de la proposition **\*.36**. En effet, comme  $j_1 \leq k < i_1 - 1$ , on peut l'appliquer au premier bloc pour obtenir :

$$u_k \cdot W = u_k \dots u_{j_1} \cdot u_{i_1} \dots u_{k+2} \cdot u_{i_2} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

Toujours par hypothèse, on a encore  $j_2 \leq k + 2 < i_2 - 1$ , on peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} u_k \cdot W &= u_k \dots u_{j_1} \cdot u_{i_1} \dots u_{k+2} \cdot u_{i_2} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= u_k \dots u_{j_1} \cdot u_{i_1} \dots u_{k+3} \cdot u_{k+2} \cdot u_{i_2} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= u_k \dots u_{j_1} \cdot u_{i_1} \dots u_{k+3} \cdot u_{k+2} \dots u_{j_2} \cdot u_{i_2} \dots u_{k+4} \cdot u_{i_3} \dots u_{j_3} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= u_k \dots u_{j_1} \cdot u_{i_1} \dots u_{j_2} \cdot u_{i_2} \dots u_{k+4} \cdot u_{i_3} \dots u_{j_3} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \end{aligned}$$

Il est clair que nous pouvons effectuer la même chose pour chaque bloc, obtenant au final la forme annoncée.  $\square$

De façon analogue, nous avons aussi une réaction en chaîne en ajoutant une lettre particulière à droite.

**Proposition \*.41.** Pour  $n \geq 2$ , un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit sous la forme normale de JONES

$$W = u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

et  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$  tel que pour tout  $b \in \llbracket 1, l \rrbracket$  on a l'inégalité  $j_b + 1 < k - 2(l - b) \leq i_b$ , alors la forme normale de  $W \cdot u_k$  est donnée par :

$$W \cdot u_k = u_{k-2l} \dots u_{j_1} \cdot u_{i_1} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_{l-1}} \dots u_{j_l} \cdot u_{i_l} \dots u_k$$

*Démonstration :*

Encore une fois, il suffit d'appliquer récursivement le deuxième cas de la proposition **\*.37**. La méthode est la même que la preuve de la proposition **\*.40**.  $\square$

Des deux dernières propositions, on en déduit qu'il est possible de déplacer sous certaines conditions une lettre au travers d'une forme normale sans modifier cette dernière.

**Proposition \*.42.** Soient  $n \geq 2$ , un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit sous la forme normale de JONES

$$W = u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

et  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$  tel que pour tout  $b \in \llbracket 1, l \rrbracket$  on a l'inégalité  $j_b \leq k + 2(b - 1) < i_b - 1$ . Alors on a l'égalité  $u_k \cdot W = W \cdot u_{k+2l}$ .

*Démonstration :*

Il s'agit de la combinaison de la proposition **\*.40** et de la proposition **\*.41**. En particulier pour  $b \in \llbracket 1, l \rrbracket$ , si  $j_b \leq k + 2(b - 1) < i_b - 1$ , alors :

$$\begin{aligned} j_b \leq k + 2(b - 1) < i_b - 1 &\iff j_b + 1 \leq k + 2(b - 1) + 1 < i_b \\ &\iff j_b + 1 < k + 2(b - 1) + 2 \leq i_b \\ &\iff j_b + 1 < k + 2b \leq i_b \\ &\iff j_b + 1 < k + 2l - 2(l - b) \leq i_b \end{aligned}$$

$\square$

**Remarque \*.43.** Dans la proposition **\*.42**, aucune des écritures  $u_k \cdot W$  ou  $W \cdot u_{k+2l}$  n'est sous forme normale.

Ces modifications en chaîne suite à une perturbation peuvent être décrites dans un cadre plus général.

**Proposition \*44.** Pour  $n \geq 2$ , un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit sous la forme normale de JONES

$$W = \circ^c u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

et  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$  tel que  $k \leq i_l + 1$ , on note  $a$  l'indice donné par la proposition \*38. Si on a  $k \leq i_a - 1$ , alors il existe un unique  $b \in \llbracket a, l \rrbracket$  maximal tel que soit  $b = a$ , soit pour tout  $d \in \llbracket a, b - 1 \rrbracket$  :

$$j_d \leq k + 2(d - a) < i_d - 1.$$

On décrit alors les cas suivants :

(i) si  $b = l$  et que  $j_l \leq k + 2(l - a) < i_l - 1$ , on obtient la forme normale suivante :

$$u_k \cdot W = W_1 \cdot u_k \dots u_{j_a} \cdot u_{i_a} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{l-1}} \dots u_{j_l} \cdot u_{i_l} \dots u_{k+2(l-a+1)},$$

(ii) si  $j_b > k + 2(b - a)$ , on obtient comme forme normale :

$$u_k \cdot W = W_1 \cdot u_k \dots u_{j_a} \cdot u_{i_a} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{k+2(b-a)} \cdot u_{i_b} \dots u_{j_b} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

et si  $b = a$  on a simplement :

$$u_k \cdot W = W_1 \cdot u_k \cdot u_{i_a} \dots u_{j_a} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l},$$

(iii) si  $k + 2(b - a) \geq i_b - 1$ , on obtient alors comme forme normale :

$$u_k \cdot W = W_1 \cdot u_k \dots u_{j_a} \cdot u_{i_a} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{j_b} \cdot u_{i_{b+1}} \dots u_{j_{b+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

et si  $b = a$  on a :

$$u_k \cdot W = W_1 \cdot u_k \dots u_{j_a} \cdot u_{i_{a+1}} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l},$$

où à chaque fois  $W_1 = \circ^c u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}}$ .

*Démonstration :*

Avec l'hypothèse  $k \leq i_l + 1$ , nous avons effectivement par la proposition \*38 l'existence d'un unique  $a \in \llbracket 1, l \rrbracket$  tel que  $a = 1$  ou  $i_{a-1} + 1 < k \leq i_a + 1$ . On peut alors déplacer  $u_k$  à travers  $W$  jusqu'au bloc démarrant avec la lettre  $u_a$ . En gardant la même notation  $W_1$  que dans l'énoncé, on obtient alors :

$$u_k \cdot W = W_1 \cdot u_k \cdot u_{i_a} \dots u_{j_a} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

Commençons par remarquer que l'existence de  $b$  est assurée par le cas  $b = a$ , et son unicité l'est car il est maximal. Si  $j_a > k$ , ce qui correspond au deuxième cas avec  $b = a$ , alors la proposition \*36 assure que l'écriture ci-dessus est déjà sous forme normale. Si par contre  $k \geq i_a - 1$ , on a par hypothèse que  $k \leq i_a - 1$ , donc  $k = i_a - 1$ . On peut supposer alors que  $j_a < i_a$  sinon on revient au cas  $j_a > k$ . Par la proposition \*36, on obtient alors l'écriture annoncée pour le troisième cas avec  $b = a$ , qui est :

$$u_k \cdot W = W_1 \cdot u_k \dots u_{j_a} \cdot u_{i_{a+1}} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}.$$

Supposons maintenant que  $b > a$ . De par l'hypothèse sur  $b$ , on a par la proposition \*40 que :

$$u_k \cdot W = W_1 \cdot W_2 \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{k+2(b-a)} \cdot u_{i_b} \dots u_{j_b} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

où  $W_2 = u_k \dots u_{j_a} \cdot u_{i_a} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{b-2}} \dots u_{j_{b-1}}$ . Si  $j_b > k + 2(b - a)$ , alors l'écriture ci-dessus est sous forme normale, ce qui montre le deuxième cas. Dans le cas contraire et comme  $b$  est maximal, on a  $k + (b - a) \geq i_b - 1$ . Par hypothèse sur  $b$  on a  $k + 2(b - 1 - a) < i_{b-1} - 1$ , ce qui implique en particulier que  $k + 2(b - a) \leq i_b - 1$  car  $i_{b-1} < i_b$ , et donc que  $k + 2(b - a) = i_b - 1$ . De plus on peut supposer que  $j_b < i_b$ , car sinon  $j_b = i_b > k + 2(b - a)$  et ce cas a déjà été traité. La proposition \*36 permet encore de conclure pour le troisième cas, en effet :

$$\begin{aligned} u_k \cdot W &= W_1 \cdot W_2 \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{k+2(b-a)} \cdot u_{i_b} \dots u_{j_b} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= W_1 \cdot W_2 \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{i_{b-1}} \cdot u_{i_b} \dots u_{j_b} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= W_1 \cdot W_2 \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{i_{b-2}} \cdot u_{i_{b-1}} \cdot u_{i_b} \dots u_{j_b} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= W_1 \cdot W_2 \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{i_{b-2}} \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{j_b} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= W_1 \cdot W_2 \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{j_b} \cdot u_{i_{b+1}} \dots u_{j_{b+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}. \end{aligned}$$

Il reste le premier cas de l'énoncé, qui est montré par l'utilisation de la proposition \*40.  $\square$

**Proposition \*45.** Pour  $n \geq 2$ , un élément  $W$  de  $\mathcal{D}_n^K$  écrit sous la forme normale de JONES

$$W = \circ^c u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$$

et  $k \in \llbracket 1, \text{Cat}(n) \rrbracket$  tel que  $k \leq i_l + 1$ , on note  $a$  l'indice donné par la proposition \*38. On suppose de plus que  $k = i_a + 1$ . On a pour commencer les cas particuliers suivants :

– si  $a = l$  ou  $k < i_{a+1}$ , alors :

$$\circ^c u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_{i_a+1} \dots u_{j_a} \cdot \underbrace{u_{i_{a+1}} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}}_{\text{non présent si } a=l}$$

est la forme normale de  $u_k \cdot W$ ,

– sinon  $i_a + 1 = i_{a+1}$  et si  $i_a = j_a$  la forme normale recherchée est :

$$\circ^c u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_{i_a+1} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l},$$

– sinon  $i_a + 1 = i_{a+1}$  et si  $a = 1$  on a :

$$\circ^c u_{i_1-1} \dots u_{j_1} \cdot u_{i_2} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}.$$

Pour les autres cas, il existe un unique  $b \in \llbracket 1, a-1 \rrbracket$  minimal tel que soit  $b = a-1$  soit pour tout  $d \in \llbracket 2, a-1 \rrbracket$  on a  $j_d + 1 < k - 2(a-d) \leq i_d$ , on décrit alors les cas suivants :

(i) si  $b = 1$  et que  $j_1 + 1 < k - 2(a-1) \leq i_1$ , on obtient la forme normale suivante :

$$u_k \cdot W = u_{k-2a} \dots u_{j_1} \cdot u_{i_1} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_a} \cdot W_1,$$

(ii) si  $k - 2(a-b) > i_b$ , on obtient comme forme normale :

$$u_k \cdot W = u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_b} \dots u_{j_b} \cdot u_{k-2(a-b)} \dots u_{j_{b+1}} \cdot u_{i_{b+1}} \dots u_{j_{b+2}} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_a} \cdot W_1$$

et si  $b = a-1$  on a simplement :

$$u_k \cdot W = u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_{k-2} \dots u_{j_a} \cdot W_1,$$

(iii) si  $j_b + 1 \geq k - 2(a-b)$ , on obtient alors comme forme normale :

$$u_k \cdot W = u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{j_{b-1}} \cdot u_{i_b} \dots u_{j_{b+1}} \cdot u_{i_{b+1}} \dots u_{j_{b+2}} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_a} \cdot W_1$$

et si  $b = a-1$  on a :

$$u_k \cdot W = u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-2}} \dots u_{j_{a-2}} \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_a} \cdot W_1$$

où à chaque fois  $W_1 = \circ^c u_{i_{a+1}} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l}$ .

*Démonstration :*

Comme pour la proposition précédente, avec l'hypothèse  $k \leq i_l + 1$ , nous avons effectivement par la proposition \*38 l'existence d'un unique  $a \in \llbracket 1, l \rrbracket$  tel que  $a = 1$  ou  $i_{a-1} + 1 < k \leq i_a + 1$ . On peut alors déplacer  $u_k$  à travers  $W$  jusqu'au bloc démarrant avec la lettre  $u_a$ . En gardant la même notation  $W_1$  que dans l'énoncé, on obtient alors sachant que  $k = i_a + 1$  :

$$\begin{aligned} u_k \cdot W &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_k \cdot u_{i_a} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \\ &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_{i_a+1} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \end{aligned}$$

Si on suppose que  $a = l$ , alors  $u_k$  vient compléter le dernier bloc normal, et cela préserve les conditions de la forme normale. De même si l'on suppose que  $k = i_a + 1 < i_{a+1}$ , l'écriture précédente est donc la forme recherchée sous ces hypothèses. Dorénavant on suppose que  $k = i_a + 1 = i_{a+1}$ , car rappelons que  $i_a < i_{a+1}$ . Si  $i_a = j_a$ , alors le bloc  $u_{i_a} \dots u_{j_a} = u_{i_a}$  disparaît car celui-ci est entouré de deux lettres  $u_k$  avec  $k = i_a + 1$ . Si maintenant  $i_a > j_a$  mais que  $a = 1$ , on a par la proposition \*37 :

$$\begin{aligned} u_k \cdot W &= u_{i_1+1} \dots u_{j_1} \cdot u_{i_2} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= u_{i_1+1} \dots u_{j_1} \cdot u_{i_1+1} \cdot u_{i_2-1} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \quad \text{car } i_1 + 1 = i_2 \\ &= u_{i_1+1} \cdot u_{i_1-1} \dots u_{j_1} \cdot u_{i_2-1} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= u_{i_1-1} \dots u_{j_1} \cdot u_{i_1+1} \cdot u_{i_2-1} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= u_{i_1-1} \dots u_{j_1} \cdot u_{i_2} \dots u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \end{aligned}$$

Nous avons pour le moment montré tous les cas particuliers annoncés. Pour le reste de la démonstration, on suppose que  $k = i_a + 1 = i_{a+1}$ , que  $i_a > j_a$  et  $1 < a < l$ , ce qui nous permet d'écrire par le troisième cas de la proposition **\*.37** :

$$\begin{aligned} u_k \cdot W &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_{i_a+1} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \\ &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_{i_a+1} \dots u_{j_a} \cdot u_{i_{a+1}} \cdot u_{i_{a+1}-1} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_{i_a-1} \dots u_{j_a} \cdot u_{i_{a+1}} \cdot u_{i_{a+1}-1} \dots u_{j_{a+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_l} \dots u_{j_l} \\ &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_{k-2} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \end{aligned}$$

Si  $k - 2 > i_{a-1}$ , alors l'écriture précédente vérifie les conditions d'une forme normale, ce qui montre le deuxième cas pour  $b = a - 1$ . Maintenant si  $j_{a-1} + 1 \geq k - 2$ , comme  $k > i_a > j_a > j_{a-1}$  on en déduit que  $k - 2 = j_{a-1} + 1$ . On peut alors supposer que  $i_{a-1} > j_{a-1}$ , sinon nous revenons au premier cas. Avec ces hypothèses, on obtient :

$$\begin{aligned} u_k \cdot W &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_{k-2} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \\ &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}} \cdot u_{k-2} \cdot u_{k-3} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \\ &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-2}} \dots u_{j_{a-2}} \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_{a-1}+1} \cdot u_{k-3} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \\ &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-2}} \dots u_{j_{a-2}} \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \end{aligned}$$

qui est l'écriture annoncée pour le troisième cas avec  $b = a - 1$ . Supposons dorénavant que  $b < a - 1$ , et remarquons par rapport à l'énoncé de cette proposition que l'existence de  $b$  est assurée par le cas  $b = a - 1$ , et son unicité l'est car  $b$  est minimal. De par l'hypothèse sur  $b$ , on a par la proposition **\*.41** que :

$$u_k \cdot W = u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_b} \dots u_{j_b} \cdot u_{k-2(a-b)} \dots u_{j_{b+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_a} \cdot W_1$$

Si  $i_b < k - 2(a - b)$  alors l'écriture précédente est sous forme normale, ce qui montre le deuxième cas. Dans le cas contraire et comme  $b$  est minimal, nous avons  $j_b + 1 \geq k - 2(a - b)$ . Par hypothèse sur  $b$ , on a  $j_{b+1} + 1 < k - 2(a - b - 1)$ , et comme  $j_{b+1} > j_b$  on en déduit que  $j_b + 1 = k - 2(a - b)$ . On suppose alors que  $j_b < i_b$ , sinon on revient au cas  $i_b < k - 2(a - b)$ . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} u_k \cdot W &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_b} \dots u_{j_b} \cdot u_{k-2(a-b)} \dots u_{j_{b+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \\ &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_b} \dots u_{j_b} \cdot u_{j_b+1} \dots u_{j_{b+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \\ &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_b} \dots u_{j_b} \cdot u_{j_b+1} \cdot u_{j_b} \dots u_{j_{b+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \\ &= u_{i_1} \dots u_{j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_{b-1}} \dots u_{j_{b-1}} \cdot u_{i_b} \dots u_{j_{b+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{a-1}} \dots u_{j_a} \cdot W_1 \end{aligned}$$

ce qui montre le troisième cas. Concernant le premier cas, cela relève de la proposition **\*.41**. □

---

## Table des figures

---

1	Diagrammes du nœud trivial . . . . .	1
2	Nœud 9-trivial . . . . .	6
3	Différentes clôtures . . . . .	8
4	Monoïde diagrammatique plongé . . . . .	10
1.1	Diagrammes d'entrelacs . . . . .	19
1.2	Mouvements de REIDEMEISTER . . . . .	21
1.3	Déformation d'un diagramme . . . . .	22
1.4	Nœud réversible . . . . .	24
1.5	Signe des croisements . . . . .	25
1.6	Nœud achiral . . . . .	26
1.7	Réduction de diagramme . . . . .	27
1.8	Flype . . . . .	29
1.9	Nœud achiral avec 15 croisements . . . . .	30
1.10	Paire de PERKO . . . . .	31
1.11	Nœud sauvage . . . . .	32
1.12	Nœud torique . . . . .	32
1.13	Recollement d'entrelacs . . . . .	34
1.14	Nœuds mutants . . . . .	36
1.15	Nœud satellite . . . . .	37
2.1	Tricolorabilité et mouvements de REIDEMEISTER . . . . .	44
2.2	Tricolorabilité . . . . .	45
2.3	Surface de SEIFERT . . . . .	46
2.4	Relation entre croisements et régions . . . . .	47
2.5	Annotation du nœud de trèfle . . . . .	48
2.6	Relation d'écheveau . . . . .	49
2.7	Nœuds ayant les mêmes polynômes . . . . .	52
2.8	Notation DOWKER-THISTLETHWAITE . . . . .	58
2.9	Diagrammes à partir d'une notation DT . . . . .	59
2.10	Opérations et enchevêtrements algébriques élémentaires . . . . .	60
2.11	Enchevêtrements . . . . .	61
3.1	Nœud 9-trivial . . . . .	74
3.2	Substitution dans un modèle . . . . .	76

4.1	Clôture de type $W$ . . . . .	93
4.2	Clôture partielle de type $W$ . . . . .	96
5.1	Orientation canonique d'un diagramme de KAUFFMAN . . . . .	123
5.2	Projection du monoïde diagrammatique . . . . .	129
5.3	Exemple du produit ping-pong . . . . .	132
5.4	Applications $\mathcal{I}_n$ , $\mathcal{R}_n$ et $\mathcal{S}_n$ . . . . .	148
A.1	Tresse Géométrique . . . . .	154
A.2	D'une tresse géométrique à un diagramme . . . . .	156
A.3	Groupe de tresses . . . . .	159
A.4	Monoïde diagrammatique . . . . .	161
A.5	Torsades . . . . .	165
A.6	Mouvements de reconfiguration . . . . .	166
A.7	Algèbre de TEMPERLEY-LIEB . . . . .	167

---

## Liste des définitions

---

I.1	Nœud . . . . .	16
I.2	Isotopie ambiante . . . . .	16
I.4	Entrelacs . . . . .	16
I.6	Composante liée . . . . .	17
I.7	Nœud trivial . . . . .	17
I.8	Entrelacs trivial . . . . .	17
I.9	Diagramme d'entrelacs . . . . .	18
I.10	Croisement . . . . .	18
I.12	Arc . . . . .	18
I.13	Pont . . . . .	18
I.14	Région . . . . .	19
I.16	1 <sup>er</sup> mouvement de REIDEMEISTER . . . . .	20
I.17	2 <sup>e</sup> mouvement de REIDEMEISTER . . . . .	20
I.18	3 <sup>e</sup> mouvement de REIDEMEISTER . . . . .	20
I.21	Entrelacs orienté . . . . .	23
I.23	Entrelacs réversible . . . . .	23
I.24	Signe d'un croisement . . . . .	24
I.26	Entortillement . . . . .	24
I.27	Entrelacs achiral . . . . .	25
I.30	Entrelacs alternant . . . . .	26
I.32	Nombre minimal de croisements . . . . .	27
I.33	Diagramme réduit . . . . .	27
I.36	Flype . . . . .	29
I.40	Entrelacs apprivoisé . . . . .	30
I.41	Entrelacs torique . . . . .	31
I.42	Entrelacs hyperbolique . . . . .	31
I.44	Entrelacs quasi alternant . . . . .	31
I.46	Recollement d'entrelacs . . . . .	33
I.48	Entrelacs premier . . . . .	35
I.49	Entrelacs mutant . . . . .	35
I.51	Entrelacs satellite . . . . .	36
I.53	Invariant de nœud . . . . .	42
I.54	Invariant de diagramme . . . . .	42
I.57	Invariant de nœud complet . . . . .	43

I.58	Détection de la trivialité . . . . .	43
I.60	Entrelacs tricoloriable . . . . .	44
I.61	Polynôme d'ALEXANDER . . . . .	47
I.64	Relation d'écheveau . . . . .	49
I.66	Polynôme de CONWAY . . . . .	50
I.71	Crochet de KAUFFMAN . . . . .	52
I.72	État du crochet de KAUFFMAN . . . . .	53
I.75	Isotopie régulière . . . . .	53
I.77	Crochet de KAUFFMAN normalisé . . . . .	54
I.79	Polynôme de JONES . . . . .	54
I.92	Polynôme HOMFLY . . . . .	56
I.96	Notation DOWKER-THISTLETHWAITE . . . . .	58
I.97	Notation DT standard . . . . .	58
I.99	Enchevêtrement . . . . .	59
I.100	Enchevêtrement algébrique . . . . .	60
I.102	Clôture d'un enchevêtrement . . . . .	61
I.103	Clôture d'une tresse . . . . .	62
II.1	Polynôme de JONES modulaire . . . . .	68
II.2	Nœud $m$ -trivial . . . . .	68
II.6	Crochet de KAUFFMAN modulaire . . . . .	69
II.21	Substitution dans un modèle . . . . .	75
II.23	2-enchevêtrement croisé . . . . .	75
II.24	Substitution uniforme dans un modèle . . . . .	75
II.30	État du crochet de KAUFFMAN d'une substitution . . . . .	78
II.40	Moduloïde diagrammatique de KAUFFMAN . . . . .	88
II.42	Crochet de KAUFFMAN non clos . . . . .	89
II.45	États du crochet de KAUFFMAN non clos . . . . .	90
II.48	Polynôme de choix . . . . .	91
II.53	Clôture de type $W$ . . . . .	93
II.57	Projections entre monoïdes diagrammatiques de KAUFFMAN . . . . .	95
II.59	Clôture partielle de type $W$ . . . . .	96
II.69	Matrices diagrammatiques . . . . .	100
II.74	Matrices diagrammatiques – Extension . . . . .	102
II.82	Clôture de type $W$ – Matrice diagrammatique . . . . .	106
II.85	Clôture partielle de type $W$ – Matrice diagrammatique . . . . .	107
II.95	Bloc de croisements . . . . .	114
II.96	Signe d'un bloc de croisement . . . . .	114
II.101	$\mathcal{B}$ -somme . . . . .	116
II.106	Orientation canonique des éléments diagrammatiques . . . . .	122
II.120	Projection canonique diagrammatique . . . . .	129
II.126	Produit ping-pong . . . . .	131
*.1	Brin de tresse . . . . .	154
*.2	Tresse géométrique . . . . .	154
*.3	Tresse . . . . .	154
*.5	Tresse triviale . . . . .	155
*.6	Diagramme de tresse . . . . .	155

---

*.7	Produit de tresses . . . . .	156
*.9	Groupe de tresses . . . . .	157
*.10	Générateurs des groupes de tresses . . . . .	157
*.12	Mot de tresse . . . . .	158
*.14	Projection canonique dans les permutations . . . . .	158
*.15	Demi-tours . . . . .	158
*.16	Monoïde diagrammatique de KAUFFMAN . . . . .	160
*.18	Diagramme de KAUFFMAN réduit . . . . .	160
*.23	Monoïde diagrammatique tressé de KAUFFMAN . . . . .	164
*.25	Algèbre de TEMPERLEY-LIEB . . . . .	166
*.26	Appariement . . . . .	169
*.27	Appariement standard . . . . .	170
*.29	Clôture standard d'un enchevêtrement . . . . .	170
*.30	Ensemble d'enchevêtrements appariés homogène . . . . .	170
*.31	Paramètre pondéré . . . . .	171



---

## Liste des théorèmes

---

I.19	Borne du nombre de mouvements de REIDEMEISTER . . . . .	21
I.20	Borne du nombre de mouvements de REIDEMEISTER pour le nœud trivial . . . . .	21
I.34	1 <sup>re</sup> conjecture de TAIT . . . . .	28
I.35	2 <sup>e</sup> conjecture de TAIT . . . . .	28
I.37	3 <sup>e</sup> conjecture de TAIT (Conjecture des flypes) . . . . .	29
I.43	Distinction des entrelacs hyperboliques, satellites et toriques . . . . .	31
I.69	Détermination de l'ensemble des polynômes d'ALEXANDER . . . . .	51
I.70	Incomplétude des polynômes de nœud . . . . .	51
I.78	Invariance du crochet de KAUFFMAN normalisé . . . . .	54
I.83	Détection de la chiralité par le polynôme de JONES . . . . .	55
I.86	Non détection des entrelacs triviaux par le polynôme de JONES . . . . .	55
I.88	Forme du polynôme de JONES . . . . .	55
I.89	Évaluation en l'unité du polynôme de JONES . . . . .	56
I.90	Écriture du polynôme de JONES d'un nœud . . . . .	56
I.91	Comportement du polynôme de JONES avec le recollement . . . . .	56
I.104	Lien entre entrelacs et tresses . . . . .	62
I.105	Équivalence des tresses après clôture . . . . .	62
II.13	Forme du polynôme de JONES d'un entrelacs alternant . . . . .	71
II.14	Construction de nœuds $2^r$ -triviaux . . . . .	71
II.16	Construction de nœuds $m^r$ -triviaux . . . . .	73
II.32	Construction de nœuds $m$ -triviaux par substitution dans un modèle . . . . .	79
II.56	Clôture du crochet de KAUFFMAN non clos . . . . .	94
II.65	Vision morphique du crochet de KAUFFMAN non clos . . . . .	98
II.73	Représentation matricielle de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB . . . . .	101
II.91	Forme générale du polynôme de JONES . . . . .	112
II.133	Représentation du monoïde diagrammatique avec les permutations . . . . .	135
II.145	Écart entre les degrés extrémaux du polynôme de JONES . . . . .	143
*.11	Présentation des groupes de tresses . . . . .	157
*.20	Forme normale de JONES . . . . .	162
*.24	Relations du monoïde diagrammatique tressé de KAUFFMAN . . . . .	164



---

## Liste des pseudo-codes

---

1	Génération aléatoire de tresses (Voir II.33) . . . . .	81
2	Recherche de nœuds $m$ -triviaux via les mots de tresses (Voir II.37) . . . . .	84
3	Calcul du polynôme de JONES- avec les matrices (Voir II.83) . . . . .	107
4	Suivi d'un brin (Voir II.108) . . . . .	124
5	Nombre de composantes d'un élément diagrammatique (Voir II.118) . . . . .	128
6	Toutes les composantes d'un élément diagrammatique clos (Voir II.125) . . . . .	131
7	Toutes les composantes d'un élément diagrammatique clos optimisé (Voir II.140) . . . . .	140
8	Calcul du polynôme de JONES- avec les permutations (Voir II.141) . . . . .	141



Les pages référencées en gras indiquent le ou les pages où le terme correspondant est (re)défini.

**A**  
algèbre de TEMPERLEY-LIEB, 89, 97–101, **166**  
appariement, 94–95, **169**, 169–170  
    homogène, 88, **170**  
    standard, 88, **170**

**B**  
 $\mathcal{B}$ -somme, **116**, 115–119  
bloc  
    croisement, **114**, 114–119  
    normal, 125, 162, 173–174  
    signe, *voir* signe (*bloc*)

**C**  
clôture, 93–97, 121–130  
    de type  $W$ , **93**, 105–106  
    enchevêtrement, **61**, 94, **170**  
    matrice diagrammatique, **104**  
    partielle de type  $W$ , **96**, 107–109  
    tresse, **62**  
composante, 82  
    liée, 17, 71  
    nombre, 75, 121–130, 140, 142  
conjecture de TAIT, 26–30  
    1<sup>re</sup>, **28**  
    2<sup>e</sup>, **28**  
    3<sup>e</sup>, **29**  
crochet de KAUFFMAN, **52**, 94  
    modulaire, **69**  
    non clos, 78, **89**, 88–91, 94, 97–99, 114–116  
    normalisé, **54**, 111  
    état, **53**, **78**, **90**  
croisement, **18**, 47, 49

bloc, *voir* bloc (*croisement*)  
nombre minimal, 27, 29, 70  
signe, *voir* signe (*croisement*)

**D**  
diagramme  
    entrelacs, **18**, 17–19  
    invariant, *voir* invariant (*diagramme*)  
    nœud, *voir* diagramme (*entrelacs*)  
    pont, **18**, 46  
    réduit, **28**, 28–29, 71  
    région, **19**, 47  
    tresse, **155**  
diagramme de KAUFFMAN  
    orientation canonique, 122  
    réduit, 123, 127, **160**, 163  
détection  
    de boucle, 123, 130  
    de la trivialité, **43**, 46, 55, 67, 69–70, 92

**E**  
enchevêtrement, **59**, 59–61, 94  
    algébrique, **60**  
    clôture, *voir* clôture (*enchevêtrement*)  
    croisé, 75, 79  
entortillement, **24**, 28, 29, 77  
entrelacs, **16**, 62  
    achiral, **25**, 28, 29, 55  
    alternant, **26**, 26–31, 42, 71  
    chiral, **25**, 55, 57  
    diagramme, *voir* diagramme (*entrelacs*)  
    invariant, *voir* invariant (*entrelacs*)  
    mutant, **35**












- orienté, **23**, 33, 62  
premier, **35**, 68, 71, 73, 77  
recollement, *voir* recollement d'entrelacs  
réversible, **23**, 84  
satellite, 31, **36**  
tricoloriable, *voir* invariant (*tricolorabilité*)  
trivial, **17**
- F**
- forme normale de JONES, 126, **162**, 162–163,  
173–178
- G**
- groupe  
permutation, 128–142  
tresse, 97–99, **157**, 156–158
- générateur  
monoïde diagrammatique, **160**  
tresse, **157**
- I**
- invariant, 42–46  
complet, **43**, 51, 54  
diagramme, **42**  
entrelacs, **42**  
nœud, *voir* invariant (*entrelacs*)  
polynomial, 46–57  
tricolorabilité, 44–45
- isotopie  
ambiante, **16**, 54, 62, 155, 163, 164  
régulière, **53**, 89, 92
- M**
- matrice diagrammatique, **100**, **102**, 100–114  
clôture, *voir* clôture (*matrice diagrammatique*)  
à droite, **100**, **102**, 104  
moduloïde diagrammatique, **88**, 88–97  
monoïde diagrammatique, 95, 97, 122, 129, **160**,  
158–164, 173–178  
générateur, *voir* générateur (*monoïde diagrammatique*)  
projection, *voir* projection (*monoïde diagrammatique*)  
tressé, 99, 109, **164**, 164–165
- mouvement de REIDEMEISTER, 20–23, 44  
1<sup>er</sup>, **20**  
2<sup>e</sup>, **20**  
3<sup>e</sup>, **20**
- N**
- nœud, **16**
- m*-trivial, **68**, 69–85  
premier, *voir* entrelacs (*premier*)  
recollement, *voir* recollement d'entrelacs  
trivial, **17**, 23, 46, 69–70
- notation DOWKER-THISTLETHWAITE, **58**, 57–59  
standard, **58**
- P**
- polynôme  
ALEXANDER, **47**, 47–51, 68  
CONWAY, **50**  
de choix, **91**, 91–92, 103  
HOMFLY, **57**, 56–57
- polynôme de JONES, **54**, 51–56, 146  
calcul, 99, 106, 140  
degré, 71, 143–145  
forme, 55–56, 112  
modulaire, **68**, 67–85
- produit  
ping-pong, **131**, 131–142  
tresse, **157**
- projection  
décalée, **95**, 97  
monoïde diagrammatique, **129**, 128–130,  
135–139  
tresse, **158**
- R**
- recollement d'entrelacs, **33**, 33–35, 56, 57, 72–75  
relation d'écheveau, **49**, 49–51, 54
- S**
- signe  
bloc, **114**  
croisement, **24**
- somme connexe, *voir* recollement d'entrelacs  
substitution, **75**, 75–80  
uniforme, **75**, 79
- suivi de ligne, **123**, 122–130
- T**
- tresse, 62, 143, **155**, 153–158  
clôture, *voir* clôture (*tresse*)  
diagramme, *voir* diagramme (*tresse*)  
groupe, *voir* groupe (*tresse*)  
générateur, *voir* générateur (*tresse*)  
géométrique, **154**  
mot, 62, 80–85, 144–147, **158**  
produit, *voir* produit (*tresse*)  
projection, *voir* projection (*tresse*)  
triviale, **155**












---












## Bibliographie












---












- [Ada04]  Colin Conrad ADAMS. *The knot book : an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. American Mathematical Society, 2004. 306 p.  
ISBN : 978-0-8218-3678-1  
(Cf. p. 31).
- [Ada+92]  Colin Conrad ADAMS, Jeffrey F. BROCK, John BUGBEE, Timothy D. COMAR, Keith A. FAIGIN, Amy M. HUSTON, Anne M. JOSEPH et David PESIKOFF. « Almost alternating links ». Dans : *Topology and its Applications* 46.2, p. 151-165.  
DOI : 10.1016/0166-8641(92)90130-R  
(Cf. p. 31).
- [Ale23]  James Waddell ALEXANDER. « A lemma on systems of knotted curves ». Dans : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 9.3, p. 93-95.  
DOI : 10.1073/pnas.9.3.93  
(Cf. p. 4, 51, 62).
- [Ale28]  James Waddell ALEXANDER. « Topological invariants of knots and links ». Dans : *Transactions of the American Mathematical Society* 30.2, p. 275-306.  
DOI : 10.1090/S0002-9947-1928-1501429-1  
(Cf. p. 2, 47, 50).
- [AB27]  James Waddell ALEXANDER et Garland Baird BRIGGS. « On types of knotted curves ». Dans : *The Annals of Mathematics* 28.1, p. 562-586.  
DOI : 10.2307/1968399  
(Cf. p. 2, 20).
- [APR89]  Richard Paul ANSTEE, Józef Henryk PRZYTYCKI et Dale ROLFSEN. « Knot polynomials and generalized mutation ». Dans : *Topology and its Applications* 32.3, p. 237-249.  
DOI : 10.1016/0166-8641(89)90031-X  
(Cf. p. 3).
- [Art25]  Emil ARTIN. « Theorie der Zöpfe ». Dans : *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 4.1, p. 47-72.  
DOI : 10.1007/BF02950718  
(Cf. p. 4).
- [Art47]  Emil ARTIN. « Theory of Braids ». Dans : *The Annals of Mathematics* 48.1, p. 101-126.  
DOI : 10.2307/1969218  
(Cf. p. 158).












- [Big00]  Stephen BIGELOW. « Braid groups are linear ». Dans : *Journal of the American Mathematical Society* 14.2, p. 471-486.  
DOI : 10.1090/S0894-0347-00-00361-1  
(Cf. p. 10, 113).
- [Big02]  Stephen BIGELOW. « Does the Jones polynomial detect the unknot? » Dans : *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 11.4, p. 493-505.  
DOI : 10.1142/S0218216502001779  
(Cf. p. 4, 67).
- [BKL98]  Joan BIRMAN, Ki Hyoung KO et Sang Jin LEE. « A New Approach to the Word and Conjugacy Problems in the Braid Groups ». Dans : *Advances in Mathematics* 139.2, p. 322-353.  
DOI : 10.1006/aima.1998.1761  
(Cf. p. 158).
- [Bur35]  Werner BURAU. « Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen ». Dans : *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 11.1, p. 179-186.  
DOI : 10.1007/BF02940722  
(Cf. p. 4).
- [Con70]  John Horton CONWAY. « An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties ». Dans : *Computational problems in abstract algebra*, p. 329-358. Pergamon Press, 1970, p. 329-358.  
ISBN : 978-0-08-012975-4, DOI : 10.1016/B978-0-08-012975-4.50034-5  
(Cf. p. 2, 49, 59).
- [CL14]  Alexander COWARD et Marc LACKENBY. « An upper bound on Reidemeister moves ». Dans : *American Journal of Mathematics* 136.4, p. 1023-1066.  
DOI : 10.1353/ajm.2014.0027  
(Cf. p. 21).
- [DH97]  Oliver T. DASBACH et Stefan HOUGARDY. « Does the Jones polynomial detect unknottedness? » Dans : *Experimental Mathematics* 6.1, p. 51-56.  
DOI : 10.1080/10586458.1997.10504350  
(Cf. p. 3).
- [Deh10]  Max DEHN. « Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes ». Dans : *Mathematische Annalen* 69.1, p. 137-168.  
DOI : 10.1007/BF01455155  
(Cf. p. 2).
- [Deh14]  Max DEHN. « Die beiden Kleeblattschlingen ». Dans : *Mathematische Annalen* 75.3, p. 402-413.  
DOI : 10.1007/BF01563732  
(Cf. p. 2).
- [DH91]  Helmut DOLL et Jim HOSTE. « A tabulation of oriented links ». Dans : *Mathematics of Computation* 57.196, p. 747-761.  
DOI : 10.1090/S0025-5718-1991-1094946-4  
(Cf. p. 59).
- [DT83]  Clifford Hugh DOWKER et Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « Classification of knot projections ». Dans : *Topology and its Applications* 16.1, p. 19-31.  
DOI : 10.1016/0166-8641(83)90004-4  
(Cf. p. 57).






- [EF17]  Shalom ELIAHOU et Jean FROMENTIN. « A remarkable 20-crossing tangle ». Dans : *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 26.14, p. 1750091.  
DOI : 10.1142/S0218216517500912  
(Cf. p. 3, 5, 7, 70-71, 80).
- [EKT03]  Shalom ELIAHOU, Louis Hirsch KAUFFMAN et Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « Infinite families of links with trivial Jones polynomial ». Dans : *Topology* 42.1, p. 155-169.  
DOI : 10.1016/S0040-9383(02)00012-5  
(Cf. p. 3, 55, 61, 67, 92).
- [Eul58]  Leonhard EULER. « Elementa doctrinae solidorum ». Dans : *Novi commentarii academiae scientiarum petropolitanae* 4, p. 109-140.  
URL : <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/230/>  
(Cf. p. 19).
- [Eve17]  Chaim EVEN-ZOHAR. « Models of random knots ». Dans : *Journal of Applied and Computational Topology* 1.2, p. 263-296.  
DOI : 10.1007/s41468-017-0007-8  
(Cf. p. 81).
- [Fár49]  István FÁRY. « Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud ». Dans : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 77, p. 128-138.  
DOI : 10.24033/bsmf.1405  
(Cf. p. 46).
- [Fie91]  Thomas FIEDLER. « On the degree of the Jones polynomial ». Dans : *Topology* 30.1, p. 1-8.  
DOI : 10.1016/0040-9383(91)90030-8  
(Cf. p. 3, 143-144).
- [Fre+85]  Peter FREYD, David YETTER, Jim HOSTE, William Bernard Raymond LICKORISH, Kenneth MILLETT et Adrian OCNEANU. « A new polynomial invariant of knots and links ». Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 12.2, p. 239-246.  
DOI : 10.1090/S0273-0979-1985-15361-3  
(Cf. p. 2, 47, 56-57).
- [Fro21]  Jean FROMENTIN. « Experiments on growth series of braid groups ». Dans : *Journal of Algebra*, S002186932100288X. En presse.  
DOI : 10.1016/j.jalgebra.2021.04.040  
(Cf. p. 5, 147).
- [Gar69]  Frank A. GARSIDE. « The braid group and other groups ». Dans : *The Quarterly Journal of Mathematics* 20.1, p. 235-254.  
DOI : 10.1093/qmath/20.1.235  
(Cf. p. 4).
- [Gau67]  Carl Friedrich GAUSS. *Mathematische Physik*. T. 5. Carl Friedrich Gauss Werke. 1867. 642 p.  
URL : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99405t>  
(Cf. p. xxi).
- [GG13]  Volker GEBHARDT et Juan GONZÁLEZ-MENESES. « Generating random braids ». Dans : *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 120.1, p. 111-128.  
DOI : 10.1016/j.jcta.2012.07.003  
(Cf. p. 81).

- [GL89]  Cameron McAllan GORDON et John Edwin LUECKE. « Knots are determined by their complements ». Dans : *Journal of the American Mathematical Society* 2.2, p. 371-415.  
DOI : 10.1090/S0894-0347-1989-0965210-7  
(Cf. p. 43).
- [Gre17]  Joshua Evan GREENE. « Alternating links and definite surfaces ». Dans : *Duke Mathematical Journal* 166.11, p. 2133-2151.  
DOI : 10.1215/00127094-2017-0004  
(Cf. p. 28-29).
- [Hak61]  Wolfgang HAKEN. « Theorie der Normalflächen : Ein Isotopiekriterium für den Kreisknoten ». Dans : *Acta Mathematica* 105.3, p. 245-375.  
DOI : 10.1007/BF02559591  
(Cf. p. 2).
- [HTW98]  Jim HOSTE, Morwen Bernard THISTLETHWAITE et Jeff WEEKS. « The first 1,701,936 knots ». Dans : *The Mathematical Intelligencer* 20.4, p. 33-48.  
DOI : 10.1007/BF03025227  
(Cf. p. 2, 5, 25, 29).
- [Ito15]  Tetsuya ITO. « A kernel of a braid group representation yields a knot with trivial knot polynomials ». Dans : *Mathematische Zeitschrift* 280.1, p. 347-353.  
DOI : 10.1007/s00209-015-1426-7  
(Cf. p. 4).
- [Jon83]  Vaughan Frederick Randal JONES. « Index for subfactors ». Dans : *Inventiones Mathematicae* 72.1, p. 1-25.  
DOI : 10.1007/BF01389127  
(Cf. p. 160, 162, 164).
- [Jon85]  Vaughan Frederick Randal JONES. « A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras ». Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 12.1, p. 103-112.  
DOI : 10.1090/S0273-0979-1985-15304-2  
(Cf. p. 2, 6, 10, 47, 51, 54-56, 112).
- [Kan86]  Taizo KANENOBU. « Infinitely many knots with the same polynomial invariant ». Dans : *Proceedings of the American Mathematical Society* 97.1, p. 158-162.  
DOI : 10.1090/S0002-9939-1986-0831406-7  
(Cf. p. 2, 51-52).
- [Kau87]  Louis Hirsch KAUFFMAN. « State models and the Jones polynomial ». Dans : *Topology* 26.3, p. 395-407.  
DOI : 10.1016/0040-9383(87)90009-7  
(Cf. p. 2, 8, 28, 47, 52-54, 143, 158).
- [Kau90]  Louis Hirsch KAUFFMAN. « An invariant of regular isotopy ». Dans : *Transactions of the American Mathematical Society* 318.2, p. 417-471.  
DOI : 10.1090/S0002-9947-1990-0958895-7  
(Cf. p. 4, 9, 47, 89, 99, 158, 160, 164-165).
- [Kaw75]  Akio KAWAUCHI. « Three dimensional homology handles and circles ». Dans : *Osaka Journal of Mathematics* 12.3, p. 565-581.  
DOI : 10.18910/4330  
(Cf. p. 51).

- [Kho00]  Mikhail KHOVANOV. « A categorification of the Jones polynomial ». Dans : *Duke Mathematical Journal* 101.3, p. 359-426.  
DOI : 10.1215/S0012-7094-00-10131-7  
(Cf. p. 46, 55).
- [Kir84]  Thomas Penyngton KIRKMAN. « The enumeration, description, and construction of knots of fewer than ten crossings ». Dans : *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 32.2, p. 281-309.  
DOI : 10.1017/S0080456800026788  
(Cf. p. xxi, 2).
- [Kra02]  Daan KRAMMER. « Braid Groups are Linear ». Dans : *The Annals of Mathematics* 155.1, p. 131-156.  
DOI : 10.2307/3062152  
(Cf. p. 10, 113).
- [KM11]  Peter Benedict KRONHEIMER et Tomasz Stanislaw MROWKA. « Khovanov homology is an unknot-detector ». Dans : *Publications mathématiques de l'IHÉS* 113.1, p. 97-208.  
DOI : 10.1007/s10240-010-0030-y  
(Cf. p. 46, 55).
- [Lac15]  Marc LACKENBY. « A polynomial upper bound on Reidemeister moves ». Dans : *Annals of Mathematics* 182.2, p. 491-564.  
DOI : 10.4007/annals.2015.182.2.3  
(Cf. p. 23).
- [Lit85]  Charles Newton LITTLE. « On knots, with a census for order ten ». Dans : *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences* 7, p. 27-43.  
URL : <https://www.biodiversitylibrary.org/item/48105#page/66/mode/2up>  
(Cf. p. xxi, 2).
- [LCM04]  Charles LIVINGSTON, Jae Choon CHA et Allison MOORE. *KnotInfo*. 2004.  
URL : <https://knotinfo.math.indiana.edu/>  
(Cf. p. 5-6, 74, 84-85).
- [Mar36]  Andrei Andreevich MARKOFF. « Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe ». Dans : *Matematicheskii Sbornik : Recueil Mathématique* 1(43).1, p. 73-78.  
URL : [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5359&option\\_lang=eng](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5359&option_lang=eng)  
(Cf. p. 4, 51, 62).
- [MT93]  William MENASCO et Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « The classification of alternating links ». Dans : *The Annals of Mathematics* 138.1, p. 113-171.  
DOI : 10.2307/2946636  
(Cf. p. 29).
- [Mil50]  John Willard MILNOR. « On the total curvature of knots ». Dans : *The Annals of Mathematics* 52.2, p. 248-257.  
DOI : 10.2307/1969467  
(Cf. p. 46).
- [MT90]  Hugh R. MORTON et Paweł TRACZYK. « The Jones polynomial of satellite links around mutants ». Dans : *Advanced Series in Mathematical Physics*. T. 11, p. 625-630. World Scientific, 1990, p. 625-630.  
ISBN : 978-981-279-832-9, DOI : 10.1142/9789812798329\_0032  
(Cf. p. 2, 55).

- [Mur87]  Kunio MURASUGI. « Jones polynomials and classical conjectures in knot theory ». Dans : *Topology* 26.2, p. 187-194.  
DOI : 10.1016/0040-9383(87)90058-9  
(Cf. p. 28-29).
- [Och90]  Mitsuyuki OCHIAI. « Non-trivial projections of the trivial knot ». Dans : *Algorithmique, topologie et géométrie algébriques*. T. 192. Astérisque, p. 7-10. 1990, p. 7-10.  
URL : [http://www.numdam.org/item/AST\\_1990\\_\\_192\\_\\_7\\_0/](http://www.numdam.org/item/AST_1990__192__7_0/)  
(Cf. p. 1).
- [Pag20]  Guillaume PAGEL. « On the modular Jones polynomial ». Dans : *Comptes Rendus : Mathématique* 358.8, p. 901-908.  
DOI : 10.5802/crmath.106  
(Cf. p. 6, 73-74).
- [Per74]  Kenneth A. PERKO. « On the classification of knots ». Dans : *Proceedings of the American Mathematical Society* 45.2, p. 262-266.  
DOI : 10.1090/S0002-9939-1974-0353294-X  
(Cf. p. 2, 30).
- [Poi95]  Henri POINCARÉ. « Analysis Situs ». Dans : *Journal de l'École Polytechnique* 2.1, p. 1-123.  
URL : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4337198>  
(Cf. p. 2).
- [PT87]  Józef Henryk PRZYTYCKI et Paweł TRACZYK. « Invariants of links of Conway type ». Dans : *Kobe Journal of Mathematics* 4.2, p. 115-139.  
arXiv : 1610.06679.  
URL : <http://www.math.kobe-u.ac.jp/jmsj/kjm/>  
(Cf. p. 56).
- [Rei27]  Kurt REIDEMEISTER. « Elementare Begründung der Knotentheorie ». Dans : *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 5.1, p. 24-32.  
DOI : 10.1007/BF02952507  
(Cf. p. 2, 20).
- [Rol03]  Dale ROLFSEN. « Appendix C : Table of knots and links ». Dans : *Knots and links*, p. 388-429. AMS Chelsea Publishing, 2003, p. 388-429.  
ISBN : 978-0-8218-3436-7  
(Cf. p. 2, 31, 71).
- [Sch49]  Horst SCHUBERT. « Kapitel III : Die Zerlegung eines Knotens in Primknoten ». Dans : *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten*, p. 29-50. Springer Berlin Heidelberg, 1949, p. 29-50.  
ISBN : 978-3-540-01419-5, DOI : 10.1007/978-3-642-45813-2  
(Cf. p. 35).
- [Sch53]  Horst SCHUBERT. « Knoten und Vollringe ». Dans : *Acta Mathematica* 90, p. 131-286.  
DOI : 10.1007/BF02392437  
(Cf. p. 36).
- [Sch54]  Horst SCHUBERT. « Über eine numerische Knoteninvariante ». Dans : *Mathematische Zeitschrift* 61.1, p. 245-288.  
DOI : 10.1007/BF01181346  
(Cf. p. 46).

- [Sei35]  Herbert SEIFERT. « Über das Geschlecht von Knoten ». Dans : *Mathematische Annalen* 110.1, p. 571-592.  
DOI : 10.1007/BF01448044  
(Cf. p. 46).
- [Ste+19]  William STEIN et al. *SageMath*. Version 8.6. 2019.  
URL : <https://www.sagemath.org/>  
(Cf. p. 84).
- [Sto07]  Alexander STOIMENOW. « Non-triviality of the Jones polynomial and the crossing numbers of amphicheiral knots ».  
arXiv : math/0606255  
(Cf. p. 29).
- [Sto08]  Alexander STOIMENOW. « Tait's conjectures and odd crossing number amphicheiral knots ». Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 45.2, p. 285-291.  
DOI : 10.1090/S0273-0979-08-01196-8  
(Cf. p. 29).
- [Tai98]  Peter Guthrie TAIT. « On knots Part I, II, III ». Dans : *Scientific papers*. T. I, p. 275-347. Cambridge : Cambridge University Press, 1898, p. 275-347.  
URL : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99438s>  
(Cf. p. xxi, 2, 26, 28-29, 57).
- [TL71]  Harold Neville Vazeille TEMPERLEY et Elliott Hershel LIEB. « Relations between the 'percolation' and 'colouring' problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices : some exact results for the 'percolation' problem ». Dans : *Proceedings of the Royal Society of London A* 322.1549, p. 251-280.  
DOI : 10.1098/rspa.1971.0067  
(Cf. p. 4, 51, 166).
- [Thi87]  Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « A spanning tree expansion of the Jones polynomial ». Dans : *Topology* 26.3, p. 297-309.  
DOI : 10.1016/0040-9383(87)90003-6  
(Cf. p. 28, 71).
- [Thi88]  Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « Kauffman's polynomial and alternating links ». Dans : *Topology* 27.3, p. 311-318.  
DOI : 10.1016/0040-9383(88)90012-2  
(Cf. p. 28).
- [Thi01]  Morwen Bernard THISTLETHWAITE. « Links with trivial Jones polyomial ». Dans : *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 10.4, p. 641-643.  
DOI : 10.1142/S0218216501001050  
(Cf. p. 3).
- [Tho69]  William THOMSON. « On vortex atoms ». Dans : *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 6, p. 94-105.  
DOI : 10.1017/S0370164600045430  
(Cf. p. xxi).
- [Thu82]  William Paul THURSTON. « Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry ». Dans : *Bulletin of the American Mathematical Society* 6.3, p. 357-381.  
DOI : 10.1090/S0273-0979-1982-15003-0  
(Cf. p. 31).

- [TS18]  Robert E. TUZUN et Adam Stanislaw SIKORA. « Verification of the Jones unknot conjecture up to 22 crossings ». Dans : *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 27.3, p. 1840009.  
DOI : 10.1142/S0218216518400096  
(Cf. p. 3).
- [TS21]  Robert E. TUZUN et Adam Stanislaw SIKORA. « Verification of the Jones unknot conjecture up to 24 crossings ». Dans : *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 30.3, p. 2150020.  
DOI : 10.1142/S0218216521500206  
(Cf. p. 3, 70).
- [Van71]  Alexandre-Théophile VANDERMONDE. « Remarques sur les problèmes de situations ». Dans : *Mémoires de l'académie royale des sciences*, p. 566-574. 1771, p. 566-574  
(Cf. p. xxi).
- [Wes95]  Bruce W. WESTBURY. « The representation theory of the Temperley-Lieb algebras ». Dans : *Mathematische Zeitschrift* 219.1, p. 539-565.  
DOI : 10.1007/BF02572380  
(Cf. p. 100, 164).
- [Wol+17]  Stephen WOLFRAM et al. *Wolfram Mathematica*. Version 11.2. 2017.  
URL : <https://www.wolfram.com/mathematica/>  
(Cf. p. 71).

---

## Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>xi</b>
<b>Sommaire</b>	<b>xiii</b>
<b>Acronymes</b>	<b>xv</b>
<b>Symboles</b>	<b>xvii</b>
<b>Résumé</b>	<b>xix</b>
<b>Aparté historique</b>	<b>xxi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Contexte général et théories connexes . . . . .	1
Le polynôme de JONES . . . . .	2
Le polynôme de JONES modulaire . . . . .	3
Liens avec les tresses . . . . .	4
L’algèbre de TEMPERLEY-LIEB et le monoïde diagrammatique de KAUFFMAN . . . . .	4
Résultats de ce travail . . . . .	5
Recherches de solutions et appellation de celles-ci . . . . .	5
Construction de nœuds $m^r$ -triviaux . . . . .	6
Construction par substitution dans un modèle . . . . .	7
Étude du crochet de KAUFFMAN non clos . . . . .	8
Les matrices diagrammatiques . . . . .	9
Projection des éléments diagrammatiques dans les permutations . . . . .	10
Organisation de ce mémoire . . . . .	11
<b>I Généralités sur la théorie des nœuds</b>	<b>13</b>
<b>1 Introduction à la théorie des nœuds</b>	<b>15</b>
1.1 Premières définitions . . . . .	16
1.1.1 Diagrammes de nœuds . . . . .	17
1.1.2 Les mouvements de REIDEMEISTER . . . . .	20
1.2 Propriétés fondamentales . . . . .	23
1.2.1 Orientabilité des nœuds et chiralité . . . . .	23

1.2.2	Nœuds alternants et les conjectures de TAIT . . . . .	26
1.2.3	D'autres propriétés . . . . .	30
1.3	Opérations avec les nœuds . . . . .	32
1.3.1	Recollement de nœuds . . . . .	33
1.3.2	Mutation . . . . .	35
1.3.3	Nœuds satellites . . . . .	36
1.4	Bibliographie de ce chapitre . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Distinguer les nœuds entre eux</b> . . . . .	<b>41</b>
2.1	Invariants de nœud . . . . .	42
2.1.1	Condition d'invariabilité . . . . .	42
2.1.2	Un exemple détaillé : la tricolorabilité . . . . .	44
2.1.3	Autres exemples d'invariants . . . . .	45
2.2	Polynômes de nœud . . . . .	46
2.2.1	Introduction avec le polynôme d'ALEXANDER . . . . .	47
2.2.2	Le polynôme de JONES . . . . .	51
2.2.3	La généralisation par le polynôme HOMFLY . . . . .	56
2.3	Notation des nœuds . . . . .	57
2.3.1	La notation DOWKER-THISTLETHWAITE . . . . .	57
2.3.2	La notation de CONWAY, les enchevêtrements . . . . .	59
2.3.3	La notation sous forme de mots de tresse . . . . .	62
2.4	Bibliographie de ce chapitre . . . . .	62
<b>II</b>	<b>Approche modulaire et étude du polynôme de JONES</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>3</b>	<b>Le polynôme de JONES modulaire</b> . . . . .	<b>67</b>
3.1	Description de la version modulaire du polynôme de JONES . . . . .	68
3.1.1	Premières remarques . . . . .	68
3.1.2	Liens entre la version modulaire et classique . . . . .	69
3.1.3	Origine de la version modulaire . . . . .	70
3.2	Assemblage de nœuds $m$ -triviaux . . . . .	72
3.2.1	Construction de nœuds $m^T$ -triviaux . . . . .	72
3.2.2	Tentative par substitution dans un modèle . . . . .	75
3.2.3	Recherche aléatoire d'exemples . . . . .	80
3.3	Bibliographie de ce chapitre . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Étude du crochet de KAUFFMAN</b> . . . . .	<b>87</b>
4.1	Le crochet de KAUFFMAN non clos et ses différentes clôtures . . . . .	87
4.1.1	Le crochet de KAUFFMAN d'un diagramme non clos . . . . .	88
4.1.2	Les polynômes de choix . . . . .	91
4.1.3	Différentes clôtures . . . . .	93
4.2	Le cas particulier du monoïde diagrammatique tressé . . . . .	97
4.2.1	Vision morphique du crochet de KAUFFMAN non clos . . . . .	97
4.2.2	Calcul matriciel du crochet de KAUFFMAN . . . . .	100
4.2.3	Propriétés des matrices diagrammatiques . . . . .	104
4.3	Étude par blocs . . . . .	114
4.3.1	Les blocs de croisements . . . . .	114
4.3.2	Les produits de $\mathcal{B}$ -sommés . . . . .	117
4.4	Bibliographie de ce chapitre . . . . .	119

<b>5 Étude du monoïde diagrammatique de KAUFFMAN</b>	<b>121</b>
5.1 Clôture et composantes . . . . .	121
5.1.1 L'algorithme de suivi de lignes . . . . .	122
5.1.2 Applications de l'algorithme de suivi de ligne . . . . .	126
5.1.3 Raisonnement avec les permutations . . . . .	128
5.2 Plongement dans les permutations . . . . .	130
5.2.1 Le produit ping-pong . . . . .	131
5.2.2 Lien entre le produit ping-pong et le monoïde diagrammatique . . . . .	135
5.2.3 Conséquences et applications . . . . .	139
5.3 Bibliographie de ce chapitre . . . . .	149
<b>* Annexes</b>	<b>151</b>
<b>A Théories en lien avec les nœuds</b>	<b>153</b>
A.1 Groupe de tresses . . . . .	153
A.1.1 Approche géométrique . . . . .	154
A.1.2 Structure de groupe . . . . .	156
A.2 Les monoïdes de KAUFFMAN . . . . .	158
A.2.1 Le monoïde diagrammatique . . . . .	158
A.2.2 Le monoïde diagrammatique tressé . . . . .	164
A.3 L'algèbre de TEMPERLEY-LIEB . . . . .	166
A.4 Bibliographie de ce chapitre . . . . .	167
<b>B Outils annexes</b>	<b>169</b>
B.1 Appariements . . . . .	169
B.2 Nombre de combinaisons d'une somme . . . . .	170
B.3 Perturbation de la forme normale de JONES . . . . .	173
<b>Table des figures</b>	<b>179</b>
<b>Liste des définitions</b>	<b>181</b>
<b>Liste des théorèmes</b>	<b>185</b>
<b>Liste des pseudo-codes</b>	<b>187</b>
<b>Index</b>	<b>189</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>191</b>
<b>Table des matières</b>	<b>199</b>





Résumé

Un nœud est un cercle noué dans l'espace à trois dimensions qu'il est possible de déformer continûment. Afin de pouvoir distinguer les nœuds entre eux, divers invariants ont été développés. Parmi eux, le polynôme de JONES (1985) est l'un des plus connus et étudiés, mais à ce jour sa capacité à détecter le nœud trivial reste non décidée. Récemment des travaux de ELIAHOU et FROMENTIN (2017) ont présenté ce problème sous un nouvel angle. En considérant le polynôme de JONES modulo un entier  $m$ , la question de l'existence de nœuds non triviaux vus comme triviaux par cet invariant polynomial est plus abordable. Leur travail présente d'ailleurs une construction pour répondre aux cas  $m = 2^r$ . Nous montrons dans ce mémoire qu'il est possible de construire des nœuds pour répondre aux cas  $m^r$  à partir d'un nœud non trivial ayant un polynôme de JONES trivial modulo  $m$ . Cela permet de répondre d'une autre manière aux cas  $m = 2^r$  mais aussi aux cas  $m = 3^r$ . Nous donnons également une tentative de généralisation de la construction donnée par ELIAHOU et FROMENTIN, mais le manque d'exemple limite notre résultat à une vision uniquement théorique.

Le crochet de KAUFFMAN (1987) est un outil permettant de construire le polynôme de JONES à partir d'un diagramme de nœud. Ses liens avec les générateurs de l'algèbre de TEMPERLEY-LIEB, qui engendrent aussi le monoïde diagrammatique, et la théorie des tresses ont déjà été étudiés, notamment par KAUFFMAN lui-même (1990). Nous continuons d'investiguer ses différents liens pour en apprendre plus sur le polynôme de JONES, mais aussi sur ces théories annexes. Nous apportons entre autres une nouvelle représentation matricielle des tresses, qui permet également de calculer le polynôme de JONES associé à ces tresses suivant différentes clôtures. Nous étudions aussi le monoïde diagrammatique grâce à un plongement dans les permutations, et développons à ce titre un nouveau produit sur les permutations dérivé de la composition classique.

**Mots clés :** Nœuds, Polynôme de Jones, Polynôme de Jones modulaire, Nœuds  $m$ -trivial, Crochet de Kauffman, Tresses, Enchevêtrements, Algèbre de Temperley-Lieb, Permutations

---

TANGLES AND MODULAR JONES POLYNOMIAL

Abstract

A knot is a circle tied in the three dimensional space which can be deformed continuously. In order to distinguish knots, a bundle of invariants have been developed. Among them, the Jones polynomial (1985) is one of the most famous and studied. Surprisingly, its ability to detect the unknot is not decided yet. Recently, a paper from Eliahou and Fromentin (2017) shows a new point of view for this problem. By considering the Jones polynomial modulo an integer  $m$ , the existence of non-trivial knots seen as the unknot by this polynomial invariant is more approachable. Their work also presents an answer for the cases  $m = 2^r$ . In this memoir, we show that it is possible to construct knots to answer cases  $m^r$  from one having a trivial Jones polynomial modulo  $m$ . That allows to give an other answer for cases  $m = 2^r$ , but also for cases  $m = 3^r$ . We try to give a generalized construction of the Eliahou and Fromentin one too, but the lack of examples make this only theoretical so far.

The Kauffman bracket (1987) is a tool to construct the Jones polynomial from a knot diagram. Its connections with generators of the Temperley-Lieb algebra, which also span the diagram monoid, and the braid theory have already been studied, notably by Kauffman himself (1990). We continue to investigate these different connections so that we can learn more on the Jones polynomial, and on these connected theories too. We bring as example a new matrix representation of braids, which provide a new method to compute the Jones polynomial associated to these braids closed in various way. We also study the diagram monoid thank to an embedding inside permutations, and develop as such a new product for permutations similar to the classical composition.

**Keywords:** Knot, Jones polynomial, Modular Jones polynomial,  $m$ -trivial knot, Kauffman bracket, Braids, Tangles, Temperley-Lieb algebra, Permutations

---