



**HAL**  
open science

## Structures réelles sur les surfaces rationnelles

Mohamed Benzerga

► **To cite this version:**

Mohamed Benzerga. Structures réelles sur les surfaces rationnelles. Géométrie algorithmique [cs.CG]. Université d'Angers, 2016. Français. ⟨NNT : 2016ANGE0081⟩. ⟨tel-01471071v2⟩

**HAL Id: tel-01471071**

**<https://theses.hal.science/tel-01471071v2>**

Submitted on 28 Jan 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE D'ANGERS

ECOLE DOCTORALE N° 601

*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*

Spécialité : Mathématiques

Par

**Mohamed Benzerga**

**Structures réelles sur les surfaces rationnelles**

Thèse présentée et soutenue à Angers, le 2 décembre 2016

Unité de recherche : Laboratoire Angevin de Recherche en Mathématiques / LAREMA

Thèse N° :

## Rapporteurs avant soutenance :

Julie Déserti Maître de conférences HDR à l'Université Paris-Diderot

Stéphane Lamy Professeur à l'Université Toulouse III-Paul Sabatier

## Composition du Jury :

Président : Viatcheslav Kharlamov Professeur à l'Université de Strasbourg

Examineurs : Jérémy Blanc Professeur associé à l'Université de Bâle (Suisse)

Serge Cantat Directeur de recherche CNRS à l'Université Rennes I

Jean-Philippe Monnier Maître de conférences HDR à l'Université d'Angers

Dir. de thèse : Frédéric Mangolte Professeur à l'Université d'Angers

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR ÈS MATHÉMATIQUES**

présentée à l'Université d'Angers par

**Mohamed BENZERGA**

---

## Structures réelles sur les surfaces rationnelles

---

soutenue le 2 décembre 2016 devant le jury composé de :

|                          |  |                    |
|--------------------------|--|--------------------|
| Mme Julie DÉSERTI        | Maître de conférences HDR à l'Université Paris-Diderot | Rapporteur         |
| M. Stéphane LAMY         | Professeur à l'Université Toulouse III-Paul Sabatier   | Rapporteur         |
| M. Jérémy BLANC          | Professeur associé à l'Université de Bâle (Suisse)     | Examinateur        |
| M. Serge CANTAT          | Directeur de recherche CNRS à l'Université Rennes I    | Examinateur        |
| M. Viatcheslav KHARLAMOV | Professeur à l'Université de Strasbourg                | Examinateur        |
| M. Jean-Philippe MONNIER | Maître de conférences HDR à l'Université d'Angers      | Examinateur        |
| M. Frédéric MANGOLTE     | Professeur à l'Université d'Angers                     | Directeur de thèse |

préparée au **LAREMA - UMR CNRS 6093**



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Remerciements</b>  | <b>5</b>  |
| <b>Introduction</b>   | <b>7</b>  |
| <b>1 Généralités sur les surfaces rationnelles</b>                                | <b>13</b> |
| 1.1 Modèles minimaux  | 13        |
| 1.2 Généralités sur les éclatés de $\mathbb{P}^2$                                 | 15        |
| 1.3 Surfaces de Del Pezzo   | 18        |
| 1.4 Éclatés en au moins 9 points  | 21        |
| <b>2 Automorphisms of rational surfaces</b>                                       | <b>23</b> |
| 2.1 Preliminaries   | 23        |
| 2.2 Action of $\text{Aut } X$ on the Picard group                                 | 29        |
| 2.3 $\text{Aut}^\#$   | 30        |
| 2.4 $\text{Aut}^*$  | 33        |
| <b>3 Formes réelles des variétés complexes</b>                                    | <b>39</b> |
| 3.1 Variétés algébriques réelles  | 39        |
| 3.2 Cohomologie galoisienne   | 46        |
| 3.3 Structures réelles et éclatements   | 51        |
| 3.4 Caractérisation de l'équivalence des structures réelles par leurs lieux réels | 52        |
| 3.5 English summary of Chapter 3  | 57        |
| <b>4 Structures réelles : calculs explicites</b>                                  | <b>59</b> |
| 4.1 Variétés classiques   | 59        |
| 4.2 Éclatés de $\mathbb{P}^2$ en $r \leq 8$ points                                | 65        |
| <b>5 Finiteness results for real forms on rational surfaces</b>                   | <b>75</b> |
| 5.1 Real structure on $\text{Aut}^\# X$   | 75        |
| 5.2 Entropy and finiteness of real structures                                     | 77        |
| 5.3 Some examples with positive entropy   | 78        |
| 5.4 Cremona special surfaces  | 79        |
| 5.5 Real forms of KLT Calabi-Yau pairs  | 80        |
| <b>6 Higher-dimensional varieties</b>   | <b>87</b> |
| <b>Appendix</b>   | <b>89</b> |
| <b>Bibliography</b>   | <b>93</b> |
| <b>Index</b>  | <b>99</b> |



# Remerciements

Tout d'abord, je remercie Frédéric Mangolte pour avoir encadré ma thèse depuis trois ans. Il m'a proposé un sujet passionnant et nous avons eu de nombreuses conversations mathématiques fructueuses et intéressantes, qui m'ont souvent été d'une aide appréciable. Outre l'aspect mathématique, je tiens également à le remercier pour la grande confiance qu'il m'a accordée, pour sa patience ainsi que pour son éternel optimisme qui m'a été particulièrement utile dans les moments les plus difficiles de cette thèse et qui venait contrebalancer mon pessimisme habituel.

C'est un véritable honneur pour moi que d'avoir vu ma thèse rapportée par Julie Déserti et Stéphane Lamy : je tiens donc à les remercier notamment, mais pas uniquement, pour la qualité de leur lecture. Je suis tout aussi honoré de compter Jérémy Blanc, Serge Cantat, Viatcheslav Kharlamov et Jean-Philippe Monnier dans mon jury et je leur en suis reconnaissant.

Le travail entrepris dans cette thèse a été fortement influencé par les membres de l'ANR BirPol et par les différentes rencontres de cette équipe (où régnait une ambiance chaleureuse, ce qui ne gâche rien) auxquelles j'ai participé aussi bien à Enney qu'à Toulouse, Rennes et Bâle. Cela me fournit une nouvelle occasion de remercier Jérémy Blanc, Serge Cantat, Julie Déserti et Stéphane Lamy ; de plus, je tiens à remercier également Adrien Dubouloz, Stéphane Druel, Jean-Philippe Furter, Anne Lonjou, Charlie Petitjean, Maria Robayo, Susanna Zimmermann notamment. De plus, je voudrais remercier ici Igor Dolgachev pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail depuis deux ans.

Cette thèse met un point final à mes huit années d'études effectuées à l'Université d'Angers depuis 2008 ainsi qu'à l'Université de Nantes ; à ce propos, je tiens à remercier le Centre Henri Lebesgue qui m'a généreusement attribué une bourse de Master 2 en 2012-2013. Par conséquent, ce travail de thèse constitue donc l'aboutissement de la formation que j'y ai reçue et pour laquelle je remercie l'ensemble de mes anciens professeurs, dont James Alexander, Michel Granger, Daniel Naie (et j'en oublie sûrement). En particulier, j'ai une pensée pour Tan Lei dont l'enseignement était remarquable et qui nous a hélas quittés trop tôt.

Je souhaiterais également remercier chaleureusement tous mes collègues ou anciens collègues pour leur soutien mathématique ou moral tout au long de cette thèse et notamment Benjamin Couéraud, Delphine Pol et Bruno Laurent, ainsi que pour nos groupes de travail estivaux.

*Last but not least*, mon dernier mot ira à ma mère et à mon frère que je remercie pour leur soutien constant depuis de longues années.



# Introduction

Historiquement, la géométrie algébrique commence avec l'étude des variétés algébriques réelles, d'abord au sens élémentaire d'ensembles de solutions de systèmes d'équations polynomiales à coefficients réels (ne serait-ce qu'avec les coniques et les quadriques dès l'Antiquité). Cependant, l'existence de systèmes d'équations polynomiales réelles sans solution et surtout le développement au XIX<sup>ème</sup> siècle et au début du XX<sup>ème</sup> siècle de la géométrie analytique complexe d'une part et de l'algèbre commutative d'autre part ont finalement conduit les géomètres algébristes à préférer, au moins dans un premier temps, s'attacher à l'étude des variétés algébriques complexes.

Si la géométrie algébrique réelle en elle-même continue à intéresser des mathématiciens comme Klein [Kle76] et Harnack [Har76], c'est Comessatti [Com12] qui est l'un des premiers (avec sans doute Zeuthen [Zeu74] et Schläfli [Sch63]) à étudier des surfaces algébriques réelles à l'aide de la conjugaison sur des surfaces algébriques complexes et à obtenir notamment des résultats concernant les surfaces rationnelles réelles.

Par la suite, la recherche de fondations plus générales pour la géométrie algébrique (notamment en vue de questions de géométrie arithmétique) motivent le travail d'André Weil sur le changement de corps de base pour les variétés algébriques [Wei56], dont la descente de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{R}$  n'est qu'un cas très particulier. Cette théorie de la descente du corps de base va être formalisée algébriquement par Borel et Serre ([BS64], [Ser94]) qui mettent au point la cohomologie galoisienne en s'inspirant de Tate [Dou95] et de Grothendieck [Gro55]. Dans le même temps, la refondation de la géométrie algébrique par Grothendieck [Gro60] permet de disposer d'un langage puissant, clair et rigoureux permettant de faciliter l'étude de ces questions.

Parallèlement, l'intérêt pour la géométrie réelle renaît parmi plusieurs mathématiciens russes qui s'intéressent à la topologie des variétés algébriques réelles (en lien avec les variétés complexes et la conjugaison associées) et tout particulièrement au XVI<sup>ème</sup> problème de Hilbert sur les composantes connexes des courbes réelles : citons notamment les travaux importants de Gudkov et Arnol'd ([Gud69] et [Arn88] en sont deux exemples parmi d'autres). Surtout, V.A. Rokhlin est l'initiateur d'une véritable école prolifique sur ces questions avec Kharlamov, Viro et bien d'autres (cf. [DK00] pour un bref historique). Enfin, à partir des années 1980, Silhol remet au goût du jour et complète les résultats et les méthodes de Comessatti dans [Sil82] et d'autres articles, en utilisant les techniques de géométrie algébrique et de cohomologie galoisienne que nous venons d'évoquer. Dans [Sil89], il mène une étude systématique des surfaces algébriques réelles vues comme surfaces complexes munies d'une conjugaison complexe (ou *structure réelle*), ou bien comme *formes réelles* d'une variété complexe.

Une *structure réelle* sur une variété algébrique complexe  $X$  est une involution antirégulière<sup>1</sup>  $\sigma$  sur  $X$  ; la condition d'antirégularité consiste en la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{Spec}(z \mapsto \bar{z})} & \text{Spec } \mathbb{C} \end{array}$$

Une *forme réelle* d'une variété complexe  $X$  est une variété réelle  $X_0$  telle que  $X_0 \times_{\text{Spec } \mathbb{R}} \text{Spec } \mathbb{C} \simeq X$ . On dit alors que  $X$  est la *complexification* de la variété réelle  $X_0$ . Dans le cas où  $X_0$  est définie par des équations dans un espace affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$  ou projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ ,  $X$  est simplement la sous-variété complexe de  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  ou  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  définie par les mêmes équations. Cependant, notons qu'une même variété complexe peut avoir différentes formes réelles non-isomorphes. Par exemple, si  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  est bien une forme réelle de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , on remarque que la conique réelle vide  $X_0$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  est également une forme réelle de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  (puisque'une conique complexe

1. Cela équivaut à l'antiholomorphie si  $X$  est projective.

est toujours isomorphe à  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ). Pourtant,  $X_0$  et  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  ne sont pas  $\mathbb{R}$ -isomorphes, puisque  $X_0$  n'a pas de points réels (l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  n'a pas de solutions réelles autre que  $(0, 0, 0)$ ) contrairement à  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ .

Le lien entre les notions de formes réelles et de structures réelles est donné par le théorème suivant (cf. 3.13), qui reformule dans le cas de  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}$  la méthode de *descente du corps de base de Weil* (cf. [BS64, 2.6]) :

**Théorème (Weil, Borel-Serre).** *Notons  $\mathcal{C}$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(X, \sigma)$  où  $X$  est une variété quasi-projective complexe,  $\sigma$  est une structure réelle sur  $X$ ,  $\pi_X : X \rightarrow X/\langle\sigma\rangle$  est la projection canonique et telle que*

$$\forall (X, \sigma), (Y, \tau) \in \mathcal{C}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}((X, \sigma), (Y, \tau)) = \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) \mid f\sigma = \tau f\}.$$

On a une équivalence de catégories entre  $\mathcal{C}$  et la catégorie  $\mathbb{R} - \mathbf{Var}$  des variétés quasi-projectives réelles :

$$F : \begin{cases} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \mathbf{Var} \\ (X, \sigma) & \longmapsto & X_0 := X/\langle\sigma\rangle \\ (f : (X, \sigma) \mapsto (Y, \tau)) & \longmapsto & f_0 := \text{passage au quotient de } \pi_Y f. \end{cases}$$

Deux structures réelles  $\sigma$  et  $\sigma'$  sur  $X$  sont *équivalentes* s'il existe un  $\mathbb{C}$ -automorphisme  $\varphi$  de  $X$  tel que  $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ . Nous verrons en 3.17 que des structures réelles équivalentes correspondent à des formes réelles  $\mathbb{R}$ -isomorphes (et *vice versa*). Par ailleurs, l'ensemble des classes d'équivalence de structures réelles sur une variété quasi-projective complexe  $X$  peut être vu comme un ensemble de cohomologie galoisienne (cf. 3.21) :

**Théorème (Borel-Serre).** *Soient  $X$  une variété quasi-projective complexe et  $\sigma$  une structure réelle sur  $X$ . Les classes d'équivalence de structures réelles sont en bijection avec les éléments de  $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Aut}_{\mathbb{C}}X)$ , où l'élément non-trivial de  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$  agit sur  $\text{Aut}_{\mathbb{C}}X$  par conjugaison par  $\sigma$  (la classe de  $\sigma$  correspond à la classe de cohomologie du cocycle trivial).*

Le but de cette thèse est d'apporter des éléments de réponse au problème suivant :

**Problème.** *Une surface rationnelle  $X$  lisse sur  $\mathbb{C}$  a-t-elle un nombre fini de formes réelles à  $\mathbb{R}$ -isomorphisme près ? Autrement dit, n'existe-t-il qu'un nombre fini de classes d'équivalence de structures réelles sur  $X$  ?*

Cette question a été posée pour les surfaces algébriques en général par Kharlamov dans [Kha02]. Elle admet une réponse positive pour les surfaces rationnelles minimales, cf. [Kha02], [DIK00, III.6.11.7], pour les surfaces algébriques minimales de dimension de Kodaira positive, cf. [DIK00, Appendix D], ainsi que pour les surfaces de Del Pezzo, cf. [Rus02] (voir aussi [Kol97] qui utilise le programme du modèle minimal pour les schémas sur  $\mathbb{R}$ ). De plus, Welschinger a donné la classification complète à équivalence près des structures réelles sur les surfaces réglées minimales décomposables, cf. [Wel03, 2.3]. Signalons aussi que la finitude des structures réelles est connue pour les espaces projectifs (cf. 4.1), pour les variétés abéliennes (cf. [BS64, 3.5, 6.1] et [Sil82, Prop. 7]) ainsi que pour les variétés de type général, puisque leurs groupes d'automorphismes sont finis (cf. [Mat63] ou [HMX13]). Notons enfin qu'à notre connaissance, il n'existe pas d'exemple de variété algébrique quasi-projective ayant une infinité de formes réelles non-isomorphes.

Afin de mener à bien notre étude, nous installons au début de ce travail les différents outils dont nous avons besoin avant d'énoncer et de démontrer les différents résultats que nous avons obtenus :

- Le **Chapitre 1** rappelle brièvement quelques résultats classiques sur les surfaces rationnelles complexes lisses, et plus particulièrement les éclatés de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  sur lesquels portera l'essentiel de notre effort du fait de la plus grande complexité de leurs groupes d'automorphismes. En particulier, nous donnons la structure du groupe de Picard des éclatés de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  (qui est un groupe abélien libre muni d'une forme quadratique de signature  $(1, \text{rg Pic } X - 1)$ ) ainsi que la construction du groupe de Weyl associé à ces surfaces (cf. [DO88, V.3]). Si nous rappelons ensuite quelques généralités sur les surfaces de Del Pezzo, particulièrement bien connues des géomètres algébristes, notre travail ne s'y limite absolument pas et nous verrons notamment que les éclatés de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en au moins 9 points en position générale admettent une infinité de courbes exceptionnelles, ce qui donne une première indication quant à la différence entre ces éclatés et les surfaces de Del Pezzo et quant à leur plus grande complexité.

• Comme nous l'avons vu précédemment, les formes réelles d'une variété quasi-projective complexe  $X$  sont classifiées par l'ensemble de cohomologie galoisienne  $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Aut}_{\mathbb{C}}X)$ . Cela justifie notre étude des automorphismes des surfaces rationnelles au **Chapitre 2**. Nous commençons d'abord par décrire les groupes d'automorphismes des surfaces rationnelles minimales complexes ainsi que de quelques éclatés de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en peu de points. Puis nous montrons comment l'action du groupe d'automorphismes d'une surface rationnelle complexe lisse  $X$  sur son groupe de Picard permet de décomposer l'étude de  $\text{Aut}_{\mathbb{C}}X$  en deux temps de nature différente. Premièrement, nous nous intéresserons au groupe  $\text{Aut}^{\#}X$  des automorphismes agissant trivialement sur  $\text{Pic} X$ . Il s'agit d'un groupe algébrique linéaire complexe pour lequel nous avons établi deux résultats, le premier étant une caractérisation de sa résolubilité :

**Théorème 2.18.** *Soit  $X$  une surface rationnelle complexe lisse.*

*$\text{Aut}^{\#}X$  est résoluble si, et seulement si, le groupe de Picard de  $X$  est de rang au moins 3.*

ainsi qu'une caractérisation de sa finitude dans le cas où  $X$  est un éclaté de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en des points distincts :

**Proposition 2.24.** *Soient  $p_1, \dots, p_r$  des points deux à deux distincts dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  et  $X$  l'éclaté de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en ces points.*

*Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\text{Aut}^{\#}X$  est infini ;
2.  $\text{Aut}^{\#}X$  est non-trivial ;
3. tous les points  $p_i$  sont alignés sauf peut-être un seul d'entre eux.

Deuxièmement, nous exposons les principales propriétés de  $\text{Aut}^*X$ , l'image de l'action de  $\text{Aut} X$  sur  $\text{Pic} X$ . Nous rappelons d'abord l'inclusion du groupe discret  $\text{Aut}^*X$  dans le groupe de Weyl  $W_X$  vu au Chapitre 1, puis nous donnons la classification des automorphismes d'un éclaté  $X$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  selon leur action sur l'espace hyperbolique  $\{D \in \text{Pic} X \mid D^2 = 1, D.E_0 = 0\}$  (où  $E_0$  est le tiré en arrière d'une droite générale de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  par l'éclatement  $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ) et nous l'exprimons en termes de dynamique grâce à la notion d'entropie topologique. Grâce aux résultats de Gromov [Gro03] et Yomdin [Yom87], on peut définir l'entropie topologique d'un automorphisme  $\varphi$  de  $X$  comme étant le logarithme du rayon spectral de l'automorphisme  $\varphi^*$  de  $\text{Pic} X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  induit par  $\varphi$ . En quelque sorte, l'entropie d'un automorphisme est positive (dans la suite, nous écrirons toujours "positive" au lieu de "strictement positive") s'il possède une dynamique explosive. Surtout, nous concluons ce chapitre en rappelant deux résultats (cf. 2.38 et 2.39) sur la structure du groupe  $\text{Aut}^*X$  qui montrent qu'il vérifie une alternative de Tits : soit  $\text{Aut}^*X$  est virtuellement un groupe abélien libre, soit il contient un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  engendré par deux automorphismes à entropie positive qui ne sont pas des puissances d'un même troisième.

• Le **Chapitre 3** rappelle d'abord les bases concernant les notions de structure réelle et de forme réelle d'une variété complexe. En particulier, nous établissons l'équivalence de catégories vue plus haut entre la catégorie des couples formés d'une variété complexe et d'une structure réelle sur celle-ci d'une part et celle des variétés algébriques réelles (vues comme  $\mathbb{R}$ -schémas géométriquement réduits séparés de type fini) d'autre part. Puis nous traduisons la relation d'isomorphie sur  $\mathbb{R}$  entre des formes réelles d'une variété quasi-projective complexe en termes de structures réelles avant de montrer comment l'ensemble des classes d'équivalence de structures réelles sur une telle variété peut être vu comme un ensemble de cohomologie galoisienne. Nous rappelons d'abord les définitions et théorèmes de base concernant cette cohomologie, avant d'établir quelques résultats de finitude cohomologique pour les groupes algébriques linéaires définis sur  $\mathbb{R}$ , les groupes virtuellement abéliens libres de type fini et les produits libres de groupes à cohomologie finie, autant de résultats qui seront cruciaux par la suite, tout comme le résultat suivant, basé sur une idée de Borel et Serre [BS64, 3.8] :

**Théorème 3.30.** *Soient  $G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $A$  un  $G$ -groupe et  $A \rtimes G$  le produit semi-direct défini par l'action de  $G$  sur  $A$ .*

*Si  $A \rtimes G$  possède un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2 (en particulier, s'il a un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis), alors  $H^1(G, A)$  est fini.*

Après quelques remarques concernant le lien entre éclatements et structures réelles, nous concluons ce chapitre par la démonstration d'une caractérisation de l'équivalence des structures réelles par leurs lieux réels (i.e. ensembles des points fermés fixes) :

**Théorème 3.41.** *Soit  $X$  un schéma intègre et quasi-projectif sur  $\mathbb{C}$ .*

*Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux structures réelles sur  $X$  telles que  $X^\sigma$  et  $X^{\sigma'}$  sont Zariski-denses dans  $X$  (en particulier, si  $X$  est régulier, cela revient à ce qu'ils soient non-vides), alors*

$$\sigma \sim \sigma' \iff \exists \varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{C}} X \mid \varphi(X^\sigma) = X^{\sigma'}$$

• Nous nous proposons ensuite au **Chapitre 4** de calculer explicitement, grâce à la cohomologie galoisienne, les classes d'équivalence de structures réelles sur plusieurs exemples classiques (les espaces projectifs, les surfaces de Hirzebruch ainsi que la droite et le plan affines) puis sur des éclatés de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en peu de points. Nous terminons ce chapitre par un premier résultat général de finitude des formes réelles concernant les éclatés de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en au plus 8 points distincts (pas nécessairement en position générale; ce résultat ne se limite donc pas aux surfaces de Del Pezzo). Dans la preuve de ce dernier résultat, nous soulevons une difficulté cohomologique que le seul calcul ne peut résoudre, justifiant ainsi les théorèmes généraux que nous établirons par la suite.

• Forts de l'expérience et des résultats accumulés jusque-là, c'est au **Chapitre 5** que nous énonçons et démontrons nos principaux résultats de finitude (voir aussi [Ben16]). Pour cela, nous commençons d'abord par établir un théorème général concernant le groupe  $\text{Aut}^{\#} X$  des automorphismes d'une variété projective complexe lisse irréductible  $X$  agissant trivialement sur son groupe de Picard (sa première partie est bien connue et sa seconde partie est censément bien connue mais nous n'avons pas pu trouver de référence) :

**Théorème 5.1.** *Soient  $X$  une variété projective irréductible lisse complexe et  $\sigma$  une structure réelle sur  $X$ .*

*$\text{Aut}^{\#} X$  est un groupe algébrique linéaire sur  $\mathbb{C}$  et l'application  $\tilde{\sigma} : \begin{cases} \text{Aut}^{\#} X & \rightarrow \text{Aut}^{\#} X \\ \varphi & \mapsto \sigma\varphi\sigma^{-1} \end{cases}$  définit une structure réelle sur  $\text{Aut}^{\#} X$ .*

Combiné avec les différents résultats cohomologiques du Chapitre 3 ainsi que les résultats de structure de  $\text{Aut}^* X$  vus au Chapitre 2, ce théorème nous permet de démontrer le résultat principal de cette thèse :

**Théorème 5.4.** *Si une surface rationnelle  $X$  a une infinité de classes d'équivalence de structures réelles, alors  $X$  est un éclaté de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en  $r \geq 10$  points et possède au moins deux automorphismes à entropie positive "indépendants" (i.e. qui engendrent un groupe libre non-abélien  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ).*

Nous donnons ensuite différents exemples de surfaces rationnelles ayant des automorphismes à entropie positive mais pour lesquelles ce théorème donne la finitude des formes réelles à  $\mathbb{R}$ -isomorphisme près. Dans [BK10, Th. 2], Bedford et Kim construisent une famille continue de surfaces rationnelles admettant des automorphismes à entropie positive. Pour ce faire, ils résolvent les indéterminations d'une transformation birationnelle  $f$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ainsi que celles de son inverse, où  $f$  est définie par :

$$f : [z : x : y] \mapsto \left[ y^k z : y^{k+1} : -xy^k + \sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \text{ pair}}}^{k-2} a_{\ell} y^{k-\ell} z^{\ell+1} + z^{k+1} \right]$$

où  $k \in \mathbb{N}^*$  est un entier pair et les  $a_{\ell} \in \mathbb{C}$ . Dans [McM07, 7.1, 7.2], Mc Mullen étudie les automorphismes d'un éclaté  $S$  de  $\mathbb{P}^2$  en les  $n \geq 10$  points  $[x_i : x_i^3 : 1]$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  de la cubique cuspidale  $y^3 = xz^2$ , où  $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  n'appartient pas à l'orbite sous  $W_X$  d'une racine simple (cf. 2.27) et  $x_i = -v_i - v_0/3$ . Dans les deux cas, les auteurs obtiennent un groupe d'automorphismes virtuellement abélien libre de type fini, ce qui nous permet d'obtenir le résultat suivant :

**Proposition 5.8.** *Les surfaces de Bedford-Kim et de Mc Mullen décrites ci-dessus n'ont qu'un nombre fini de formes réelles à  $\mathbb{R}$ -isomorphisme près.*

Nous abordons ensuite un exemple particulièrement intéressant, celui des *surfaces Cremona-spéciales* étudiées et caractérisées par Cantat et Dolgachev dans [CD12]. Il s'agit des surfaces rationnelles ayant en quelque sorte les plus gros groupes d'automorphismes possibles : plus précisément, une surface rationnelle  $X$  est dite Cremona-spéciale si son groupe  $\text{Aut}^* X$  est à la fois infini et d'indice fini dans le groupe de Weyl  $W_X$ . L'article [CD12] montre qu'il existe exactement deux types de surfaces rationnelles Cremona-spéciales sur  $\mathbb{C}$ , les surfaces de Halphen et de Coble non-nodales (c'est-à-dire générales en un certain sens). Il s'agit d'éclatés de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en 9 ou 10 points munis d'une fibration elliptique vers  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . La structure de leur groupe

d'automorphismes permet d'utiliser des résultats cohomologiques vus au Chapitre 3 pour montrer le résultat suivant (qui améliore quelque peu le Théorème 5.4, puisque le groupe d'automorphismes d'une surface de Coble non-nodale contient un sous-groupe libre non-abélien, cf. [Dés10, Ex.3.8]) :

**Proposition 5.15.** *Les surfaces Cremona-spéciales ont un nombre fini de classes d'équivalence de structures réelles.*

Enfin, la dernière section de ce chapitre explore un deuxième courant d'idées à travers l'utilisation de l'action du groupe d'automorphismes d'un éclaté de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  sur un espace métrique CAT(0) complet (une sorte de généralisation aux espaces métriques de la notion de courbure négative ou nulle des variétés riemanniennes, cf. Définition 5.16). Plus précisément, on obtient d'abord le résultat suivant :

**Proposition 5.18.** *Soit  $X$  une variété projective irréductible lisse complexe munie d'une structure réelle  $\sigma$ . Si  $\text{Aut}^* X \rtimes \langle \sigma^* \rangle$  agit proprement discontinûment et cocompactement par isométries sur un espace métrique CAT(0) complet, alors  $X$  a un nombre fini de formes réelles à  $\mathbb{R}$ -isomorphisme près.*

Nous appliquons ce résultat à une classe particulière de surfaces rationnelles  $X$ , à savoir celles possédant un  $\mathbb{R}$ -diviseur  $\Delta$  pour lequel  $(X, \Delta)$  est une paire KLT Calabi-Yau (cf. Définition 5.19). Dans son article [Tot10], Totaro démontre la conjecture du cône de Morrisson-Kawamata pour ces paires KLT Calabi-Yau en dimension 2 : cette conjecture affirme l'existence d'un domaine fondamental polyédral finiment engendré pour l'action de  $\text{Aut} X$  sur le cône convexe fermé engendré par les diviseurs nef effectifs. Ce résultat de Totaro nous permet, après avoir mené tout un travail géométrique sur l'espace hyperbolique induit par  $\text{Pic} X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , d'obtenir le théorème suivant :

**Théorème 5.22.** *Si  $(X, \Delta)$  est une paire KLT Calabi-Yau et si  $X$  est une surface rationnelle, alors  $X$  admet un nombre fini de classes d'équivalence de structures réelles.*

Nous terminons ce chapitre en donnant deux exemples : le premier est celui d'un éclaté de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  en 12 points dont la finitude des formes réelles est prouvée par ce théorème (le théorème 5.4 ne suffisant pas car le groupe d'automorphismes de cette surface contient un groupe libre non-abélien  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ), le second est un exemple qui nous a été communiqué par Kharlamov et Dolgachev et qu'ils pensaient être un bon candidat pour avoir une infinité de classes d'équivalence de structures réelles ; malgré tous nos efforts, le statut de cet exemple reste indéterminé.

• Finalement, le bref **Chapitre 6** indique quelques résultats de finitude pour les variétés de dimension supérieure (notamment les variétés de Fano et les éclatés de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ,  $n \geq 3$ , en un nombre fini de points) que nous pouvons obtenir grâce au travail mené dans cette thèse et à des résultats récents sur les groupes d'automorphismes de ces variétés pour lesquels la présence d'entropie positive semble être un phénomène plus rare qu'en dimension 2. Il s'agit des deux résultats suivants :

**Théorème 6.1.** *Si  $X$  est une variété de Fano irréductible lisse sur  $\mathbb{C}$  munie d'une structure réelle  $\sigma$ , alors  $\text{Aut} X$  est un groupe algébrique linéaire défini sur  $\mathbb{R}$  et  $X$  a un nombre fini de classes d'équivalence de structures réelles.*

**Théorème 6.3.** *Soient*

- $X'$  une variété irréductible projective lisse telle que  $\text{Pic} X' \simeq \mathbb{Z}$  ;
- $r \in \mathbb{N}$  et  $X$  un éclaté de  $X'$  en un nombre fini de sous-variétés irréductibles lisses de dimension  $\leq r$  ;
- $\sigma'$  (resp.  $\sigma$ ) une structure réelle sur  $X'$  (resp. sur  $X$ ).

Si  $\dim X' > 2r + 2$  et s'il existe un morphisme birationnel  $\pi : X \rightarrow X'$  réel (i.e. commutant avec  $\sigma'$  et  $\sigma$ ), alors ce morphisme induit un plongement réel de  $\text{Aut} X$  dans  $\text{Aut} X'$  (ce sont des groupes algébriques linéaires définis sur  $\mathbb{R}$ ) et  $X$  a un nombre fini de formes réelles à  $\mathbb{R}$ -isomorphisme près.

### Conventions

Dans toute la suite, le mot "surface" désignera des surfaces algébriques projectives complexes lisses, sauf mention expresse du contraire. Le mot "automorphisme" désignera quant à lui un  $\mathbb{C}$ -automorphisme. Par ailleurs, on notera  $\mathbb{P}^n$  au lieu de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  l'espace projectif complexe de dimension  $n$ . Enfin, si  $n$  et  $p$  sont deux entiers relatifs, alors  $[[n, p]] := [n, p] \cap \mathbb{Z}$ .

*Numérotation* : un numéro seul réfère à un énoncé (par exemple 2.1 correspond au Théorème 2.1 donnant le groupe d'automorphismes de  $\mathbb{P}^n$  situé page 23) alors qu'un numéro écrit entre parenthèses réfère à une équation numérotée (par exemple (2.2) correspond à l'égalité 2.2 située page 31).

**NB** : *Les chapitres 2, 5 et 6 sont rédigés en anglais. Par ailleurs, un résumé en anglais du chapitre 3 est inclus à la fin dudit chapitre.*

---

# Chapitre 1

---

## Généralités sur les surfaces rationnelles

L'objet de ce chapitre est de rassembler les définitions et propriétés des surfaces rationnelles dont nous aurons besoin par la suite. Après une brève description de leurs modèles minimaux, nous nous concentrerons sur les éclatés du plan projectif complexe (en particulier les surfaces de Del Pezzo, mais aussi les éclatés de  $\mathbb{P}^2$  en 9 points et plus dont nous verrons par la suite qu'ils sont importants dans notre travail, du fait de la plus grande complexité de leurs groupes d'automorphismes). Nous nous attacherons notamment à l'étude du groupe de Picard de ces surfaces et nous dégagerons une famille particulière de ses symétries constituant un groupe de Weyl : ce seront des outils fondamentaux pour notre étude des automorphismes et des structures réelles des surfaces rationnelles.

### 1.1 Modèles minimaux

**Définition 1.1.** Une surface est dite **rationnelle** si elle est birationnellement équivalente à  $\mathbb{P}^2$ .

Outre  $\mathbb{P}^2$  et ses éclatés, les surfaces géométriquement réglées sur  $\mathbb{P}^1$  figurent parmi les premiers exemples de surfaces rationnelles :

**Définition 1.2. (Surfaces géométriquement réglées)**

Soit  $C$  une courbe projective complexe lisse. Une **surface géométriquement réglée sur  $C$**  est une surface  $X$  admettant un morphisme lisse  $p : X \rightarrow C$  dont les fibres sont isomorphes à  $\mathbb{P}^1$ .

**Exemple 1.3.** L'exemple le plus simple de surface géométriquement réglée est bien sûr celui de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  : vérifions que c'est une surface rationnelle. Le plongement de Segre nous fournit un isomorphisme entre  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  et la quadrique  $\mathcal{S} = \{[X : Y : Z : T] \in \mathbb{P}^3 \mid XT = YZ\}$  et, notant  $p = [0 : 0 : 0 : 1]$ , on remarque que  $p \in \mathcal{S}$  et que la projection partant de  $p$  :

$$\pi_p : \begin{cases} \mathcal{S} \setminus \{p\} & \rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [X : Y : Z : T] & \mapsto [X : Y : Z] \end{cases}$$

définit une équivalence birationnelle entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathbb{P}^2$ , d'inverse

$$\pi_p^{-1} : \begin{cases} \mathbb{P}^2 & \rightarrow \mathcal{S} \\ [x : y : z] & \mapsto [x^2 : xy : xz : yz] \end{cases}$$

**Théorème et Définition 1.4. (Surfaces de Hirzebruch)**

Les surfaces géométriquement réglées sur  $\mathbb{P}^1$  sont rationnelles : elles s'écrivent toutes sous la forme  $\mathcal{F}_n := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$  pour un unique entier  $n \geq 0$  et sont appelées **surfaces de Hirzebruch**. Notons  $h$  la classe dans  $\text{Pic}(\mathcal{F}_n)$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_n}(1)$  et  $f$  la classe d'une fibre.

1. On a

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Pic}(\mathcal{F}_n) &\simeq \mathbb{Z}.h \oplus \mathbb{Z}.f \\ f^2 &= 0, f.h = 1, h^2 = n \end{aligned}}$$

2. Si  $n > 0$ , il existe une unique courbe irréductible  $B$  dans  $\mathcal{F}_n$  d'auto-intersection strictement négative et si  $b$  désigne sa classe dans  $\text{Pic}(\mathcal{F}_n)$ , alors  $b = h - nf$  et  $b^2 = -n$ .

3.  $\mathcal{F}_n$  est isomorphe à  $\mathcal{F}_m$  si, et seulement si,  $n = m$ .
4.  $\mathcal{F}_n$  est minimale  $\forall n \neq 1$  et  $\mathcal{F}_1 \simeq \widehat{\mathbb{P}^2}$  est l'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  en un point. De plus,  $\mathcal{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .
5.  $\mathcal{F}_n$  est isomorphe à l'éclaté du plan projectif à poids  $\mathbb{P}_n^2 := \mathbb{P}(1, 1, n)$  en son unique point singulier  $[0 : 0 : 1]$ . Cet éclaté est la surface  $\{([x : y : z], [u : v]) \in \mathbb{P}(1, 1, n) \times \mathbb{P}^1 \mid xv = yu\}$ .

*Démonstration.* Une surface géométriquement réglée sur  $\mathbb{P}^1$  est rationnelle : en effet, le Théorème de Noether-Enriques (cf.[Bea78, III.4]) montre qu'une telle surface est birationnellement équivalente à  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  dont on a vu dans l'exemple ci-dessus qu'elle est rationnelle. On admet le reste du théorème : cf.[Bea78, III.15, IV.1] pour les points 1. à 4. et [Gau09, Prop.2] pour le dernier point.  $\square$

**Théorème 1.5. (Modèles minimaux des surfaces rationnelles)**

Toute surface rationnelle minimale est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  ou à l'un des  $\mathcal{F}_n$ , pour  $n \neq 1$ .

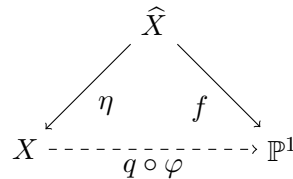
Nous en proposons une preuve différente de celle de [Bea78, V.10] ; pour ce faire, on aura besoin du résultat suivant :

**Proposition 1.6. ([Bea78, III.8])**

Soient  $X$  une surface projective complexe lisse et  $C$  une courbe projective complexe lisse.

Si  $p : X \rightarrow C$  est relativement minimale<sup>1</sup> et si sa fibre générique est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ , alors  $X$  est géométriquement réglée par  $p$ .  $\square$

*Preuve du Théorème 1.5.* Soient  $X$  rationnelle minimale,  $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  une application birationnelle et  $q : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  la première projection, alors le Théorème d'élimination des indéterminations [Bea78, II.7] donne un diagramme



où  $\eta = \varepsilon_1 \circ \dots \circ \varepsilon_k$  est une composée d'éclatements (avec  $k > 0$  minimal pour un tel diagramme). L'idée est de faire comme pour les surfaces réglées non-rationnelles, en adaptant la preuve de [Bea78, III.10] pour l'appliquer au morphisme  $f : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ . La fibre générique de  $f$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$  mais  $\widehat{X}$  n'est pas *a priori* minimale, ce qui fait qu'une fibre  $F$  de  $f$  peut contenir une courbe exceptionnelle. Il faut donc distinguer deux cas :

- si aucune fibre ne contient de courbe exceptionnelle, c'est-à-dire si  $\widehat{X}$  est relativement minimale pour  $f$ , alors la proposition précédente montre que  $\widehat{X}$  est une surface géométriquement réglée de base  $\mathbb{P}^1$  et alors, si  $\widehat{X}$  est minimale,  $k = 0$  et  $X = \widehat{X}$  est une  $\mathcal{F}_n$  pour  $n \neq 1$ . Sinon,  $\widehat{X} \simeq \mathcal{F}_1 = B_p(\mathbb{P}^2)$  pour un point  $p \in \mathbb{P}^2$  et  $\eta$  n'est composée que d'une seule contraction, à savoir celle de l'unique  $(-1)$ -courbe de  $\mathcal{F}_1$ , et donc, par la propriété universelle de la contraction (cf. 2.6),  $\eta(\widehat{X})$  est unique à isomorphisme près et est donc isomorphe à  $\mathbb{P}^2$ .
- s'il existe une fibre  $F$  qui contient une courbe exceptionnelle, alors  $F$  est nécessairement réductible car  $F^2 = 0$ . Si  $F = \sum_i n_i C_i$  où  $C_1$  est une courbe exceptionnelle, alors  $C_1$  est contenue dans une fibre donc est envoyée par  $f$  sur un point  $p_1$  ; la propriété universelle de la contraction montre que  $f$  se factorise en  $f_1 \circ \varepsilon$  où  $\varepsilon : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}_0$  est la contraction de  $C_1$  et où  $f_1 : \widehat{X}_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un morphisme, ce qui contredit la minimalité de  $k$  : en effet, si l'on note  $\rho(X)$  le rang de  $\text{Pic}(X)$ , on constate que  $\rho(\widehat{X}) = \rho(X) + k$  et que  $\rho(\widehat{X}_0) = \rho(X) + k - 1 < \rho(\widehat{X})$ . Ainsi  $k = 0$  et  $q \circ \varphi$  est un morphisme de fibre générique  $\mathbb{P}^1$  donc, d'après la proposition précédente,  $X$  est une surface géométriquement réglée de base  $\mathbb{P}^1$ .  $\square$

1. Beauville suppose que  $X$  est minimale mais un examen attentif de sa preuve montre qu'on peut supposer que  $X$  est relativement minimale par rapport à  $p$ , i.e. que les fibres de  $p$  ne contiennent pas de courbes exceptionnelles.

Le diamant de Hodge ci-dessous regroupe les principaux invariants numériques des surfaces de Hirzebruch (cf.[Bea78, III.21]) :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & \\ & 0 & 2 & 0 \\ & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & & & 1 \end{array}$$

Dans le cas du plan projectif, seul change le  $h^{1,1} = b_2 - 2p_g = 1$ . Quoi qu'il en soit, on a toujours pour une surface rationnelle  $q = P_2 = 0$ . La réciproque est un théorème important (cf.[Bea78, V.1]) :

**Théorème 1.7. (Théorème de Castelnuovo)**

Une surface  $X$  est rationnelle si, et seulement si,  $q(X) = h^1(\mathcal{O}_X)$  et  $P_2(X) = h^0(2K_X) = 0$ .  $\square$

## 1.2 Généralités sur les éclatés de $\mathbb{P}^2$

Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons tout particulièrement aux éclatés de  $\mathbb{P}^2$  (aussi appelés *surfaces rationnelles basiques*). Nous réunissons donc ici quelques propriétés générales de ces surfaces, à commencer par la structure de leur groupe de Picard :

**Théorème 1.8. (Groupe de Picard d'un éclaté de  $\mathbb{P}^2$ )**

Soit  $X$  un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  points  $p_1, \dots, p_r$  et  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  le morphisme birationnel associé.

1.  $\text{Pic } X \simeq \mathbb{Z}^{r+1}$ . Plus précisément, une base de  $\text{Pic } X$  est donnée par  $(E_0, E_1, \dots, E_r)$  où :

- $E_0$  est la classe de la préimage par  $\pi$  d'une droite de  $\mathbb{P}^2$  ne passant par aucun des  $p_i$  ;
- si  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ , alors  $E_i$  est la classe de  $\pi_i^{-1}(p_i)$  où  $X_i$  est un éclaté (peut-être trivial) de  $\mathbb{P}^2$  auquel appartient  $p_i$  et  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  est le morphisme birationnel correspondant à l'éclatement de  $p_i$  et de tous les points infiniment proches de  $p_i$ .

Suivant [Har85], on désignera cette base comme étant la **configuration exceptionnelle** de  $\text{Pic } X$  associée à  $\pi$  (ou à  $(p_1, \dots, p_r)$ ).

2. La forme d'intersection sur  $X$  est de signature<sup>2</sup>  $(1, r, 0)$  et  $(E_0, E_1, \dots, E_r)$  est une base orthogonale du  $\mathbb{Z}$ -module libre  $\text{Pic } X$  puisque :

$$\boxed{E_0^2 = 1 \ ; \ \forall i \geq 1, E_i^2 = -1 \ ; \ \forall i \neq j, E_i \cdot E_j = 0}$$

3. Le diviseur canonique est  $K_X = -3E_0 + \sum_{i=1}^r E_i$ . Son auto-intersection est  $K_X^2 = 9 - r$ . On en déduit

la signature de la forme d'intersection restreinte à  $K_X^\perp$  :

- si  $r < 9$ ,  $K_X^2 > 0$  et cette signature vaut  $(0, r, 0)$
- si  $r = 9$ ,  $K_X^2 = 0$  et cette signature vaut  $(0, r - 1, 1)$
- si  $r > 9$ ,  $K_X^2 < 0$  et cette signature vaut  $(1, r - 1, 0)$

*Démonstration.* Les faits ci-dessus peuvent être établis par une simple récurrence sur  $r$  à partir des assertions analogues pour  $r = 1$  qui sont prouvées dans [Bea78, II.3] (voir aussi [Har77, V.3.2, V.3.3]) ainsi que du fait que  $\text{Pic } \mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{Z} \cdot H$  (cf. [Har77, II.6.4]) et du fait que  $K_{\mathbb{P}^2} = -3H$ , où  $H$  est la classe d'une droite de  $\mathbb{P}^2$  (cf. [Har77, II.8.20.1]). Enfin, pour la signature de la forme d'intersection restreinte à  $K_X^\perp$ , cf. [Dol86, p. 93].  $\square$

2. Rappelons que la signature d'une forme quadratique  $q$  sur  $M$  est le triplet  $(p, m, z)$  tel que si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $M$ , alors  $p = \#\{i | q(e_i) > 0\}$ ,  $m = \#\{i | q(e_i) < 0\}$  et  $z = \#\{i | q(e_i) = 0\}$ .

Dans la suite, nous nous intéresserons également à  $\langle K_X \rangle^\perp \subseteq \text{Pic } X$ , que nous noterons simplement  $K_X^\perp$  par la suite. On va maintenant construire un groupe de Weyl associé à la surface  $X$  : ce groupe est un objet central pour la compréhension des courbes exceptionnelles et des automorphismes d'un éclaté  $X$  de  $\mathbb{P}^2$ .

**Proposition 1.9.** *La famille  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})$  définie par*

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= E_0 - E_1 - E_2 - E_3; \\ \alpha_i &= E_i - E_{i+1}, \quad \forall i \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket.\end{aligned}$$

*est une base de  $K_X^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . De plus,  $\forall i \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket$ , on a  $\alpha_i^2 = -2$ .* □

En fait, il y a mieux : on a un système de racines :

**Définition 1.10. (Système de racines)** Soit  $V$  un espace vectoriel euclidien.

Un **système de racines** de  $V$  est une partie finie  $R$  de  $V$  telle que :

- $R$  engendre  $V$  et ne contient pas 0 ;
- si  $\alpha \in R$  alors  $\mathbb{R} \cdot \alpha \cap R = \{\pm \alpha\}$  ;
- $\forall \alpha, \beta \in R$ , la projection orthogonale de  $\beta$  sur  $\langle \alpha \rangle$  est dans  $\frac{1}{2} \mathbb{Z} \cdot \alpha$ , i.e.  $2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \in \mathbb{Z}$  ;
- $\forall \alpha \in R$ ,  $R$  est stable par la réflexion orthogonale  $s_\alpha$  par rapport à l'hyperplan  $\langle \alpha \rangle^\perp$  :

$$\beta \in R \Rightarrow s_\alpha(\beta) := \beta - 2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \alpha \in R.$$

Les éléments de  $R$  sont les **racines**. Le **groupe de Weyl associé à  $R$**  est le sous-groupe  $W_R \subseteq \text{O}(V)$  engendré par les réflexions  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in R$ .

**Proposition 1.11. ([Man74, 25.2])** *Soit  $X$  un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  points  $p_1, \dots, p_r$  et soit  $(E_0, \dots, E_r)$  la configuration exceptionnelle associée.*

*Si  $r \leq 8$ , alors  $K_X^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  est un espace euclidien (pour l'opposé de la forme d'intersection) de dimension  $r$ . De plus, l'ensemble des  $(-2)$ -courbes*

$$R := \{\alpha \in \text{Pic } X \mid \alpha^2 = -2, \alpha K_X = 0\}$$

*est un système de racines de  $K_X^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ .* □

Tout ceci ne fonctionne plus si  $r \geq 9$  : en effet,  $K_X^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  n'est alors plus un espace euclidien. On a donc besoin de la généralisation suivante (cf. [DO88, V.3]) :

**Définition 1.12. (Base de racines)**

- On appellera ici **réseau (quadratique)** un groupe abélien libre de type fini muni d'une forme bilinéaire symétrique.
- Une **base de racines** d'un réseau  $M$  est une partie  $B$  de  $M$  telle que
  - $\forall \alpha \in B$ ,  $\alpha^2 = -2$  ;
  - $\forall \alpha \neq \beta \in B$ ,  $\alpha \cdot \beta \geq 0$  ;
  - aucun  $\alpha \in B$  n'est combinaison linéaire à coefficients positifs des autres éléments de  $B$ .
- Le sous-groupe de  $\text{O}(M)$  engendré par les réflexions  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in B$ , est encore le **groupe de Weyl associé à  $B$** , noté  $W_B$ .
- Les **racines** sont les éléments des orbites de  $B$  sous l'action de  $W_B$ . Les éléments de  $B$  sont les **racines simples**.
- Le **diagramme de Dynkin** associé à  $B$  est le graphe dont les sommets correspondent aux éléments de  $B$  et tel que deux sommets distincts  $\alpha$  et  $\beta$  sont reliés par  $\alpha \cdot \beta$  arêtes.

On admettra que  $W_B$  est un **groupe de Coxeter** : ses générateurs  $s_{\alpha_i}$  vérifient les relations suivantes :

$$s_{\alpha_i}^2 = 1 \quad (s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{m_{ij}} = 1$$

$$\text{où } m_{ij} = \begin{cases} 3 & \text{si } \alpha_i \text{ et } \alpha_j \text{ sont reliés directement dans le diagramme de Dynkin;} \\ 2 & \text{si } \alpha_i \text{ et } \alpha_j \text{ ne sont pas reliés dans le diagramme de Dynkin;} \\ \infty & \text{si } \alpha_i \text{ et } \alpha_j \text{ sont reliés indirectement dans le diagramme de Dynkin.} \end{cases}$$

**Proposition 1.13.** *Soit  $X$  un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  points  $p_1, \dots, p_r$  et soit  $(E_0, \dots, E_r)$  la configuration exceptionnelle associée.*

*L'ensemble  $B = \{\alpha_0 = E_0 - E_1 - E_2 - E_3, \alpha_1 = E_1 - E_2, \dots, \alpha_{r-1} = E_{r-1} - E_r\}$  est une base de racines de  $K_X^\perp$ . On notera dorénavant  $W_X$  le groupe de Weyl associé à cette base de racines.*

*Démonstration.* On sait déjà que ces vecteurs sont linéairement indépendants et que  $\forall i \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket, \alpha_i^2 = -2$  : il suffit donc de vérifier la deuxième condition de la définition de base de racines. Mais  $\forall i, j \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket$

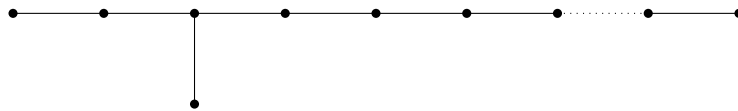
$$\begin{aligned} \alpha_i \cdot \alpha_j &= (E_i - E_{i+1})(E_j - E_{j+1}) = E_i E_j - E_i E_{j+1} - E_{i+1} E_j + E_{i+1} E_{j+1} \\ &= \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i = j + 1 \text{ ou } i = j - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

et  $\forall i \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \alpha_r \cdot \alpha_i &= (E_0 - E_1 - E_2 - E_3)(E_i - E_{i+1}) \\ &= E_0 E_i - E_1 E_i - E_2 E_i - E_3 E_i - E_0 E_{i+1} + E_1 E_{i+1} + E_2 E_{i+1} + E_3 E_{i+1} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $\forall i \neq j, \alpha_i \alpha_j \geq 0$ . □

Les calculs ci-dessus permettent de tracer le diagramme de Dynkin correspondant :  $\alpha_0$  est relié à  $\alpha_3$  et les  $\alpha_i, i < r$ , sont chacun reliés à  $\alpha_{i-1}$  et  $\alpha_{i+1}$  (sauf  $\alpha_1$  qui n'est pas relié à  $\alpha_0$ ). On obtient donc le diagramme suivant, noté  $E_{2,3,r-3}$ , pour  $r \geq 3$  :



En particulier, pour  $r \in \llbracket 3; 8 \rrbracket$ , on retrouve les cas classiques vus dans [Man74, 23.9] :

|               |                  |       |       |       |       |       |
|---------------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $r$           | 3                | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     |
| $E_{2,3,r-3}$ | $A_1 \oplus A_2$ | $A_4$ | $D_5$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ |

On déduit de ce diagramme l'un des résultats fondamentaux dont nous aurons besoin par la suite :

**Théorème 1.14.** ([DO88, p. 73]) *Soit  $X$  un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  points (distincts ou non).*

*Le groupe de Weyl associé  $W_X$  est fini si, et seulement si,  $r \leq 8$ .* □

Citons aussi l'inégalité suivante :

**Théorème 1.15.** (Inégalité de Noether - [DO88, Prop.5 p.77])

*Soit  $r \geq 3$ . Si  $C = dE_0 - \sum_{i=1}^r a_i E_i \in \text{Pic } X$  vérifie*

- $d > 0, a_1 \geq \dots \geq a_r \geq 0$  ;
- $-2 \leq C^2 = d^2 - \sum_{i=1}^r a_i^2 \leq 1$  ;

- $-CK_X = 3d - \sum_{i=1}^r a_i = C^2 + 2$ ;
- $C \notin \{E_0 - E_1; E_0\}$  (c'est notamment le cas si  $C^2 = -2$  ou  $C^2 = -1$ )

alors

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 > d}$$

*Démonstration.* On remarque que

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_3(a_4 + \cdots + a_r) - (a_4^2 + \cdots + a_r^2) = \\ &= a_3(3d - a_1 - a_2 - a_3 - C^2 - 2) - (d^2 - C^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) = \\ &= a_1^2 + a_2^2 - a_3(a_1 + a_2) - (d - 3a_3)d + C^2 - a_3(C^2 + 2). \end{aligned}$$

Supposons que  $d \geq a_1 + a_2 + a_3$ ; alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_1^2 + a_2^2 - a_3(a_1 + a_2) - (d - 3a_3)d + C^2 - a_3(C^2 + 2) \\ &\leq a_1^2 + a_2^2 - a_3(a_1 + a_2) - (a_1 + a_2 - 2a_3)(a_1 + a_2 + a_3) + C^2 - a_3(C^2 + 2) = \\ &= a_1^2 + a_2^2 - a_3(a_1 + a_2) - (a_1 + a_2)^2 + a_3(a_1 + a_2) + 2a_3^2 + C^2 - a_3(C^2 + 2) = \\ &= 2 \underbrace{(a_3^2 - a_1a_2)}_{\leq 0} + \underbrace{C^2}_{\leq 1} - a_3 \underbrace{(C^2 + 2)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Cette quantité est majorée par 1; elle est donc positive si, et seulement si, elle vaut 0 ou 1 : c'est impossible si  $C^2 < 0$  et sinon, ce n'est possible que si  $a_2 = a_3 = 0$ , c'est-à-dire si  $C = E_0$  (dans le cas  $C^2 = 1$ ) ou  $C = E_0 - E_1$  (dans le cas  $C^2 = 0$ ).  $\square$

### 1.3 Surfaces de Del Pezzo

Dans toute cette section, notre principale référence est la série d'exposés de Demazure dans [DPT80].

**Définition 1.16.** Une surface  $X$  est dite **de Del Pezzo** si  $-K_X$  est ample. Son **degré** est  $d := K_X^2$ .

**Théorème 1.17.** Une surface de Del Pezzo est rationnelle. De plus, elle domine  $\mathbb{P}^2$  ou  $\mathcal{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

*Démonstration.* Soit  $X$  une surface de Del Pezzo : on utilise le Théorème de Castelnuovo (cf.1.7) pour établir la rationalité de  $X$ .

Pour ce faire, remarquons d'abord que le critère de Nakai-Moishezon montre que pour toute courbe irréductible  $C$  sur  $X$ ,  $-K_X.C > 0$  puisque  $-K_X$  est ample. Par conséquent, il n'existe pas de diviseur effectif  $D$  linéairement équivalent à  $2K_X$  : en effet, si un tel  $D$  existait et si  $C$  était une courbe irréductible distincte des composantes de  $D$ , on aurait  $2K_X.C = D.C > 0$  et donc  $-K_X.C < 0$ . Ainsi,  $P_2(X) = 0$ . D'après le Théorème d'annulation de Kodaira, puisque  $-K_X$  est ample, on a  $q(X) = h^1(-K_X) = 0$  et ainsi,  $X$  est rationnelle.

On en déduit que  $X$  domine  $\mathbb{P}^2$  ou l'une des surfaces de Hirzebruch  $\mathcal{F}_n$ ,  $n \neq 1$ . Reste à montrer que  $X$  ne domine pas une  $\mathcal{F}_n$  avec  $n \geq 2$ . Mais si  $n \geq 2$ , alors  $\mathcal{F}_n$  contient une section exceptionnelle  $h_0$  telle que  $h_0^2 = -n \leq -2$  et  $h_0 \simeq \mathbb{P}^1$ . En éclatant  $\mathcal{F}_n$  en un nombre fini de points, on obtiendra une courbe rationnelle  $C$  telle que  $C^2 \leq -2$ . Mais  $-K_X$  est ample : la formule du genre donne

$$-2 = 2g(C) - 2 = \underbrace{C^2}_{\leq -2} + \underbrace{CK_X}_{< 0} < -2$$

ce qui est absurde. Donc  $X$  domine  $\mathbb{P}^2$  ou  $\mathcal{F}_0$ .  $\square$

Comme un éclaté de  $\mathcal{F}_0$  en  $k$  points,  $k \geq 1$ , est aussi un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $k + 1$  points, on peut supposer que  $X = \mathcal{F}_0$  ou  $X$  est un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  points. Il nous faut maintenant distinguer parmi ces surfaces celles pour lesquelles  $-K_X$  est ample. Le Critère de Nakai-Moishezon nous montre qu'il y a deux conditions à vérifier : on commence par examiner la première, à savoir  $(-K_X)^2 > 0$  :

**Proposition 1.18.** *Le degré  $d = K_X^2$  d'une surface de Del Pezzo  $X$  est compris entre 1 et 9. De façon plus précise :*

- si  $X = \mathcal{F}_0$  alors  $d = 8$  ;
- si  $X$  est l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  points alors  $d = 9 - r$  et  $r \leq 8$ . □

On étudie maintenant la seconde condition, à savoir : pour toute courbe  $C$  sur  $X$ ,  $-K_X.C > 0$ . Si une surface possède des courbes ne vérifiant pas cette inégalité, alors ces courbes sont autant d'obstacles à l'amplitude de  $-K_X$ , ce qui motive la :

**Définition 1.19.** Une **courbe anormale** est une courbe  $C$  telle que  $K_X.C \geq 0$ .

**Proposition 1.20.** *Soit  $X$  un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  points  $p_1, \dots, p_r$  et  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  le morphisme birationnel correspondant.*

*$X$  possède des courbes anormales verticales (c'est-à-dire contractées par  $\pi$ ) si, et seulement si, il existe  $i, j \in \llbracket 1; r \rrbracket$  tels que  $p_j$  est infiniment proche de  $p_i$ . □*

**Proposition 1.21.** *Soit  $X$  un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r \leq 8$  points  $p_1, \dots, p_r$  et  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  le morphisme birationnel correspondant.*

*Les courbes anormales non-verticales sur  $X$  (c'est-à-dire qui ne sont pas contractées par  $\pi$ ) sont les transformées strictes des courbes suivantes de  $\mathbb{P}^2$  :*

- les droites passant par au moins 3 des  $p_i$  ;
- les coniques irréductibles passant par au moins 6 des  $p_i$  ;
- si  $r = 8$ , les cubiques irréductibles passant par les  $p_i$  et ayant un point singulier en l'un des  $p_i$ . □

Voilà qui justifie la définition suivante :

**Définition 1.22.** Les points  $p_1, \dots, p_r$  (avec  $r \leq 8$ ) sont dits **en position générale** si l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en ces points ne comporte pas de courbe anormale, c'est-à-dire si les  $p_i$  vérifient les conditions suivantes :

- $\forall i \neq j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $p_j$  n'est pas infiniment proche de  $p_i$  ;
- on ne peut trouver trois points alignés parmi les  $p_i$  ;
- on ne peut trouver de sextuplet coconique parmi les  $p_i$  ;
- il n'existe pas de cubique passant par 8 des  $p_i$  ayant un point singulier en l'un des  $p_i$ .

**Remarque 1.23.** Si le nombre de points non-infiniment proches de  $\mathbb{P}^2$  qui sont éclatés est au moins égal à 9, alors  $X$  admet toujours des courbes anormales : il suffit de prendre la transformée stricte d'une cubique passant par 9 des  $p_i$ .

**Théorème 1.24.** *Soit  $X$  un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  points. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $-K_X$  est ample ;
2.  $r \leq 8$  et les  $E_i$  sont effectifs irréductibles ;
3.  $r \leq 8$  et les  $p_i$  sont en position générale ;
4. il n'existe pas de courbe irréductible anormale sur  $X$  ;
5.  $r \leq 8$  et il n'existe pas de diviseur effectif  $\alpha$  sur  $X$  tel que  $\alpha^2 = -2$  et  $\alpha.K_X = 0$ . □

**Corollaire 1.25.** *Toute surface de del Pezzo est isomorphe à  $\mathbb{P}^2$  ou  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ou à un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r \leq 8$  points en position générale. □*

On s'intéresse maintenant aux **courbes exceptionnelles** sur ces surfaces : il s'agit des courbes  $C$  isomorphes à  $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  (donc irréductibles) telles que  $C^2 = CK_X = -1$ . Ce sont des cas particuliers des **diviseurs exceptionnels**, i.e. des diviseurs  $D$  vérifiant  $D^2 = DK_X = -1$ . Le résultat suivant est très classique (cf. [DPT80, II. Table 3] ou [Bla06, 4.2.2]) :

**Proposition 1.26. (Courbes exceptionnelles des surfaces de Del Pezzo)**

Soit  $X$  un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r \leq 8$  points  $p_1, \dots, p_r$  en position générale et  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  le morphisme birationnel correspondant.

Les courbes exceptionnelles de  $X$  sont données ci-dessous :

- les  $r$  courbes exceptionnelles  $E_1 = \pi^{-1}(p_1), \dots, E_r = \pi^{-1}(p_r)$  ;
- les transformées strictes des courbes irréductibles de degré  $d$  passant par les  $p_i$  avec les multiplicités données dans le tableau suivant<sup>3</sup> :

| $r$                               | degré $d$ | multiplicités            | $r =$ | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8   |
|-----------------------------------|-----------|--------------------------|-------|---|---|---|----|----|----|----|-----|
| $\geq 1$                          | 0         | 0                        |       | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8   |
| $\geq 2$                          | 1         | (1, 1)                   |       |   | 1 | 3 | 6  | 10 | 15 | 21 | 28  |
| $\geq 5$                          | 2         | (1, 1, 1, 1, 1)          |       |   |   |   |    | 1  | 6  | 21 | 56  |
| $\geq 7$                          | 3         | (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)    |       |   |   |   |    |    |    | 7  | 56  |
| 8                                 | 4         | (2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1) |       |   |   |   |    |    |    |    | 56  |
| 8                                 | 5         | (2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1) |       |   |   |   |    |    |    |    | 28  |
| 8                                 | 6         | (3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) |       |   |   |   |    |    |    |    | 8   |
| Nombre de courbes exceptionnelles |           |                          |       | 1 | 3 | 6 | 10 | 16 | 27 | 56 | 240 |

*Démonstration.* Un diviseur  $C = dE_0 - \sum_{i=1}^r m_i E_i$  est exceptionnel si, et seulement si,  $C^2 = CK_X = -1$ , c'est-à-dire si, et seulement si,

$$d^2 - \sum_{i=1}^r m_i^2 = -1 \text{ et } 3d - \sum_{i=1}^r m_i = 1$$

soit encore  $\sum_{i=1}^r m_i^2 = d^2 + 1$  et  $\sum_{i=1}^r m_i = 3d - 1$ . On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec  $u = {}^t[1 \dots 1]$  et  $v = {}^t[m_1 \dots m_r] : \langle u|v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$  donc :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^r m_i \right)^2 &\leq r \cdot \left( \sum_{i=1}^r m_i^2 \right) &\iff (3d-1)^2 &\leq r(d^2+1) \\ & &\iff 9d^2 - 6d + 1 &\leq rd^2 + r \\ & &\iff P_r(d) := (9-r)d^2 - 6d + 1 - r &\leq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de  $P_r$  vaut  $4r(10-r)$  et est donc positif (car  $r \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$ ) et on voit que  $P_r(-1) \geq 0 \forall r \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$  et  $P_r(4) \geq 0 \forall r \in \llbracket 1; 7 \rrbracket$  donc

$$\forall r \in \llbracket 1; 7 \rrbracket, C^2 = CK_X = -1 \implies 0 \leq d \leq 3$$

Pour simplifier l'étude ci-dessous, on suppose que  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$ .

- $d = 0$  :  $\sum_{i=1}^r m_i^2 = 1$  et  $\sum_{i=1}^r m_i = -1$  donc  $\exists ! i_0$  tel que  $m_{i_0} = -1$  et tel que tous les autres  $m_i$  sont nuls, donc on obtient  $(0; -1, 0, \dots, 0)$ , c'est-à-dire l'une des  $r$  courbes  $E_i$ .
- $d = 1$  :  $\sum_{i=1}^r m_i^2 = 2$  et  $\sum_{i=1}^r m_i = 2$  donc deux des  $m_i$  valent 1 et les autres sont nuls donc on obtient  $(1; 1, 1, 0, \dots, 0)$ , c'est-à-dire la transformée stricte d'une droite passant par deux des  $p_i$ . Il y a exactement  $C_r^2 = \frac{r(r-1)}{2}$  droites de cette sorte.

3. De façon quelque peu abusive, les "courbes de degré  $d = 0$ " sont les courbes  $E_1, \dots, E_r$  : cela est cohérent avec le fait que le degré correspond à l'intersection avec  $E_0$ .

- $d = 2 : \sum_{i=1}^r m_i^2 = 5$  et  $\sum_{i=1}^r m_i = 5$  donc 5 des  $m_i$  valent 1 et les autres sont nuls (remarquons que si par exemple  $m_1 = 2, m_2 = 1$  et les autres sont nuls, alors  $\sum_{i=1}^r m_i^2 = 5$  mais  $\sum_{i=1}^r m_i = 3$ ) donc on obtient  $(2; 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ , c'est-à-dire la transformée stricte d'une conique passant par cinq des  $p_i$ . Il y a exactement  $C_r^5$  coniques de cette sorte.

- $d = 3 : \sum_{i=1}^r m_i^2 = 10$  et  $\sum_{i=1}^r m_i = 8$ . Le cas où tous les  $m_i$  valent 1 ne convient pas ; par ailleurs, si  $m_1 = 3$  alors  $m_2 = 1$  et tous les autres sont nuls mais  $\sum_{i=1}^r m_i \neq 8$ . Donc  $m_1 = 2$  et 6 autres valent 1.

Il y a exactement  $r.C_{r-1}^6$  cubiques de cette sorte, le facteur  $r$  correspondant au choix du point double.

On a ainsi trouvé les courbes pour  $r \leq 7$ . Pour  $r = 8$ , on vérifie aisément que  $K_X^2 = 1$  et que si  $C$  est exceptionnel, alors  $-2K_X - C$  aussi. De plus, si  $C = dE_0 - \sum_{i=1}^8 m_i E_i$ , alors  $-2K_X - C = (6 - d)E_0 - \sum_{i=1}^8 (m_i - 2)E_i$  et  $d \geq 4 \Rightarrow 6 - d \leq 2$  donc les solutions pour  $d \geq 4$  s'obtiennent à partir de celles pour  $6 - d \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$ . □

**Remarque 1.27.** • La preuve précédente montre qu'il y a un nombre fini de courbes exceptionnelles si  $r \leq 8$  mais elle ne fonctionne pas si  $r \geq 9$  car le coefficient dominant de  $P_r$  devient négatif, ce qui empêche de borner le degré  $d$ .

- Si par exemple on a 4 points alignés sur une droite  $D$  alors le diviseur  $E_0 - E_1 - E_2$ , qui est répertorié dans le tableau ci-dessus, est un diviseur effectif non-irréductible : il s'agit de  $(E_0 - E_1 - E_2 - E_3 - E_4) + E_3 + E_4 = \widehat{D} + E_3 + E_4$ , où  $\widehat{D}$  est la transformée stricte de  $D$ . De manière générale, si les  $p_i$  sont en position spéciale alors on n'a compté que les classes de diviseurs exceptionnels, y compris ceux qui sont réductibles.

## 1.4 Éclatés en au moins 9 points

Pour étudier les éclatés de  $\mathbb{P}^2$  en au moins neuf points, il nous faut distinguer entre les positions générales et spéciales de  $r$ -uplets de points de  $\mathbb{P}^2$ . On adopte la définition suivante, qui est celle de Nagata (qui parle de "non-special points with respect to Cremona transformations", cf. [Nag61, p. 279]) et de Hartshorne, cf. [Har77, IV.Exercice 4.15] :

**Définition 1.28. (Position générale au sens de Nagata)**

- Si  $p, q, r$  sont trois points non-alignés de  $\mathbb{P}^2$ , la **transformation quadratique standard basée en  $p, q, r$**  est la transformation définie par :

$$\tau : [x : y : z] \mapsto \left[ \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \right] = [yz : xz : xy]$$

dans un système de coordonnées tel que  $p = [1 : 0 : 0], q = [0 : 1 : 0], r = [0 : 0 : 1]$ .

- Pour  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^2$  sans triplet aligné, une transformation birationnelle  $\varphi$  de  $\mathbb{P}^2$  est dite **admissible** si c'est une transformation quadratique standard basée en trois des  $p_i$ .
- Les points  $p_1, \dots, p_r$  sont dits **en position générale (au sens de Nagata)** si ce sont des points de  $\mathbb{P}^2$ <sup>(4)</sup> sans triplet aligné et si toute suite finie de transformations admissibles les laisse sans triplet aligné, étant entendu que si  $\tau$  est la transformation quadratique standard basée en  $p_1, p_2, p_3$ , elle donne naissance au  $r$ -uplet de points  $(p_1, p_2, p_3, \tau(p_4), \dots, \tau(p_r))$ .

---

4. Autrement dit, sans points infiniment proches.

**Exemple 1.29.** Si  $(p_1, \dots, p_6)$  est un sextuplet coconique de  $\mathbb{P}^2$ , alors la transformation quadratique standard centrée en  $p_1, p_2, p_3$  envoie les points  $p_4, p_5, p_6$  sur trois points alignés : par conséquent, des points formant un sextuplet coconique sont en position spéciale.

**Proposition 1.30.** ([Nag61, Theorem 4a] - [Har85, 2.9])

Soit  $X$  un éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r$  points  $p_1, \dots, p_r$ .

Si  $r \geq 9$ , alors  $X$  admet une infinité de classes de diviseurs exceptionnels. Si de plus les  $p_i$  sont en position générale,  $X$  contient une infinité de classes de courbes exceptionnelles.

*Démonstration.* Rappelons d'abord que si  $C = dE_0 - \sum_{i=1}^r m_i E_i$  est exceptionnel, alors  $\sum_{i=1}^r m_i = 3d - 1$ .

On peut supposer que  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r$  et alors on a  $m_1 + m_2 + m_3 < d$  <sup>(5)</sup> : en effet, si c'était faux, on aurait  $m_4 + m_5 + m_6 \geq m_1 + m_2 + m_3 \geq d$  ainsi que  $m_7 + m_8 + m_9 \geq m_1 + m_2 + m_3 \geq d$ , donc

$$\sum_{i=1}^r m_i = 3d - 1 \geq \sum_{i=1}^9 m_i \geq 3d, \text{ ce qui est absurde.}$$

Ainsi,  $a := d - m_1 - m_2 - m_3 > 0$  et on voit que  $\mathfrak{q}(C) := (d+a)E_0 - \sum_{i=1}^3 (m_i+a)E_i - \sum_{i=4}^r m_i E_i$  est exceptionnel

de degré  $> d$  : si l'on vérifie ceci, la preuve est terminée puisqu'en itérant  $\mathfrak{q}$ , on peut obtenir des classes de diviseurs exceptionnels de degré  $d$  arbitrairement grand, ce qui fournit l'infinité voulue.

Pour la vérification, on peut bien sûr calculer  $\mathfrak{q}(C)^2$  et  $\mathfrak{q}(C) \cdot K_X$  mais on peut aussi remarquer que  $\mathfrak{q} = s_{\alpha_0}$  (cf. 1.9 et 1.10) est clairement une isométrie.

Par ailleurs, si les  $p_i$  sont en position générale au sens de Nagata, alors tous les diviseurs exceptionnels sont irréductibles ; cf. [Nag61, Prop.6a].  $\square$

Signalons enfin que la question de la finitude éventuelle du nombre de courbes exceptionnelles ne se pose que pour les éclatés du plan projectif :

**Proposition 1.31.** ([Nag60, Theorem 5])

Une surface rationnelle ayant une infinité de courbes exceptionnelles est basique (i.e. domine  $\mathbb{P}^2$ ).  $\square$

---

5. Ce n'est pas l'inégalité de Noether.

---

# Chapter 2

---

---

## Automorphisms of rational surfaces

We proceed to a brief review of the properties of automorphisms of rational surfaces. After some preliminaries, we will focus on the action of the automorphism group of such a surface on its Picard group, which is an important tool for our study. Its kernel is a complex linear algebraic group and we contribute to its study: on the one hand, we establish a general solvability criterion for it ; on the other hand, we determine completely its structure for blow-ups of  $\mathbb{P}^2$  at distinct points. We conclude this chapter by presenting the main properties of the group of isometries of  $\text{Pic } X$  induced by the automorphisms of a rational surface  $X$ : its inclusion in the Weyl group  $W_X$  defined in Chapter 1, its dynamical properties, in connection with hyperbolic geometry and topological entropy, and finally the existence of a Tits alternative for this group as shown by Zhang in [Zha08, 1.6].

### 2.1 Preliminaries

#### 2.1.1 Automorphisms of minimal rational surfaces

##### Theorem 2.1. (Automorphisms of $\mathbb{P}^n$ )

For all  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Aut } \mathbb{P}^n \simeq \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{C}).$$

*Proof.* Cf. [Har77, II. Example 7.1.1]. □

**Theorem 2.2. (Automorphisms of  $\mathcal{F}_0$ )** *We have the following exact sequence:*

$$0 \rightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{i} \text{Aut } \mathcal{F}_0 \xrightarrow{p} \langle \tau \rangle \rightarrow 0$$

where  $\langle \tau \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  with  $\tau : (p, q) \mapsto (q, p)$  (for  $p$  and  $q \in \mathbb{P}^1$ ).

In fact, every element of  $\text{Aut } \mathcal{F}_0$  is of the form  $\varphi \times \psi$  or  $(\varphi \times \psi) \circ \tau$  for  $\varphi, \psi \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ .

*Proof.* This is a classical Theorem for which we could not find any reference, therefore we propose a proof of it. Let us denote by  $H$  the class of  $\mathbb{P}^1 \times \{[0 : 1]\}$  in  $\text{Pic } \mathcal{F}_0$  and by  $H'$  the class of  $\{[0 : 1]\} \times \mathbb{P}^1$ . Recall that  $\text{Pic } \mathcal{F}_0 = \mathbb{Z}.H \oplus \mathbb{Z}.H'$ .

If  $\varphi \in \text{Aut } (\mathcal{F}_0)$ , then  $\varphi$  is an isometry for the intersection form, thus

$$(\varphi^*H)^2 = H^2 = 0 ; (\varphi^*H')^2 = (H')^2 = 0 ; (\varphi^*H).(\varphi^*H') = H.H' = 1$$

Hence, if  $\varphi^*H = aH + bH'$  and  $\varphi^*H' = a'H + b'H'$ , we see that  $\{(a, b), (a', b')\} \subseteq \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}$ . Since the line bundles  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_0}(-H)$  and  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_0}(-H')$  have no global sections and since  $\varphi^*$  preserves effectiveness, we obtain  $\{(a, b), (a', b')\} \subseteq \{(0, 1), (1, 0)\}$ , i.e.  $\varphi^*$  induces a permutation of  $\{H; H'\}$ . This gives a morphism  $\rho : \text{Aut } \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; \varphi \mapsto \varphi^*$ . Its kernel is exactly the set of automorphisms fixing the two classes  $H$  and  $H'$ : in other words, it is the set of automorphisms preserving the two  $\mathbb{P}^1$ -bundles (so they induce an automorphism of each of the two components of the product  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ). Thus, we conclude that  $\text{Ker } \rho = \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ . □

**Theorem 2.3. (Automorphisms of Hirzebruch surfaces)**

For all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$

$$\boxed{\text{Aut } \mathcal{F}_n \simeq \mathbb{C}^{n+1} \rtimes (\text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n)}$$

where

- $\mathbb{C}^{n+1}$  corresponds to the space of homogeneous polynomials of degree  $n$  in 2 variables ;
- $\text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n$  acts naturally on this space of polynomials by pre-composition (we denote by  $\mu_n := \{\lambda I_2 \mid \lambda^n = 1\}$ )
- $\text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n \simeq \begin{cases} \mathbb{C}^* \rtimes \text{PGL}_2(\mathbb{C}) & \text{if } n \text{ is even} \\ \mathbb{C}^* \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{C}) & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$

Explicitly, every automorphism of  $\mathcal{F}_n = \{([x : y : z], [u : v]) \in \mathbb{P}(1, 1, n) \times \mathbb{P}^1 \mid xv = yu\}$  writes as

$$(2.1) \quad \varphi : ([x : y : z], [u : v]) \mapsto ([ax + by : cx + dy : ez + f_n(x, y)], [au + bv : cu + dv])$$

where  $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$  and  $f_n \in \mathbb{C}[x, y]$  is an homogeneous polynomial of degree  $n$ .

*Proof.* Recall (cf. 1.4) that  $\mathcal{F}_n$  is the blow-up of the weighted projective plane  $\mathbb{P}_n^2 := \mathbb{P}(1, 1, n)$  at its unique singular point (which is thus fixed by the automorphisms of  $\mathbb{P}_n^2$ ) so  $\text{Aut } \mathcal{F}_n \simeq \text{Aut } \mathbb{P}_n^2$ . For proving it, we use the universal property of blowing-up which is very general (cf. [Liu02, 8.1.16]) and the universal property of blowing-down (cf. 2.6) which is valid for normal surfaces as  $\mathbb{P}_n^2$  (cf. [Dol82, 1.3.3]). This argument completes the proof of [DI09, Th. 4.10]. Finally, we describe  $\text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n$ :

- if  $n$  is even, the map

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{C}^* \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} & \rightarrow & \mathbb{C}^*/\mu_n \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} & \rightarrow & \text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n \\ (\lambda, [A]) & \mapsto & (\lambda^{1/n} \text{ mod } \mu_n, [A]) & \mapsto & \lambda^{1/n} A \text{ mod } \mu_n \end{cases}$$

is an isomorphism ;

- if  $n$  is odd, the map

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{C}^* \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{C}^*/\mu_n \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{C}) & \rightarrow & \text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n \\ (\lambda, A) & \mapsto & (\lambda^{1/n} \text{ mod } \mu_n, A) & \mapsto & \lambda^{1/n} A \text{ mod } \mu_n \end{cases}$$

is an isomorphism.

□

**2.1.2 Universal properties and applications**

The universal properties of blowing-up and blowing-down we will now study are particularly important: they enable, under natural assumptions, lifting an automorphism of a surface on one of its blow-ups or conversely descending an automorphism of a blow-up on the initial surface.

We begin by a first result which can be found in [Liu02, 8.1.16] or [Har77, II.7.14, V.5.3]:

**Theorem 2.4. (Universal property of blowing-up)**

If  $f : X \rightarrow S$  is a birational morphism of smooth projective complex surfaces such that  $f^{-1}$  is not defined at  $p \in S$  then there exists a unique birational morphism  $g : X \rightarrow \widehat{S}$  such that  $f = \varepsilon \circ g$  (where  $\varepsilon : \widehat{S} \rightarrow S$  is the blowing-up of  $S$  at  $p$ ). Thus,  $\varepsilon : \widehat{S} \rightarrow S$  is unique up to isomorphism. □

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow f & \searrow g & \\ & & \widehat{S} \\ & \swarrow \varepsilon & \\ & & S \end{array}$$

In practice, we use this universal property through its following corollary:

**Corollary 2.5. (Lifting of automorphisms)**

If  $\varepsilon : \widehat{S} \rightarrow S$  is the blow-up of a smooth projective complex surface  $S$  at a point  $p$  and if  $\varphi \in \text{Aut } S$  fixes  $p$ , then  $\varphi$  lifts as  $\widehat{\varphi} \in \text{Aut } \widehat{S}$ , i.e. there exists a unique  $\widehat{\varphi} \in \text{Aut } \widehat{S}$  such that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{S} & \xrightarrow{\widehat{\varphi}} & \widehat{S} \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ S & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

Moreover, if  $E$  is the exceptional curve of  $\varepsilon$ , then  $\widehat{\varphi}(E) = E$ .

*Proof.* • We begin by applying the previous theorem to  $(\varphi \circ \varepsilon)^{-1}$ : since  $\varphi \circ \varepsilon$  is not defined at  $\varphi^{-1}(p) = p$ , this theorem gives the existence and the uniqueness of a morphism  $\widehat{\varphi} : \widehat{S} \rightarrow \widehat{S}$  such that the previous diagram commutes.

- By applying the previous theorem to  $\varphi^{-1} \circ \varepsilon$ , we obtain a morphism  $\widehat{\psi} : \widehat{S} \rightarrow \widehat{S}$  lifting  $\varphi^{-1}$ .
- By applying the previous theorem to  $\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \varepsilon$  and to  $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varepsilon$ , we obtain the existence and uniqueness of liftings of  $\varphi^{-1} \circ \varphi$  and  $\varphi \circ \varphi^{-1}$ . Thus  $\widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi} = \widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi} = \text{Id}$  and  $\widehat{\varphi}$  is an automorphism of  $\widehat{S}$ .
- Finally, let us show that  $\widehat{\varphi}(E) = E$ . We see that  $\varepsilon \circ \widehat{\varphi}(E) = \varphi \circ \varepsilon(E) = \varphi(p) = p$  so  $\widehat{\varphi}(E) \subseteq \varepsilon^{-1}(p) = E$ . Since  $E$  is an irreducible curve and since  $\widehat{\varphi}$  is an automorphism, its image is an irreducible curve contained in  $E$  so  $\widehat{\varphi}(E) = E$ . □

**Theorem 2.6. (Universal property of blowing-down)**

If  $\varepsilon : \widehat{S} \rightarrow S$  is the blowing-down of an exceptional curve  $E$  on a smooth projective complex surface  $S$  and if  $X$  is a smooth projective complex surface, then every morphism  $f : \widehat{S} \rightarrow X$  which blows-down  $E$  on a point factors uniquely as  $g \circ \varepsilon$ , where  $g$  is a morphism from  $S$  to  $X$ . Thus, the surface obtained by blowing-down a given exceptional curve is unique up to isomorphism.

$$\begin{array}{ccc} & \widehat{S} & \\ \varepsilon \swarrow & & \downarrow f \\ S & & X \\ g \searrow & & \end{array}$$

*Proof.* We recall the proof of [Bea78, II.13]. One can suppose that  $X$  is affine and even  $X = \mathbb{A}^n$ : the components of  $f \circ \varepsilon^{-1} : S \dashrightarrow X$  are regular functions on  $S \setminus \{p\}$ . Thus, they have a unique extension on  $S$  because the surface  $S$  is normal (cf. [Liu02, 4.1.14]). □

In practice, we use this universal property through its following corollary:

**Corollary 2.7. (Descent of automorphisms)**

If  $\varepsilon : \widehat{S} \rightarrow S$  is the blowing-down of an exceptional curve  $E$  on a smooth projective complex surface  $\widehat{S}$  and if  $\varphi \in \text{Aut } \widehat{S}$  stabilizes  $E$  (i.e.  $\varphi(E) = E$ ), then  $\varphi$  descends to  $\varphi_0 \in \text{Aut } S$ , i.e. there exists a unique  $\varphi_0 \in \text{Aut } S$  such that the diagram below commutes. Moreover, if  $p = \varepsilon(E)$ , then  $\varphi_0(p) = p$ .

$$\begin{array}{ccc} \widehat{S} & \xrightarrow{\varphi} & \widehat{S} \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ S & \xrightarrow{\varphi_0} & S \end{array}$$

*Proof.* • We begin by applying the previous theorem to  $\varepsilon \circ \varphi$ : since  $\varepsilon \circ \varphi(E) = \varepsilon(E) = p$ , this theorem gives the existence and the uniqueness of a morphism  $\varphi_0 : S \rightarrow S$  such that the previous diagram commutes.

- By applying the previous theorem to  $\varepsilon \circ \varphi^{-1}$ , we obtain a morphism  $\psi_0 : S \rightarrow S$  induced by  $\varphi^{-1}$ .
- By applying the previous theorem to  $\varepsilon \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$  and to  $\varepsilon \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ , we obtain the existence and uniqueness of the morphisms induced by  $\varphi^{-1} \circ \varphi$  and by  $\varphi \circ \varphi^{-1}$ . So  $\varphi_0 \circ \psi_0 = \psi_0 \circ \varphi_0 = \text{Id}$  and  $\varphi_0$  is an automorphism of  $S$ .
- Finally,  $\varphi_0(p) = \varphi_0 \circ \varepsilon(E) = \varepsilon \circ \varphi(E) = \varepsilon(E) = p$ .

□

The corollaries 2.5 and 2.7 give directly the following result:

**Corollary 2.8.** *If  $\varepsilon : \widehat{S} \rightarrow S$  is the blow-up of a smooth projective complex surface  $S$  at a point  $p$  and if  $E = \varepsilon^{-1}(p)$ , then the groups  $\text{Aut}_E(\widehat{S}) := \{\varphi \in \text{Aut } \widehat{S} \mid \varphi(E) = E\}$  and  $\text{Aut}_p(S) := \{\varphi \in \text{Aut } S \mid \varphi(p) = p\}$  are isomorphic:*

$$\text{Aut}_E(\widehat{S}) \simeq \text{Aut}_p(S).$$

□

### 2.1.3 Computation of automorphism groups of blow-ups of $\mathbb{P}^2$ at few points

We will now compute the automorphism groups of blow-ups of  $\mathbb{P}^2$  at 3 distinct points (or less) of  $\mathbb{P}^2$ , before giving a finiteness result for blow-ups at 4 to 8 distinct points (cf. 2.28). We will also study the case of the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at a first point followed by an infinitely near point. All these computations will be useful in the section 4.2 where we compute the classes of real structures on these surfaces.

*Convention:* If  $X$  is a complex variety and if  $p_1, \dots, p_n \in X(\mathbb{C})$ , we will denote by  $\text{Aut } X$  the group  $\text{Aut}_{\mathbb{C}} X$ ,

$$\text{Aut}_{\{p_1, \dots, p_n\}} X := \{\varphi \in \text{Aut } X \mid \varphi(\{p_1, \dots, p_n\}) = \{p_1, \dots, p_n\}\}$$

and

$$\text{Aut}_{p_1, \dots, p_n} X := \{\varphi \in \text{Aut } X \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \varphi(p_i) = p_i\}.$$

**Proposition 2.9. (1 point -  $\mathcal{F}_1$ )** *Let  $p_0 = [0 : 0 : 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  and  $X_1$  the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at  $p$ .*

$$\text{Aut } X_1 \simeq \text{Aut}_p \mathbb{P}^2 \simeq \text{Aut}_{p_0} \mathbb{P}^2 \simeq \left\{ \left[ \begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{array} \right], \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}), (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

*Proof.* Since  $X_1$  contains only one  $(-1)$ -curve, namely the exceptional divisor  $E$  of the blow-up at  $p$ , we see that  $\text{Aut } X_1 = \text{Aut}_E X_1 \simeq \text{Aut}_p \mathbb{P}^2$  by 2.8. Conjugating by an automorphism  $\varphi \in \text{Aut } \mathbb{P}^2$  such that

$$\varphi(p) = p_0, \text{ we obtain } \text{Aut}_p \mathbb{P}^2 \simeq \text{Aut}_{p_0} \mathbb{P}^2 \simeq \left\{ \left[ \begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{array} \right], \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}), (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}. \quad \square$$

**Proposition 2.10. (2 distinct points)**

*Let  $p_1$  and  $p_2$  be two distinct points of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  and let  $X$  be the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at these points.*

$$\text{Aut } X \simeq \text{Aut}_{\{p_1, p_2\}} \mathbb{P}^2 \simeq (\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq (\text{Aut } \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1)^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

*Proof.*  $X$  contains three exceptional curves drawn below: the exceptional divisors  $E_1$  et  $E_2$  above the points  $p_1$  and  $p_2$  respectively together with the strict transform  $L$  of the line  $(p_1 p_2)$ . Thus, for intersection reasons, every automorphism of  $X$  stabilizes  $\{E_1, E_2\}$  and induces an automorphism of  $\mathbb{P}^2$  which stabilizes  $\{p_1, p_2\}$  by Theorem 2.6.

$$\begin{array}{ccc}
& E_1 & E_2 \\
& | & | \\
& -1 & -1 \\
\hline
& L & \\
& -1 & 
\end{array}$$

Up to change of coordinates in  $\mathbb{P}^2$ , we can assume that  $p_1 = [1 : 0 : 0]$  and  $p_2 = [0 : 1 : 0]$ . Then we define the group morphism  $\text{Aut}_{\{p_1, p_2\}}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  which maps an automorphism  $\varphi \in \text{Aut}_{\{p_1, p_2\}}\mathbb{P}^2$  to the permutation of  $\{p_1, p_2\}$  it induces. This morphism is clearly surjective of kernel

$$\text{Aut}_{p_1, p_2}\mathbb{P}^2 \simeq \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \lambda \\ \beta & \delta \\ & 1 \end{bmatrix}, (\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2, (\lambda, \delta) \in \mathbb{C}^2 \right\} \simeq \mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2$$

The last isomorphism is obtained by noting that the product of two matrices of the type described above gives the group law

$$\left( \begin{bmatrix} \lambda \\ \delta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right) * \left( \begin{bmatrix} \lambda' \\ \delta' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} \right) = \left( \begin{bmatrix} \lambda + \alpha\lambda' \\ \delta + \beta\delta' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha\alpha' \\ \beta\beta' \end{bmatrix} \right)$$

which is a law of semidirect product. Finally, note that the extension of  $\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2$  by  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  is split by  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}_{\{p_1, p_2\}}\mathbb{P}^2$ ,  $1 \mapsto \tau$ , where  $\tau : [x : y : z] \mapsto [y : x : z]$  interchanges  $p_1$  and  $p_2$ .  $\square$

**Remark 2.11.** We could also blow-down  $L$  in order to show that  $\text{Aut } X \simeq \text{Aut}_p\mathcal{F}_0$ , where  $\{p\}$  is the image of  $L$  by this blow-down.

**Proposition 2.12. (2 infinitely near points)**

Let  $p_1 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ,  $X_1$  be the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at  $p_1$ ,  $E \subseteq X_1$  the exceptional divisor above  $p_1$ ,  $p_2 \in E$  and  $X$  the blow-up of  $X_1$  at  $p_2$ .

$$\text{Aut } X \simeq \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{C}) \right\}$$

Moreover, we can decompose this group as follows (the morphism  $\text{Aut } X \rightarrow (\mathbb{C}^*)^2$  is  $\begin{bmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & 1 \end{bmatrix} \mapsto {}^t[a \ d], \mathcal{A}$

is its kernel and the morphism  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}^2$  is  $\begin{bmatrix} 1 & b & c \\ & 1 & e \\ & & 1 \end{bmatrix} \mapsto {}^t[b \ e]$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 1 & & 1 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \mathbb{C} & & \mathbb{C}^* & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \text{Aut } X & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*)^2 \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \mathbb{C}^2 & & \mathbb{C}^* & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 1 & & 1 & & 
\end{array}$$

*Proof.* Up to change of coordinates in  $\mathbb{P}^2$ , we can assume that  $p_1 = [1 : 0 : 0]$  and that  $p_2$  corresponds to the direction of the line  $D : (z = 0)$ . Since  $X$  contains only one  $(-1)$ -curve  $C$ , namely the exceptional curve above  $p_2$ , together with only one  $(-2)$ -curve which is the strict transform  $\widehat{E}$  of  $E$  in  $X$ , we see that every automorphism of  $X$  stabilizes  $C$  and  $\widehat{E}$  and thus induces an automorphism of  $X_1$  fixing  $p_2$  and  $E$  which itself induces an automorphism of  $\mathbb{P}^2$  fixing  $p_1$  and  $D$  (since it fixes the direction of  $D$  and since it maps lines on lines as every automorphism of  $\mathbb{P}^2$ ). Then we obtain the desired result.  $\square$

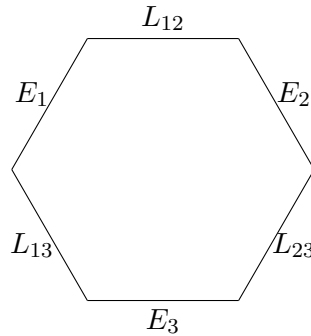
The next result can be found in [Bla06, 6.3.3]:

**Proposition 2.13. (3 non-collinear points)**

Let  $p_1, p_2$  and  $p_3$  be three non-collinear points of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  and let  $X$  be the blowup of  $\mathbb{P}^2$  at these points.

$$\text{Aut } X \simeq (\mathbb{C}^*)^2 \rtimes (\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

*Proof.* We study the action of  $\text{Aut } X$  on the 6 exceptional curves of  $X$  which are the exceptional divisors of  $X \rightarrow \mathbb{P}^2$  (we denote by  $E_i$  the one above  $p_i$ ) and the  $L_{ij}$  (the strict transform of the line through  $p_i$  and  $p_j$ ).



If  $\varphi \in \text{Aut } X$  belongs to the kernel of this action, then in particular,  $\forall i \in [1; 3], \varphi^*(E_i) = E_i$  so  $\varphi$  induces an automorphism of  $\mathbb{P}^2$  fixing the  $p_i$ . Up to change of coordinates, we can assume that  $p_1 = [1 : 0 : 0]$ ,  $p_2 = [0 : 1 : 0]$  and  $p_3 = [0 : 0 : 1]$  and thus we obtain a kernel isomorphic to

$$\left\{ \left[ \begin{array}{ccc} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & 1 \end{array} \right], \alpha, \beta \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Thanks to permutation matrices, we can construct projectivities which permute the  $p_i$ 's: this gives the factor  $\mathcal{S}_3$ . Finally, the quadratic transformation

$$\tau : [x : y : z] \mapsto \left[ \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \right] = [yz : xz : xy]$$

based at  $p_1, p_2, p_3$  gives us the factor  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . It permutes the  $E_i$ 's and the  $L_{jk}$ 's by interchanging the opposite sides (by pairs) of the hexagon above. It remains to show that these are the only possible permutations, i.e. that the morphism  $\text{Aut } X \rightarrow \mathcal{S}_6$  induced by the action of  $X$  on the 6 exceptional curves has an image equal to  $\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ : using what we did above, we will obtain that  $\text{Aut } X$  is an extension of  $(\mathbb{C}^*)^2$  by  $\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  and that the permutation matrices and the transformation  $\tau$  give a splitting of the extension, which is thus a semi-direct product, and this will conclude the proof.

For this purpose, it suffices to check that they are the only permutations of the 6 sides which respect adjacency relation (i.e. which are isometries for the intersection form). But one can check that such a permutation preserving adjacency is entirely determined by its action on  $E_1$  and  $L_{12}$ . This gives the possibilities indicated in the following table (for a  $\varphi \in \text{Aut } X$ ):

|                   |          |          |          |          |          |          |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\varphi(E_1)$    | $E_1$    | $E_2$    | $E_3$    | $L_{12}$ | $L_{13}$ | $L_{23}$ |
| $\varphi(L_{12})$ | $L_{12}$ | $L_{13}$ | $L_{12}$ | $L_{23}$ | $L_{13}$ | $L_{23}$ |
| $\varphi(E_2)$    | $E_2$    | $E_3$    | $E_1$    | $E_3$    | $E_1$    | $E_2$    |
| $\varphi(L_{13})$ | $L_{13}$ | $L_{12}$ | $L_{23}$ | $L_{12}$ | $L_{23}$ | $L_{13}$ |
| $\varphi(E_3)$    | $E_3$    | $E_2$    | $E_3$    | $E_1$    | $E_2$    | $E_1$    |
| $\varphi(L_{23})$ | $L_{23}$ | $L_{23}$ | $L_{13}$ | $L_{13}$ | $L_{12}$ | $L_{12}$ |

We obtain 12 possibilities; since  $\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  is of order 12, this concludes the proof.  $\square$

**Remark 2.14.** The example we have just seen is perhaps the most interesting of all this subsection: indeed, it is the only one of our examples in which we see the appearance of automorphisms of  $X$  which do not induce automorphisms of  $\mathbb{P}^2$  (especially quadratic transformation  $\tau$ ). Moreover, the group  $\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  is actually the Weyl group  $W_X$  for  $r = 3$  since it is generated by automorphisms of  $X$  whose action on  $\text{Pic } X$  is either a permutation of the  $E_i$ 's,  $i \geq 1$  (this gives the  $s_{\alpha_i}$ 's,  $i \geq 1$ ) or the action of  $\tau$  (for which one can check that it corresponds to  $s_{\alpha_0}$ ; see 1.10 and 1.13).

**Proposition 2.15. (3 collinear points)**

Let  $p_1, p_2$  and  $p_3$  be 3 collinear points of  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  and let  $X$  be the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at these points.

There is an exact sequence:

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{Aut } X \simeq \text{Aut}_{\{p_1, p_2, p_3\}} \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathcal{S}_3 \rightarrow 1$$

*Proof.* The only exceptional curves on  $X$  are the 3 exceptional divisors  $E_1, E_2, E_3$  above the points  $p_1, p_2, p_3$ . Thus, every automorphism permutes the  $E_i$ 's and induces an automorphism of  $\mathbb{P}^2$  permuting the  $p_i$ 's. Up to change of coordinates, we can assume that  $p_1 = [1 : 0 : 0]$ ,  $p_2 = [0 : 1 : 0]$  and  $p_3 = [1 : 1 : 0]$ ; in particular, they belong to the same line  $\mathcal{D} : (z = 0)$ . We saw in the proof of the Theorem 2.10 that the projectivities fixing  $p_1$  et  $p_2$  have a matrix of the form

$$\begin{bmatrix} \alpha & \lambda \\ \beta & \delta \\ & 1 \end{bmatrix}, (\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2, (\lambda, \delta) \in \mathbb{C}^2.$$

Moreover, it is clear that such a projectivity fixes  $p_3$  if and only if  $\alpha = \beta$ . Thus the kernel of the morphism  $\text{Aut } X \rightarrow \mathcal{S}_3$  induced by the permutations of the  $p_i$ 's is isomorphic to  $\mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^*$ . Finally, if  $\varphi \in \text{Aut}_{\{p_1, p_2, p_3\}} \mathbb{P}^2$ , then  $\varphi|_{\mathcal{D}}$  is an automorphism of  $\mathcal{D} \simeq \mathbb{P}^1$  and thus, it is uniquely determined by its action on the  $p_i$ 's which are in general position on the projective line  $\mathcal{D}$ : this shows that all the permutations of the  $p_i$ 's are possible, as we can see by finding explicit appropriate matrices: for example, the transposition  $(p_1 p_3)$  corresponds to

the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  and the cycle  $(p_1 p_2 p_3)$  corresponds to  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .  $\square$

— \* \* \* —

In all the cases handled above, the computation of the automorphism group used the study of its action on the set of exceptional curves of the surface: systematically, we had to study the kernel of this action — a linear algebraic group — together with its image — a finite group. As we shall see now, this idea can be generalized to all rational surfaces (but it is not always so successful). If it is not so simple to determine the set of exceptional curves on a general rational surface (before studying its automorphisms), one can however analyze the action of its automorphism group on its Picard group and once again, studying separately kernel and image of this action will be important.

## 2.2 Action of $\text{Aut } X$ on the Picard group

In addition to the universal properties of blowing-up and blowing-down we have seen before, another important tool for the study of the automorphism group of a rational surface is the action of this group on the Picard group of this surface:

**Theorem and Definition 2.16.** Let  $X$  be a smooth complex projective variety.

$\text{Aut } X$  acts isometrically on  $\text{Pic } X$ : if  $\varphi \in \text{Aut } X$ ,  $\varphi^* \in \text{O}(\text{Pic } X)$  and we obtain a morphism<sup>1</sup>

$$p : \begin{cases} \text{Aut } X & \rightarrow & \text{O}(\text{Pic } X) \\ \varphi & \mapsto & (\varphi^{-1})^* \end{cases}$$

Following [Har87b], we will denote by  $\text{Aut}^\# X$  its kernel and by  $\text{Aut}^* X$  its image.  $\square$

1. Please note that  $\varphi \mapsto \varphi^*$  does not define a morphism; cf. 5.3.

Harbourne showed in [Har87b] a quite remarkable property of these two groups in the case of rational surfaces:

**Theorem 2.17.** *Let  $X$  be a rational surface.*

- If  $\text{Aut}^* X$  is infinite, then  $X$  has an infinite number of exceptional curves.
- If  $\text{Aut}^\# X$  is infinite, then  $X$  has only a finite number of exceptional curves.
- $\text{Aut}^\# X$  and  $\text{Aut}^* X$  cannot be simultaneously infinite. □

Therefore, it seems natural to decompose the study of automorphism groups of rational surfaces in two steps: firstly, we will study  $\text{Aut}^\#$ , i.e. the automorphisms acting trivially on the Picard group, and then we will study  $\text{Aut}^*$ , i.e. the isometries of  $\text{Pic } X$  induced by the automorphisms. As we shall see later, these two groups are quite different: for a rational surface  $X$ ,  $\text{Aut}^\# X$  is a linear algebraic group whereas  $\text{Aut}^* X$  is a discrete group, since it is a subgroup of the isometry group of the group  $\text{Pic } X$  (which is free abelian when  $X$  is a rational surface).

## 2.3 $\text{Aut}^\#$

In this section, we gather our own results about the group  $\text{Aut}^\# X$ , for a rational surface  $X$ . Firstly, we establish a characterization of rational surfaces whose  $\text{Aut}^\#$  is solvable. Then, we compute  $\text{Aut}^\# X$  for every simultaneous blow-up of  $\mathbb{P}^2$ .

### 2.3.1 Solvability of $\text{Aut}^\#$

The aim of this subsection is to prove the following theorem:

**Theorem 2.18.** *Let  $X$  be a rational surface.*

$\text{Aut}^\# X$  is solvable if, and only if, the Picard group of  $X$  is of rank at least 3.

#### Solvability of $\text{Aut}^\# X$ : basic rational surfaces

We begin with the following simple lemma which is the basic tool for our purposes ; in particular, note that the equality (2.2) in the proof below may help to understand  $\text{Aut}^\# X$  :

**Lemma 2.19.** *Let  $X$  and  $X'$  be two basic rational surfaces.*

*If  $X'$  dominates  $X$ , then  $\text{Aut}^\# X'$  injects into  $\text{Aut}^\# X$  and can be identified with an algebraic subgroup of  $\text{Aut}^\# X$ .*

*Proof.* Let us fix the notations:

- we denote by  $\{p_1, \dots, p_r\}$  a point set<sup>2</sup> over  $\mathbb{P}^2$  whose blow-up is  $X$ ,  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  the associated blow-down morphism and  $(E_0, E_1, \dots, E_r)$  the associated basis of  $\text{Pic } X$  (i.e.  $E_0$  is the class of the total transform of a general line of  $\mathbb{P}^2$  and, for  $i \geq 1$ ,  $E_i$  is the class of  $\pi_i^{-1}(p_i)$ , where  $X_i$  is a blow-up (maybe trivial) of  $\mathbb{P}^2$  containing  $p_i$  and  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  is the birational morphism corresponding to the blowing-up of  $p_i$  and of all the points infinitely near  $p_i$ ) ;
- in the same way, we denote by  $\{p_1, \dots, p_r, \dots, p_s\}$ ,  $s > r$ , a point set over  $\mathbb{P}^2$  whose blow-up is  $X'$ ,  $\pi' : X' \rightarrow \mathbb{P}^2$  the associated blow-down morphism and  $(E'_0, E'_1, \dots, E'_r, \dots, E'_s)$  the associated basis of  $\text{Pic } X'$ .

If  $\varepsilon : X' \rightarrow X$  is the blow-up of  $X$  at  $p_{r+1}, \dots, p_s$ , then  $\pi' = \pi \circ \varepsilon$  and  $\forall i \in \llbracket 0; r \rrbracket$ ,  $E'_i = \varepsilon^*(E_i)$ . But, if  $\varphi \in \text{Aut}^\# X'$ , then  $\varphi^*$  stabilizes each of  $E'_{r+1}, \dots, E'_s$  so, by universal property of blowing-down (see 2.6 and 2.7) applied to  $\varepsilon \circ \varphi$  and  $\varepsilon \circ \varphi^{-1}$ ,  $\varphi$  induces a unique  $\varphi_1 \in \text{Aut } X$  such that  $\forall i \in \llbracket 0; r \rrbracket$ ,  $\varphi_1^*(E_i) = E_i$  and  $\forall i \in \llbracket r+1; s \rrbracket$ ,  $\varphi_1(p_i) = p_i$  (if some points are infinitely near, then this means that the corresponding

2. A point set *over* a surface  $X$  is a set of points which are either on  $X$  or infinitely near of  $X$ .

tangent directions are preserved). Conversely, if  $\varphi_1$  satisfies these conditions, then, by universal property of blowing-up (cf. 2.4 and 2.5),  $\varphi_1$  induces a unique  $\varphi \in \text{Aut } X$ , which in fact belongs to  $\text{Aut}^\# X$ . Consequently,

$$(2.2) \quad \text{Aut}^\# X' \simeq \{\varphi_1 \in \text{Aut } X \mid \forall i \leq r, \varphi_1^*(E_i) = E_i \text{ and } \forall i > r, \varphi_1(p_i) = p_i\}$$

is an algebraic subgroup of  $\text{Aut}^\# X = \{\varphi_1 \in \text{Aut } X \mid \forall i \leq r, \varphi_1^*(E_i) = E_i\}$ .  $\square$

**Proposition 2.20.** *If  $X$  is a blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at  $r \geq 2$  points, then  $\text{Aut}^\# X$  is solvable.*

*Proof.* Let us denote by  $\{p_1, \dots, p_r\}$  a point set over  $\mathbb{P}^2$  whose blow-up is  $X$ . We consider two cases:

- *If at least 2 of the points  $p_i$  belong to  $\mathbb{P}^2$ :* we can suppose that these two points are  $p_1$  and  $p_2$  and if we denote by  $X_2$  the surface obtained by blowing-up  $p_1$  and  $p_2$ , the previous lemma shows that  $\text{Aut}^\# X \hookrightarrow \text{Aut}^\# X_2$ . Using universal properties of blowing-up and blowing-down as in the proof of the lemma, we see that

$$\text{Aut}^\# X_2 \simeq \{\varphi_0 \in \text{Aut } \mathbb{P}^2 \mid \varphi_0(p_1) = p_1, \varphi_0(p_2) = p_2\}.$$

Up to change of coordinates, one can suppose that  $p_1 = [1 : 0 : 0]$  and  $p_2 = [0 : 1 : 0]$ , and then we easily verify that  $\text{Aut}^\# X_2 \simeq \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & & \lambda \\ & \beta & \delta \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{C}) \right\} =: A$ . Now, this group is isomorphic to  $\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2$ .

To prove this, we simply remark that an element of  $A$  corresponds to the transformation of  $\mathbb{P}^2$  given by  $[x : y : z] \mapsto [\alpha x + \lambda z : \beta y + \delta z : z]$ , that is  $f : (x, y) \mapsto (\alpha x + \lambda, \beta y + \delta)$ . In the open subset  $U = (z \neq 0)$ , the map  $f$  is an affine automorphism of  $U$ , i.e.  $f \in \mathbb{C}^2 \rtimes \text{GL}_2(\mathbb{C})$ , hence the result holds because  $A \cap \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2$  and  $A \cap \text{GL}_2(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^*)^2$  and because the group law of  $A$  is really a semidirect product law (cf. proof of 2.10). Finally,  $\text{Aut}^\# X_2 \simeq \mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2$  is solvable and thus  $\text{Aut}^\# X$  is solvable as a subgroup of a solvable group.

- *If exactly one of the  $p_i$  belongs to  $\mathbb{P}^2$ :* we denote this point by  $p_1$  and then, all other points are infinitely near it. Fix a point  $p_2$  which is infinitely near of the first order: this point corresponds to a tangent direction at  $p_1 \in \mathbb{P}^2$ , that is, to a line  $\mathcal{D}$  of  $\mathbb{P}^2$ . As a result, if  $X_2$  denotes the surface obtained by blowing-up  $p_1$  and  $p_2$ , then the lemma shows that  $\text{Aut}^\# X \hookrightarrow \text{Aut}^\# X_2 \simeq \{\varphi_0 \in \text{Aut } \mathbb{P}^2 \mid \varphi_0(p_1) = p_1, \varphi_0(\mathcal{D}) = \mathcal{D}\}$ . Up to change of coordinates, one can suppose that  $p_1 = [1 : 0 : 0]$  and  $\mathcal{D} = \{[x : y : 0] \in \mathbb{P}^2\}$ . Thus, if  $\varphi_0 \in \text{Aut } \mathbb{P}^2$  fixes

$p_1$ , then  $\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \alpha & & 1 \end{bmatrix}$  is a matrix of  $\varphi_0$ . Moreover,

$$\varphi_0(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \iff (\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0; 0)\}, \varphi_0([x : y : 0]) = [* : * : \alpha \cdot y + 0] = [* : * : 0]) \iff \alpha = 0$$

so  $\text{Aut}^\# X_2 \simeq \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{C}) \right\}$ : this is clearly a subgroup of  $T_3(\mathbb{C})$ , where  $T_3(\mathbb{C})$  denotes the group

of upper triangular matrices in  $\text{GL}_3(\mathbb{C})$ . We can thus conclude that  $\text{Aut}^\# X_2$  is solvable and  $\text{Aut}^\# X$  is also solvable, as a subgroup of the solvable group  $T_3(\mathbb{C})$ .  $\square$

### Solvability of $\text{Aut}^\# X$ : non-basic rational surfaces

Recall that a rational surface is called *non-basic* if it does not dominate  $\mathbb{P}^2$ . Thus, such a surface is a blow-up of one of the Hirzebruch surfaces  $\mathcal{F}_n$ ,  $n \neq 1$ <sup>3</sup>. We denote by  $h_\infty := \{[0 : 0 : 1]\} \times \mathbb{P}^1$  the unique curve of negative self-intersection in  $\mathcal{F}_n$ .

By using elementary transformations of Hirzebruch surfaces (cf. [Bea78, III.24.(1)]), one can easily obtain the following result:

**Lemma 2.21.** *Let  $n \in \mathbb{N}$ . If  $X$  is the blow-up of  $\mathcal{F}_n$  at one point  $p$ , then there exists  $N \in \mathbb{N}$  such that  $X$  is a blow-up of the Hirzebruch surface  $\mathcal{F}_N$ , in such a way that the point blown up is on the exceptional section  $h_\infty$  of  $\mathcal{F}_N$ .  $\square$*

3. Note that  $\mathcal{F}_n = \{([x : y : z], [u : v]) \in \mathbb{P}(1, 1, n) \times \mathbb{P}^1 \mid xv = yu\}$  is the blow-up of the weighted projective plane  $\mathbb{P}(1, 1, n)$  at its unique singular point  $[0 : 0 : 1]$ .

As in the previous section, one can show the following lemma (replacing  $E_0$  by the total transform of a basis of  $\text{Pic } \mathcal{F}_n$  in the proof of Lemma 2.19):

**Lemma 2.22.** *Let  $X$  and  $X'$  be two non-basic rational surfaces.*

*If  $X'$  dominates  $X$ , then  $\text{Aut}^\# X'$  injects into  $\text{Aut}^\# X$  and can be identified with an algebraic subgroup of  $\text{Aut}^\# X$ .  $\square$*

**Proposition 2.23.** *Let  $X$  be a non-basic rational surface. If  $X$  is not minimal, then  $\text{Aut}^\# X$  is solvable.*

*Proof.* Let  $n \geq 2$  and  $X_n$  be the blow-up of  $\mathcal{F}_n$  at a point  $p \in \mathcal{F}_n$  (note that the blow-up of  $\mathcal{F}_0$  at one point is a basic rational surface). By Lemma 2.21, we can always suppose that  $p \in h_\infty$ . Up to change of coordinates on the  $\mathbb{P}^1$  factor of  $\mathbb{P}(1, 1, n) \times \mathbb{P}^1$ , we can assume that  $p = ([0 : 0 : 1], [1 : 0]) \in \mathcal{F}_n$ . If  $\varphi \in \text{Aut } \mathcal{F}_n$  is written as in (2.1), then  $\varphi(p) = p \iff c = 0$ . Again using universal properties of blowing-up and blowing-down,  $\text{Aut}^\# X_n \simeq \mathbb{C}^{n+1} \times T_2(\mathbb{C})/\mu_n$ . Thus,  $\text{Aut}^\# X_n$  is solvable. But a non-basic rational surface which is not minimal is an  $X_n$  or a blow-up of an  $X_n$ . Since the previous lemma allows us to identify  $\text{Aut}^\# X$  with a subgroup of  $\text{Aut}^\# X_n$ , we conclude that  $\text{Aut}^\# X$  is solvable.  $\square$

*Proof of Theorem 2.18.* Firstly, if  $\text{rk Pic } X \geq 3$ , then  $X$  is either a non-trivial blow-up of an  $\mathcal{F}_n$ , for  $n \geq 2$  or a blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at  $r \geq 2$  points. Note that non-trivial blow-ups of  $\mathcal{F}_0$  belong to the latter case. Propositions 2.20 and 2.23 allow us to conclude that  $\text{Aut}^\# X$  is solvable.

Conversely, if  $\text{rk Pic } X \leq 2$ , then  $\text{Aut}^\# X$  is not solvable: it is well known that  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$  and  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  are simple and equal to their derived subgroups, in particular they are not solvable. Now the structure of the Picard groups of the Hirzebruch surfaces and of  $\mathbb{P}^2$  shows that  $\text{Aut}^\# \mathcal{F}_0 = (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2$ ,  $\text{Aut}^\# \mathcal{F}_n = \text{Aut } \mathcal{F}_n \simeq \mathbb{C}^{n+1} \times (\text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n)$ ,  $\forall n \geq 1$  and  $\text{Aut}^\# \mathbb{P}^2 = \text{Aut } \mathbb{P}^2 = \text{PGL}_3(\mathbb{C})$ : this concludes the proof.  $\square$

### 2.3.2 Case of simultaneous blow-ups

**Proposition 2.24.** *Let  $r \geq 4$ ,  $p_1, \dots, p_r$  be some distinct points in  $\mathbb{P}^2$  and  $X$  the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at  $\mathcal{P} := \{p_1, \dots, p_r\}$ . The following are equivalent:*

1.  $\text{Aut}^\# X$  is infinite;
2.  $\text{Aut}^\# X$  is non-trivial;
3. all the points  $p_i$  are collinear except maybe one (and only one) of them.

*Proof.* Trivially, if  $\text{Aut}^\# X$  is infinite, then it is non-trivial.

Now, we prove the contrapositive of  $2 \Rightarrow 3$ . Firstly, if "all the points  $p_i$  are collinear except maybe one (and only one) of them" is false, then  $\forall i \neq j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ , there exist at least two points which do not belong to the line  $(p_i p_j)$ . In particular, for  $i = 1$  and  $j = 2$ , let us renumber the points of  $\mathcal{P}$  so that  $p_3$  and  $p_4$  do not belong to the line  $(p_1 p_2)$ .

**Claim.** *In this case, we can find 4 points in general position (i.e. without any collinear triple) in  $\mathcal{P}$ .*

If we prove this claim, then  $\text{Aut}^\# X$  is trivial; in fact, using universal properties of blowing-up and blowing-down as in the proof of Lemma 2.19, we see that

$$\text{Aut}^\# X \simeq \{\varphi_0 \in \text{Aut } \mathbb{P}^2 \mid \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \varphi_0(p_i) = p_i\}.$$

and now this is a result of projective geometry.

To prove the claim, we try to show that  $p_1, p_2, p_3, p_4$  are in general position; so we have to verify that any triple is not collinear:

- $p_1, p_2, p_3$ : they are not collinear since  $p_3 \notin (p_1 p_2)$ ;
- $p_1, p_2, p_4$ : they are not collinear since  $p_4 \notin (p_1 p_2)$ ;
- $p_1, p_3, p_4$ : if  $p_1 \notin (p_3 p_4)$ , we are done; otherwise, we have to consider two cases:
  - if  $r = 4$ , then all the points  $p_i$  are collinear except maybe  $p_2$ : absurd;
  - if  $r \geq 5$ , then we can find  $p_5 \notin (p_3 p_4)$  [otherwise, all the points  $p_i$  are collinear except maybe  $p_2$ ] and then, one can verify that:

- either  $p_2, p_3, p_4, p_5$  are in general position;
- or  $p_2, p_3$  and  $p_5$  are collinear; in this case,  $p_1, p_2, p_4, p_5$  are in general position;
- or  $p_2, p_4$  and  $p_5$  are collinear; in this case,  $p_1, p_2, p_3, p_5$  are in general position;
- $p_2, p_3, p_4$ : it is similar to the previous case. More precisely, if  $p_2 \notin (p_3p_4)$ , we are done. Otherwise, we have:
  - either  $p_1, p_3, p_4, p_5$  are in general position;
  - or  $p_1, p_3$  and  $p_5$  are collinear; in this case,  $p_1, p_2, p_4, p_5$  are in general position;
  - or  $p_1, p_4$  and  $p_5$  are collinear; in this case,  $p_1, p_2, p_3, p_5$  are in general position.

Thus, the claim is proved and  $\text{Aut}^\# X$  is trivial if "all the points  $p_i$  are collinear except maybe one (and only one) of them" is false.

Finally, we prove that  $3 \Rightarrow 1$ :

- If all the points in  $\mathcal{P}$  are collinear, then up to a change of coordinates, we can suppose that  $p_1 = [1 : 0 : 0]$ ,  $p_2 = [0 : 1 : 0]$  and  $D := (p_1p_2) = (z = 0)$ . Since  $r \geq 4$ , an element  $\varphi$  of  $\text{Aut}^\# X$  fixes at least four points of  $D$  so that  $\varphi|_D = \text{Id}_D$ . Thus, a matrix of  $\varphi$  is of the form  $\begin{bmatrix} \alpha & \lambda \\ & \beta & \delta \\ & & & 1 \end{bmatrix}$  where  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$  and  $\lambda, \delta \in \mathbb{C}$ . But  $\varphi|_D = \text{Id}_D \Rightarrow \varphi([1 : 1 : 0]) = [1 : 1 : 0] \Rightarrow \alpha = \beta$  and  $\text{Aut}^\# X \simeq \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^*$ ;
- if  $p_3$  is the only point out of  $D$ , then a change of coordinates maps  $p_3$  to  $[0 : 0 : 1]$  and  $\varphi(p_3) = p_3 \Rightarrow \lambda = \delta = 0$  so  $\text{Aut}^\# X \simeq \mathbb{C}^*$ . □

## 2.4 $\text{Aut}^*$

In this section, we study the group  $\text{Aut}^* X$  for a blow-up  $X$  of  $\mathbb{P}^2$ . Let us recall here that this group is the image of the morphism  $\text{Aut} X \rightarrow \text{O}(\text{Pic} X)$  defined in 2.16.

### 2.4.1 Automorphisms and Weyl group

We begin by recalling a classical theorem established by Nagata [Nag61, Cor. p.283]<sup>4</sup>. The reader may find a modern proof of it in [DO88, Chap VI, Th.2 p.90, Lemma 3 p.101] (see also [Har85, Th.0.1] and [Har87a, Cor.2.2]).

**Definition 2.25. (Geometric marking - [DO88, p. 69])**

For  $r \in \mathbb{N}^*$ , we denote by  $\mathbb{Z}^{1,r}$  the group  $\mathbb{Z}^{r+1}$  equipped with the quadratic form  ${}^t[x_0 \dots x_r] \mapsto x_0^2 - \sum_{i=1}^r x_i^2$

and we denote by  $(e_0, e_1, \dots, e_r)$  the canonical basis of  $\mathbb{Z}^{1,r}$ .

A **geometric marking** of a blow-up  $X$  of  $\mathbb{P}^2$  is an isometry  $\varphi : \mathbb{Z}^{1,r} \rightarrow \text{Pic} X$  associated to a birational morphism  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  such that (using the notations of Theorem 1.8):

$$\forall i \in \llbracket 0; r \rrbracket, \varphi(e_i) = E_i.$$

**Theorem 2.26. ([DO88, VI, Th.2])**

Let  $X$  be a blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at  $r$  points.

If  $\varphi : \mathbb{Z}^{1,r} \rightarrow \text{Pic} X$  and  $\psi : \mathbb{Z}^{1,r} \rightarrow \text{Pic} X$  are two geometric markings of  $X$ , then there exists  $w \in W_X$  such that  $\psi = \varphi \circ w$ . □

Thus, we can deduce the following important result:

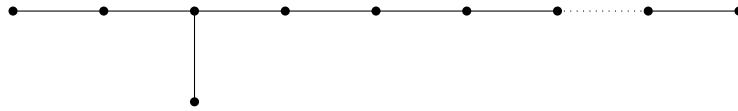
**Corollary 2.27.** Let  $X$  be a blow-up of  $\mathbb{P}^2$ .

---

4. Nagata does not deal explicitly with the Weyl group and talks about "similarity of numerical types", i.e. equivalence under the action of the group generated by the permutations and the transformation  $q$ , and this group is exactly our Weyl group.

$$\text{Aut}^* X \subseteq W_X = W(E_{2,3,r-3}).$$

Here  $E_{2,3,r-3}$  denotes the following Dynkin diagram:



The simple roots are  $\alpha_0 := E_0 - E_1 - E_2 - E_3$  and  $\forall i \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket, \alpha_i = E_i - E_{i+1}$ . □

For more details on this, the reader is referred to the beginning of the Chapter VI of [DO88]. As we saw in 1.14, this Weyl group is finite if and only if  $r \leq 8$ . Thus, we deduce from Proposition 2.24 the following result, which completes the description of automorphism groups of blow-ups of  $\mathbb{P}^2$  at a "little" number of points:

**Proposition 2.28.** *Let  $X$  be a blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at  $r$  points  $p_1, \dots, p_r$ .*

- if  $r \leq 8$ ,  $\text{Aut}^* X$  is finite;
- if  $4 \leq r \leq 8$  and if the  $p_i$  are distinct, then  $\text{Aut} X$  is infinite if and only if all the points  $p_i$  are collinear, except maybe one of them. □

When  $r$  is greater than 8, the situation becomes much richer: we will see that some blow-ups can have a more or less large automorphism group but general blow-ups have very few automorphisms.

**Theorem 2.29.** ([Hir88], [Koi88], [DO88, Cor. p. 104])

Let  $\mathbb{K}$  be an uncountable algebraically closed field.

The  $\mathbb{K}$ -automorphism group of a blow-up of  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$  at  $r \geq 9$  points in general position is trivial. □

Note that, despite appearances, the definition of "general position" in [Hir88] and [DO88] is the same as in [Nag61, p.279] and in [Har77, V.Ex.4.15]. In any case, once the concept of "general position" is defined, the key idea is to show that a set  $\mathcal{P}$  of  $r$  points in general position on a smooth cubic of  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$  is actually in general position in  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$  and, using some computations with restriction of divisors to the strict transform of the cubic, that the blow-up of  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$  at  $\mathcal{P}$  has a trivial automorphism group.

### 2.4.2 Action on $\text{Pic } X$ : dynamics and hyperbolic geometry

In order to describe more precisely the group  $\text{Aut}^* X$  for a rational surface  $X$ , we introduce some hyperbolic geometry and some dynamics. First, we recall the classification of isometries of hyperbolic spaces and we focus on hyperbolic ones, i.e. those having positive topological entropy. Then, we use this classification to give the different possibilities for the structure of  $\text{Aut}^* X$ : as we will see, the presence of automorphisms of positive entropy in  $\text{Aut} X$  indicates in some sense how big is the group  $\text{Aut}^* X$ . In particular, we will see the existence of a Tits-type alternative for  $\text{Aut}^* X$  (cf. Theorem 2.39).

#### Hyperbolic isometries and topological entropy

Let  $X$  be a blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at  $r$  points. Since  $\text{Pic } X$  is a lattice endowed with a symmetric bilinear form of signature  $(1, r)$ , an automorphism of  $X$  induces an isometry of the vector space  $\text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  equipped with the same bilinear form. It gives an isometry of the hyperbolic space  $\mathcal{H}^r := \{v \in \text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid v^2 = 1, v.E_0 > 0\}$  equipped with the distance  $d : (u, v) \mapsto \text{argcosh}(u.v)$  (where  $u.v$  is the intersection product of  $u$  and  $v$ ). More generally, if  $X$  is any complex projective smooth surface and if we replace  $E_0$  by a fixed ample divisor  $H$ , Hodge index Theorem shows that an automorphism of  $X$  induces an isometry of the hyperbolic space  $\mathcal{H}^r := \{v \in H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \mid v^2 = 1, v.H > 0\}$ . Thus, we are naturally led to study and classify isometries of hyperbolic spaces (cf. [Gri16, 3.1]):

**Theorem 2.30. (Classification of isometries of hyperbolic spaces)**

Let  $V$  be a vector space of dimension  $r + 1$  endowed with a symmetric bilinear form of signature  $(1, r)$ . Let  $u$  be in  $O^+(V)$  and let us choose a connected component  $N$  of the cone  $\{x \in V \mid x^2 \geq 0\}$ . Then three distinct situations can appear:

- ***u is elliptic:***

All eigenvalues of  $u$  are of modulus 1 and  $u$  is semi-simple. Then  $u$  has a fixed vector in the interior of  $N$ .

- ***u is parabolic:***

All eigenvalues of  $u$  are of modulus 1 and  $u$  fixes pointwise a unique ray in  $N$ , which lies in the isotropic cone. Then  $u$  is not semi-simple and has a unique non-trivial Jordan block which is of the

form  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  where the first vector of the block directs the unique invariant isotropic ray of  $N$ .

- ***u is hyperbolic:***

There exist  $\lambda > 1$  and two distinct isotropic vectors  $L^+$  and  $L^-$  in  $N$  such that  $u(L^+) = \lambda L^+$  and  $u(L^-) = \lambda^{-1} L^-$ . All other eigenvalues of  $u$  are of modulus 1, and  $u$  is semi-simple.  $\square$

Elliptic isometries have at least one fixed point in  $\mathcal{H}^r$ , parabolic isometries have no fixed point in  $\mathcal{H}^r$  but exactly one fixed point on  $\partial\mathcal{H}^r$  and hyperbolic isometries have no fixed point in  $\mathcal{H}^r$  but exactly 2 fixed points on  $\partial\mathcal{H}^r$ .

There is also a dynamical viewpoint on automorphisms of projective varieties. Thanks to results of Gromov [Gro03] and Yomdin [Yom87], we can give the following definition:

**Definition 2.31.** Let  $X$  be a smooth projective complex variety and  $\varphi \in \text{Aut } X$ .

- The **topological entropy** of  $\varphi$  is  $h(\varphi) := \log \rho(\varphi^*)$ , where  $\rho(\varphi^*)$  is the spectral radius of the automorphism  $\varphi^*$  of  $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$  induced by  $\varphi$ .
- The **(first) dynamical degree** of  $\varphi$  is  $\lambda_1(\varphi) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(\varphi^n)^*\|^{1/n}$ .

**Remark 2.32.** If  $\varphi \in \text{Aut}^{\#} X$ , then  $\varphi^* = \text{Id}$  and  $h(\varphi) = \log 1 = 0$ .

In fact, these two notions give the same information for automorphisms. More precisely, since every automorphism  $\varphi$  of  $X$  is analytically stable, i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(\varphi^n)^* = (\varphi^*)^n$  (cf. [DF01]), we obtain the following result:

**Proposition 2.33. ([DF01, 1.19])** Let  $X$  be a compact Kähler surface.

If  $\varphi \in \text{Aut } X$ , then  $\lambda_1(\varphi) = \rho(\varphi^*)$ , where  $\varphi^*$  is the automorphism of  $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$  induced by  $\varphi$ .  $\square$

**Remark 2.34.** If  $X$  is a rational surface, then  $c_1 : \text{Pic } X \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$  is an isomorphism because  $h^{0,1}(X) = h^{0,2}(X) = 0$  and  $H^2(X, \mathbb{Z}) = H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z}) = \text{Im } c_1$  by Lefschetz Theorem on (1,1) classes (cf. [GH78, I.2 p.163]). Thus  $\text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) = NS(X)$ . Hence, numerical equivalence is the same as linear equivalence for rational surfaces.

Now, we can link the previous classification of isometries of  $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$  with topological entropy and with the dynamical behavior of automorphisms of  $X$  (cf. [DF01, Table 1]):

**Theorem 2.35. (Dynamical classification of automorphisms of projective surfaces)**

Let  $X$  be a compact Kähler surface and  $\varphi \in \text{Aut } X$ .

- $\varphi$  is elliptic  $\iff$  it is of finite order (thus, it has null entropy)  $\iff \|(\varphi^n)^*\|$  is bounded;
- $\varphi$  is parabolic  $\iff \varphi$  has infinite order and null entropy  $\iff \|(\varphi^n)^*\| \sim Cn^2$  for some constant  $C$ ;
- $\varphi$  is hyperbolic  $\iff$  it has positive entropy (thus, it is of infinite order)  $\iff \|(\varphi^n)^*\|$  has exponential growth.  $\square$

Finally, we sum up the main properties of automorphisms of positive entropy (cf. [Zha08, 2.9 - 2.11] and [DF01, 5.1]):

**Theorem 2.36.** Let  $\varphi$  be an automorphism of positive entropy of a smooth projective surface  $X$ .

1. Every eigenvector  $v$  of  $\varphi^*$  corresponding to an eigenvalue of modulus  $\neq 1$  is isotropic (i.e.  $v^2 = 0$ ).

2. The operator  $\varphi^*$  has exactly one eigenvalue  $\lambda$  of modulus  $> 1$  :  $\lambda$  is real (in fact  $\lambda = \rho(\varphi^*)$ ) and its eigenspace  $\text{Ker}(\varphi^* - \lambda \text{Id})$  is one-dimensional. We denote by  $L^+$  an eigenvector for  $\lambda$ . Moreover,  $(L^+)^2 = 0$ .
3. The operator  $\varphi^*$  has exactly one eigenvalue of modulus  $< 1$ , which is  $\lambda^{-1}$ . Its eigenspace  $\text{Ker}(\varphi^* - \frac{1}{\lambda} \text{Id})$  is one-dimensional. We denote by  $L^-$  an eigenvector for  $\lambda^{-1}$ . Moreover,  $(L^-)^2 = 0$ .
4.  $L^+$  and  $L^-$  can be supposed nef: thus  $L^+.L^- > 0$  (so  $L := L^+ + L^-$  is nef and big).
5.  $\varphi^*$  is semi-simple and all its eigenvalues other than  $\lambda^{\pm 1}$  have modulus 1.
6.  $L^+.K_X = L^-.K_X = 0$ ; so either  $K_X^2 < 0$  or  $K_X \equiv 0$ . **In particular, if  $X$  is a blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at  $r$  points, then  $r \geq 10$ .**
7.  $\lambda$  is an irrational algebraic integer.
8.  $L^\pm \in \text{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\lambda]$  and none of its positive multiples is  $\mathbb{Q}$ -Cartier.

In order to prove parts of this Theorem, we will need the following classical result about bilinear forms (see [Bou59, §7, n°2, Th.1, e]):

**Lemma 2.37.** *Let  $b$  be a non-degenerate bilinear symmetric form of signature  $(p, q)$  on a finite-dimensional  $\mathbb{R}$ -vector space  $V$ .*

*Any maximal totally isotropic subspace of  $V$  has dimension  $\min(p, q)$ .* □

*Proof of Theorem 2.36.* Before beginning the proof, we note that if  $v_1, v_2$  are complex eigenvectors of  $\varphi^*$  for the complex eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2$  respectively, then, in  $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ , we have:

$$(2.3) \quad v_1.v_2 = \varphi^*(v_1).\varphi^*(v_2) = \lambda_1\bar{\lambda}_2(v_1.v_2)$$

1. If  $\lambda$  is an eigenvalue of  $\varphi^*$  such that  $|\lambda| \neq 1$  and if  $v$  is an eigenvector of  $\varphi^*$  for the eigenvalue  $\lambda$ , then the equality (2.3) gives  $v^2 = |\lambda|^2 v^2$  which implies  $v^2 = 0$  since  $|\lambda| \neq 1$ .
2. If  $v_1, v_2$  are linearly independent complex eigenvectors of  $\varphi^*$  for the complex eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2$  respectively and if  $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$ , then the equality (2.3) gives  $v_1.v_2 = \lambda_1\bar{\lambda}_2(v_1.v_2)$ . Since  $|\lambda_1\bar{\lambda}_2| > 1$ , we obtain  $v_1.v_2 = 0$ . Combining this with the previous result, we obtain that the space  $\langle v_1, v_2 \rangle$  is a totally isotropic subspace of  $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ : this is absurd by the previous lemma because any maximal totally isotropic subspace of  $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$  is one-dimensional. From this, we deduce that  $\lambda_1 = \lambda_2$  (i.e.  $\varphi^*$  has exactly one eigenvalue  $\lambda$  of modulus  $> 1$ ) and, taking  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  in what we saw just before, we obtain that  $\dim \text{Ker}(\varphi^* - \lambda \text{Id}) = 1$ . Note that  $\lambda$  is necessarily real: in fact, if  $\lambda$  was not real, then  $\bar{\lambda}$  would be another eigenvalue of  $\varphi^*$ , contradicting the unicity of  $\lambda$ .
3. Similarly, one can prove that  $\varphi^*$  has only one eigenvalue  $\mu$  of modulus  $< 1$  which is real and whose eigenspace is one-dimensional. Now, let us suppose that  $\mu \neq \frac{1}{\lambda}$ . Then the equality (2.3) gives  $L^+.L^- = \lambda\mu(L^+.L^-)$ : by our assumption, we obtain  $L^+.L^- = 0$  and  $\langle L^+, L^- \rangle$  is a two-dimensional totally isotropic subspace of  $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ : this is absurd, so  $\mu = \frac{1}{\lambda}$ .
4. We do not prove here that  $L^+$  and  $L^-$  can be supposed nef (cf. [DF01, 5.1]). We already know that  $(L^+)^2 = (L^-)^2 = 0$  and that  $L^+.L^- \neq 0$ . Finally,  $L^+.L^- > 0$  because  $L^+$  and  $L^-$  are nef.
5. Note that  $\varphi^*$  induces an isometry of  $\langle L^+, L^- \rangle^\perp$ . But the intersection form on  $\langle L^+, L^- \rangle^\perp$  is negative definite: for, if we denote by  $L$  the vector  $L^+ + L^-$ , we see that  $L^2 > 0$  so every vector  $v \in \langle L^+, L^- \rangle^\perp$  satisfies  $v^2 \leq 0$  since  $v$  is orthogonal to  $L$  and since the signature of the intersection form is  $(1, h^{1,1}(X) - 1)$ . Thus,  $\varphi^*|_{\langle L^+, L^- \rangle^\perp}$  is an euclidean isometry: hence, it is semi-simple and all its eigenvalues are of modulus 1.
6. For the first point, it suffices to note that

$$L^\pm.K_X = \varphi^*(L^\pm).\varphi^*(K_X) = \lambda^{\pm 1}L^\pm.K_X \xrightarrow{\lambda \neq 1} L^\pm.K_X = 0$$

Now, since  $K_X \in \langle L^+, L^- \rangle^\perp$  and since the intersection form on  $\langle L^+, L^- \rangle^\perp$  is negative definite, we obtain that  $K_X^2 \leq 0$  and  $K_X^2 = 0 \Rightarrow K_X \equiv 0$ .

For 7. and 8., cf. [Zha08, 2.11]. □

### Structure of $\text{Aut}^* X$ and Tits alternative

The following theorem gives us the structure of subgroups of  $\text{O}(\text{Pic } X)$  without positive entropy elements (which are called *groups of moderate growth*). It is taken from Grivaux's review of Gizatullin's results in [Giz81]:

**Theorem 2.38.** ([Gri16, 3.13])

Let  $V$  be a vector space of dimension  $r + 1$  endowed with a symmetric bilinear form of signature  $(1, r)$ . Let  $\Lambda$  be a lattice of rank  $r + 1$  in  $V$ . Assume that the bilinear form on  $V$  takes integral values on the lattice  $\Lambda$ . We denote by  $\text{O}^+(\Lambda)$  the subgroup of  $\text{O}^+(V)$  fixing the lattice. If  $G$  is an infinite subgroup of moderate growth in  $\text{O}^+(\Lambda)$ , then:

1. There exists a  $G$ -invariant isotropic element  $\theta$  of  $N \cap \Lambda$ .
2. The group  $G$  can be written as  $G = \mathbb{Z}^r \rtimes H$  where  $H$  is a finite group and  $r > 0$ . □

There is a kind of Tits alternative for automorphism groups of smooth projective surfaces:

**Theorem 2.39.** ([Zha08, 1.6]) Let  $X$  be a smooth projective complex surface and  $A$  a subgroup of  $\text{Aut } X$ . If  $A$  contains at least one automorphism of positive entropy, then  $A$  satisfies exactly one of the following assertions:

- $A$  contains the non-abelian free group  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ; or
- there is a normal subgroup  $B$  of  $A$  such that  $|A/B| \leq 2$  and  $B = \langle h_m \rangle \rtimes T$  with  $h_m$  of positive entropy and  $p(T)$  finite<sup>5</sup>. Moreover, if  $X$  is rational, then  $T$  itself is finite. □

In fact, these important results can be seen as a consequence of some results of hyperbolic geometry which we recall here without proof:

**Definition 2.40.** A subgroup  $\Gamma$  of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$  is **elementary** if and only if it has a finite orbit in  $\overline{\mathcal{H}^n}$ .

**Proposition 2.41.** (Common fixed points of isometries)

1. [Apa00, 2.11] Hyperbolic elements  $f$  and  $g$  of a discrete subgroup  $\Gamma$  of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$  satisfy the following alternative: either  $\text{fix}(f) \cap \text{fix}(g) = \emptyset$  or  $\text{fix}(f) = \text{fix}(g)$ . In the latter case, there exist non-zero integers  $k$  and  $\ell$  such that  $f^\ell = g^k$ .
2. [Rat06, 5.5.4] Let  $f, g \in \text{Isom}(\mathcal{H}^n)$  with  $f$  hyperbolic. If  $f$  and  $g$  have exactly one fixed point in common, then the subgroup generated by  $f$  and  $g$  is not discrete. □

**Theorem 2.42.** (Bieberbach's Theorem - [Rat06, 5.4.4])

A discrete subgroup  $\Gamma$  of  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  is the direct product of a free abelian subgroup  $F$  of rank  $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$  and of a finite subgroup  $H$ . Moreover,  $F$  acts freely on an  $m$ -plane  $P$  of  $\mathbb{R}^n$  as a discrete group of translations. □

The following theorem summarizes the different possibilities for the structure a discrete subgroup of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$  and can be seen as another version of Theorems 2.38 and 2.39. In particular, note that Proposition 2.41 and Bieberbach's Theorem imply 2.(a) of the following result:

**Theorem 2.43.** ([Rat06, §5.5]) Let  $\Gamma$  be a discrete subgroup of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$ .

1. If  $\Gamma$  is elementary, then the following are equivalent :
  - (a)  $\Gamma$  has a fixed point in  $\mathcal{H}^n$ ;
  - (b)  $\Gamma$  is finite;
  - (c) all its elements are elliptic ( $\Gamma$  is said to be **elementary elliptic**)<sup>6</sup>.
2. If  $\Gamma$  is elementary and infinite, then:

5. Remember that  $p$  is the natural morphism  $\text{Aut } X \rightarrow \text{O}(\text{Pic } X)$ , which we have seen in 2.16.

6. This is equivalent to the finiteness of  $\Gamma$  by [Gri16, 3.12].

- (a) either it has a unique fixed point on  $\partial\mathcal{H}^n$  ( $\Gamma$  is said to be **elementary parabolic**): then it contains only elliptic and parabolic elements and it is conjugate, in  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$ , to an infinite discrete subgroup of  $\text{Isom}(\mathbb{R}^{n-1})$  which is isomorphic to  $\mathbb{Z}^m \times H$  for an integer  $m \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  and for a finite group  $H$ ;
- (b) or it has 0 or 2 fixed points on  $\partial\mathcal{H}^n$  ( $\Gamma$  is said to be **elementary hyperbolic**): then it contains an infinite cyclic group of finite index which is generated by a hyperbolic transformation: thus, it is isomorphic to a finite extension of  $\mathbb{Z}$ .
3. [Rat06, 12.2.17 - 12.2.Ex.15] If  $\Gamma$  is nonelementary, then it contains a non-abelian free group  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .<sup>7</sup>
4. [Rat06, 12.2.3] If  $\Gamma$  is a discrete subgroup of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$  all of whose elements are either elliptic or parabolic, then  $\Gamma$  is elementary.  $\square$

Combining the last point of this result with 6. of Theorem 2.36, we obtain:

**Corollary 2.44.** *If  $X$  is a rational surface such that  $K_X^2 \geq 0$ , then  $\text{Aut}^*X$  is an elementary discrete subgroup of  $\text{Isom}(\text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$ .*  $\square$

Of course, this is true more generally for smooth projective surfaces if we replace  $\text{Aut}^*X$  by the image of  $\text{Aut } X \rightarrow \text{O}(\text{NS}(X))$ .

---

7. More precisely, a classical Schottky group of rank 2.

---

# Chapitre 3

---

## Formes réelles des variétés complexes

Une forme réelle d'une variété complexe donnée est une variété réelle dont la complexification est la variété complexe que l'on s'était donnée initialement. Après avoir défini précisément les différents termes employés, ce chapitre aura pour but d'exposer les fondements de cette théorie qui explore les relations entre variétés réelles et complexes. En particulier, nous rappellerons la correspondance entre formes réelles et structures réelles (i.e. conjugaisons complexes sur la variété) donnée par la méthode de descente de Weil, avant de présenter la cohomologie galoisienne qui est l'outil grâce auquel nous pourrons démontrer au Chapitre 5 les résultats centraux de cette thèse concernant les structures réelles sur les surfaces rationnelles. Après avoir rappelé le comportement des structures réelles vis-à-vis des éclatements et contractions, nous consacrerons la fin de ce chapitre à la preuve de notre théorème de caractérisation de l'équivalence de structures réelles (i.e. l'existence d'un  $\mathbb{R}$ -isomorphisme entre les formes réelles associées) à l'aide de leurs ensembles de points réels.

### 3.1 Variétés algébriques réelles

#### 3.1.1 Définitions

**Definition 3.1.** (Variétés algébriques réelles)

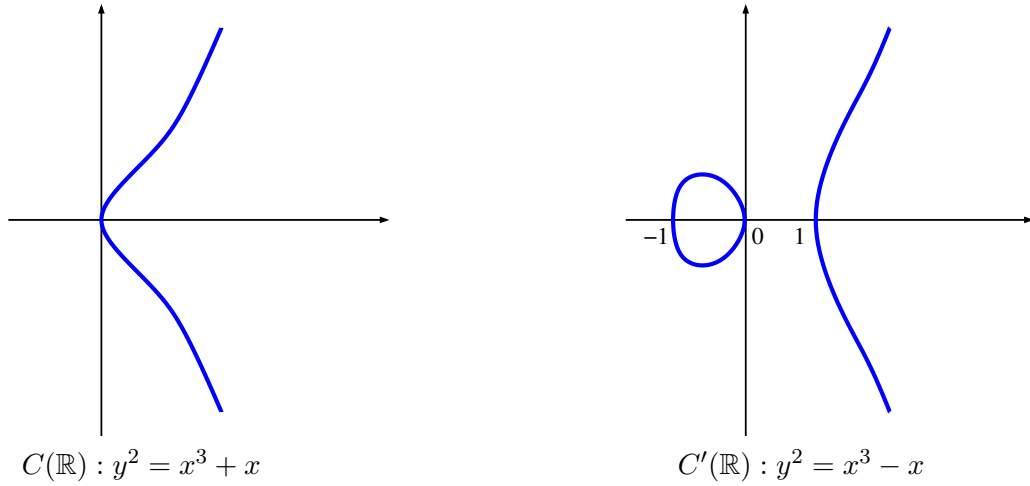
- Une **variété algébrique réelle (resp. complexe)** est un schéma géométriquement réduit, séparé et de type fini sur  $\mathbb{R}$  (resp. sur  $\mathbb{C}$ ). Une telle variété réelle (resp. complexe) est **quasi-projective** si elle est isomorphe à un ouvert d'une variété projective réelle (resp. complexe).
- Si  $X_0$  est une variété réelle, on note  $X = (X_0)_\mathbb{C} := X_0 \times_{\text{Spec } \mathbb{R}} \text{Spec } \mathbb{C}$  sa **complexification**. On dit alors que  $X_0$  est une **forme réelle** de  $X$ .
- Plus généralement, une variété réelle  $X_0$  est une **forme réelle** de la variété complexe  $X$  s'il existe un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme  $\psi : (X_0)_\mathbb{C} \rightarrow X$ .

**Exemples 3.2.** Une même variété complexe peut posséder plusieurs formes réelles non-isomorphes ; en voici deux exemples élémentaires.

- $X_0 := \text{Proj}(\mathbb{R}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2))$  et  $\mathbb{P}_\mathbb{R}^1$  sont deux formes réelles de  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ . En effet,  $(X_0)_\mathbb{C}$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$  puisque c'est une conique de  $\mathbb{P}^2$ . Cependant,  $X_0$  et  $\mathbb{P}_\mathbb{R}^1$  ne sont pas  $\mathbb{R}$ -isomorphes : en effet,  $X_0(\mathbb{R}) \simeq \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\} = \emptyset$  alors que  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ .
- ([Man, Chap. 2]) On peut vérifier que les courbes

$$C := \text{Spec}(\mathbb{R}[x, y]/(y^2 - x^3 - x)) \text{ et } C' := \text{Spec}(\mathbb{R}[x, y]/(y^2 - x^3 + x))$$

sont deux formes réelles distinctes de la même courbe complexe : en effet,  $C$  et  $C'$  ne sont pas  $\mathbb{R}$ -isomorphes puisque, en topologie euclidienne,  $C(\mathbb{R})$  est connexe contrairement à  $C'(\mathbb{R})$ .



Par contre, leurs complexifiées sont isomorphes via

$$\varphi : (x, y) \mapsto (-ix, e^{i\frac{\pi}{4}}y).$$

**Definition 3.3. (Structures réelles)**

Soit  $X$  une variété algébrique complexe.

- Une **structure réelle** sur  $X$  est une involution antirégulière  $\sigma : X \rightarrow X$ , la condition d'antirégularité signifiant que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{Spec}(z \mapsto \bar{z})} & \text{Spec } \mathbb{C} \end{array}$$

- Le **lieu réel** d'une telle involution  $\sigma$  est l'ensemble  $X^\sigma$  ou  $X(\mathbb{R})$  des points fermés de  $X$  fixés par  $\sigma$ .<sup>(1)</sup>

**Exemples 3.4.** • Sur  $\mathbb{P}^n$ , on peut définir la structure réelle standard

$$\sigma_0 : \begin{cases} \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ [x_0 : \dots : x_n] & \mapsto & [\bar{x}_0 : \dots : \bar{x}_n] \end{cases}$$

et on a bien sûr  $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})^{\sigma_0} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .

- Sur  $\mathbb{P}^1$ , on peut également définir  $\sigma : \begin{cases} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ [x : y] & \mapsto & [-\bar{y} : \bar{x}] \end{cases}$  et on voit que  $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^{\sigma} = \emptyset$ .

**3.1.2 Intermède : quotient d'un schéma par un groupe fini**

Nous rappelons ici pour le confort du lecteur (et de l'auteur) les définitions et principales propriétés du quotient d'un schéma par un groupe fini.

**Definition 3.5.** Soient  $X$  un schéma sur un corps  $\mathbb{K}$  et  $G$  un groupe fini agissant sur  $X$  par  $\mathbb{K}$ -automorphismes. Un **quotient de  $X$  par  $G$**  est un  $\mathbb{K}$ -morphisme  $\pi : X \rightarrow W$  vers un  $\mathbb{K}$ -schéma  $W$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\pi$  est  $G$ -invariant, i.e.  $\forall g \in G, \pi \circ g = \pi$  ;
- $\pi$  est universel pour cette propriété, i.e. pour tout  $\mathbb{K}$ -schéma  $Y$ , pour tout  $\mathbb{K}$ -morphisme  $G$ -invariant  $f : X \rightarrow Y$ , il existe un unique  $\mathbb{K}$ -morphisme  $h : W \rightarrow Y$  tel que  $h \circ \pi = f$ .

Un tel quotient est unique à unique isomorphisme près et on le note  $X/G$ .

---

1. En principe, on devrait le noter  $X(\mathbb{C})^\sigma$ . Voir aussi Prop. 3.14.

**Théorème 3.6.** ([sga71, V.1, 1.1, 1.4, 1.8])

1. Soient  $X = \text{Spec } A$  un schéma affine de type fini sur  $\mathbb{K}$ ,  $G$  un groupe fini agissant sur  $X$  par  $\mathbb{K}$ -automorphismes et  $\pi : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } (A^G)$  le morphisme induit par l'injection canonique  $A^G \hookrightarrow A$ .

(a)  $Y := \text{Spec } (A^G)$  est un schéma de type fini sur  $\mathbb{K}$  et  $\pi$  est un morphisme fini et surjectif.

(b) Les fibres de  $\pi$  sont les orbites de l'action de  $G$  sur  $X$  et la topologie sur  $Y$  est la topologie quotient.

(c)  $\pi$  est le quotient de  $\text{Spec } A$  par  $G$ .

(d) On a un isomorphisme naturel  $\mathcal{O}_Y \simeq \pi_*(\mathcal{O}_X)^G$ .

(e) Pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ , le morphisme  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$  induit par  $\pi$  est le quotient de  $\pi^{-1}(U)$  par l'action de  $G$ .

2. Soient  $X$  un schéma sur un corps  $\mathbb{K}$  et  $G$  un groupe fini agissant sur  $X$  par  $\mathbb{K}$ -automorphismes.

Le quotient  $X/G$  existe si, et seulement si,  $X$  est recouvert par des ouverts affines  $G$ -invariants. Ce quotient est alors obtenu par recollement des quotients de ces ouverts affines.

En particulier, si  $X$  est quasi-projectif sur  $\mathbb{K}$ , le quotient  $X/G$  existe systématiquement.  $\square$

**Exemple 3.7.** Si  $X = \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] & \rightarrow & \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \\ \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} & \mapsto & \sum_{k_1, \dots, k_n} \overline{a_{k_1, \dots, k_n}} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \end{array} \right.$ ,  $\sigma = \text{Spec } (c)$  et  $G = \langle \sigma \rangle$ , alors  $X$  est affine de type fini sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $G$  est un groupe fini agissant sur  $X$  par  $\mathbb{R}$ -automorphismes et  $X/G = \text{Spec } (\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G) = \text{Spec } \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ .

On aura enfin besoin du Lemme classique ci-dessous :

**Lemme 3.8.** Soient  $\mathbb{K}$  un corps,  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soit  $G$  un groupe agissant sur  $V$  par automorphismes  $\mathbb{K}$ -linéaires. On définit alors une action de  $G$  sur  $V \otimes_{\mathbb{K}} W$  par :

$$\forall g \in G, \forall (v, w) \in V \times W, g.(v \otimes w) := g.v \otimes w.$$

L'injection canonique  $V^G \otimes_{\mathbb{K}} W \hookrightarrow (V \otimes_{\mathbb{K}} W)^G$  est un isomorphisme :

$$(V \otimes_{\mathbb{K}} W)^G \simeq V^G \otimes_{\mathbb{K}} W.$$

*Démonstration.* Soit  $u \in V \otimes_{\mathbb{K}} W$ . Si  $(w_i)_{i \in I}$  est une  $\mathbb{K}$ -base de  $W$ , alors on peut écrire  $u = \sum_{i \in I} v_i \otimes w_i$  pour

des  $v_i \in V$  uniques. On voit alors que  $\forall g \in G, g.u = \sum_{i \in I} g(v_i) \otimes w_i$  donc  $g.u = u \iff \forall i \in I, g(v_i) =$

$v_i \iff \forall i \in I, a_i \in V^G$ .  $\square$

Notre soudain intérêt pour ces quotients s'explique alors par la proposition suivante :

**Proposition 3.9.** Soient  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  une extension galoisienne finie,  $X$  un schéma réduit de type fini sur  $\mathbb{K}$ ,  $G = \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$  et  $X_{\mathbb{L}} := X \times_{\text{Spec } \mathbb{K}} \text{Spec } \mathbb{L}$ .

La projection canonique  $\pi : X_{\mathbb{L}} \rightarrow X$  est le quotient de  $X_{\mathbb{L}}$  par  $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ .

*Démonstration.* Remarquons que l'action de  $G$  sur  $\mathbb{L}$  induit une action par  $\mathbb{K}$ -automorphismes sur  $\text{Spec } \mathbb{L}$  et donc sur  $X_{\mathbb{L}}$  ( $G$  agissant trivialement sur le facteur  $X$ ). De plus,  $\pi$  étant un morphisme affine (car il est obtenu par changement de base à partir de  $\text{Spec } \mathbb{L} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{K}$ ), on voit que tout point  $x \in X_{\mathbb{L}}$  admet un voisinage ouvert affine  $G$ -invariant : il suffit de prendre  $\pi^{-1}(U)$ , où  $U$  est un voisinage ouvert affine de  $\pi(x)$ . Cela montre que le quotient  $X_{\mathbb{L}}/G$  existe.

Si  $U = \text{Spec } A$  est un ouvert affine de  $X$  ( $A$  étant une  $\mathbb{K}$ -algèbre de type fini), alors  $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } (A \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L})$  et, comme  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  est galoisienne, le Lemme précédent montre que

$$(A \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L})^G \simeq A \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}^G = A \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = A.$$

On en déduit que pour tout ouvert affine  $U$  de  $X$ ,  $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  est le quotient de  $\pi^{-1}(U)$  par  $G$  et donc que  $\pi : X_{\mathbb{L}} \rightarrow X$  est le quotient de  $X_{\mathbb{L}}$  par  $G$ .  $\square$

2. En effet, comme  $G$  est un groupe fini, on peut montrer que l'orbite de n'importe quel point de  $X$  sous l'action de  $G$  est contenue dans un ouvert affine  $U$  de  $X$ , car  $X$  est quasi-projective. Il suffit alors de choisir l'intersection des éléments de l'orbite de  $U$  pour changer  $U$  en un ouvert affine  $G$ -invariant (cf. *op. cit.*, Prop. 1.8 pour les détails).

### 3.1.3 Formes réelles et structures réelles : descente de Weil

Le lien entre formes réelles et structures réelles est donné par le résultat suivant (issu de [BS64, 2.6] et de [Sil89, I.1.4] qui indiquent qu'il s'agit d'une application du *théorème de descente du corps de base de Weil*) :

**Théorème 3.10.** *Soit  $X$  une variété algébrique quasi-projective complexe.*

*Il y a correspondance bijective entre les structures réelles sur  $X$  et les couples composés d'une forme réelle  $X_0$  de  $X$  et d'un isomorphisme  $(X_0)_{\mathbb{C}} \rightarrow X$  :*

- à une forme réelle  $X_0$  de  $X$  et à un isomorphisme  $\varphi : X \rightarrow (X_0)_{\mathbb{C}}$ , on associe la structure réelle  $\sigma$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & (X_0)_{\mathbb{C}} \\ \sigma \uparrow & & \uparrow \sigma_0 := \text{Id} \times \text{Spec}(z \mapsto \bar{z}) \\ X & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & (X_0)_{\mathbb{C}} \end{array}$$

- à une structure réelle  $\sigma$  sur  $X$ , on fait correspondre le schéma quotient  $X_0 := X/\langle\sigma\rangle$  et l'isomorphisme  $\varphi = (\pi, f_X) : X \rightarrow (X_0)_{\mathbb{C}}$  où  $\pi : X \rightarrow X_0$  est la projection canonique du quotient et  $f_X : X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$  est le morphisme structural de  $X$ .

*Démonstration.* • Si  $X_0$  est une forme réelle de  $X$ , alors le  $\sigma$  défini dans le théorème est bien une structure réelle sur  $X$ .

Si  $X_0$  est une forme réelle de  $X$ , alors le diagramme de l'énoncé du théorème donne bien une structure réelle  $\sigma$  sur  $X$ , ceci car  $\sigma_0$  est clairement une structure réelle sur  $(X_0)_{\mathbb{C}}$ .

- Si  $\sigma$  est une structure réelle sur  $X$ , alors  $X_0 = X/\langle\sigma\rangle$  est bien une forme réelle de  $X$ .

D'abord,  $X_0 = X/\langle\sigma\rangle$  est bien défini (car  $\langle\sigma\rangle$  est un groupe fini et  $X$  est un schéma réduit et quasi-projectif sur  $\mathbb{C}$ ) et d'après [sga71, V, Cor. 1.5], si  $X$  est séparé de type fini sur  $\mathbb{C}$  (donc aussi sur  $\mathbb{R}$ ), alors  $X_0$  est séparé de type fini sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout ouvert affine  $U = \text{Spec } A$  invariant par  $\sigma$ , on a  $U_0 := U/\langle\sigma\rangle = \text{Spec}(A^{\langle\sigma\rangle})$ .

**Lemme 3.11.** ([Con, 4.11]) *Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.*

*Il y a correspondance bijective entre les formes réelles de  $V$  (i.e. les  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels  $W$  tels que  $W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq V$ ) et les structures réelles sur  $V$  (i.e. les involutions antilinéaires sur  $V$ ).*

- à une forme réelle  $W$  de  $V$ , on associe la structure réelle  $\sigma$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow[\cong]{\varphi} & W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ \sigma \uparrow & & \uparrow \sigma_0 := \text{Id} \otimes (z \mapsto \bar{z}) \\ V & \xleftarrow[\cong]{\varphi} & W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \end{array}$$

où  $\varphi : W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow V$  est un isomorphisme.

- à une structure réelle  $\sigma$  sur  $V$ , on fait correspondre la forme réelle  $V^{\sigma} := \{v \in V \mid \sigma(v) = v\}$ . On a un isomorphisme naturel  $\varphi : V^{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow V$ ,  $v \otimes z \mapsto zv$ .

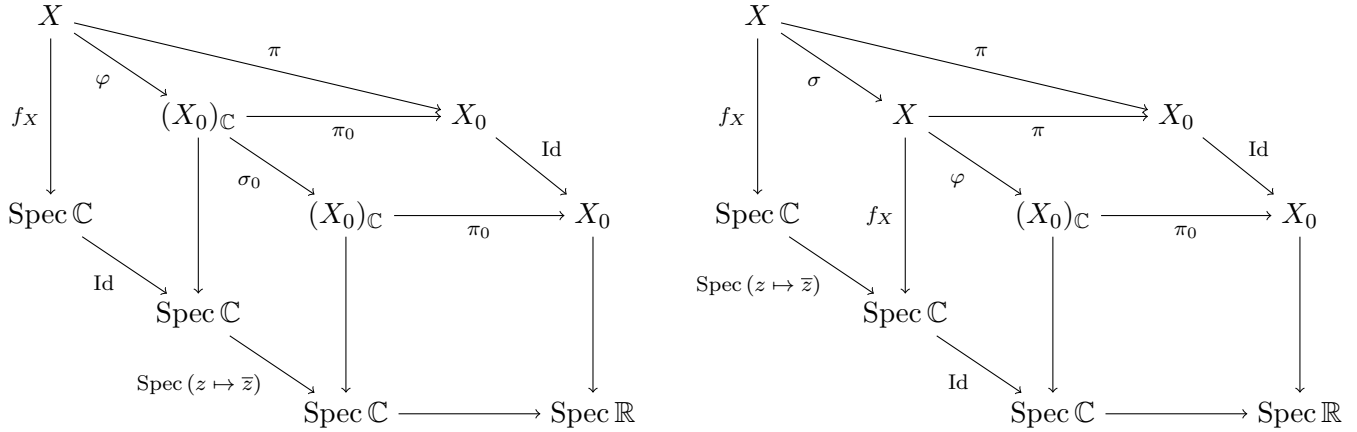
De plus, ce Lemme est aussi valable, mutatis mutandis, si  $V$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre. □

D'après ce Lemme, on a donc  $A^{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq A$  donc  $(U_0)_{\mathbb{C}} \simeq U$  pour tout ouvert affine  $\sigma$ -invariant  $U$  de  $X$ . De plus, on remarque que les isomorphismes  $U \rightarrow (U_0)_{\mathbb{C}}$  induits par les  $A^{\sigma} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow A$ ,  $v \otimes z \mapsto zv$  sont exactement les restrictions de  $(\pi, f_X)$ , où  $\pi : X \rightarrow X_0$  est la projection canonique du quotient et  $f_X : X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$  est le morphisme structural. Par conséquent, ces isomorphismes se recollent en  $\varphi := (\pi, f_X)$ , qui donne bien un isomorphisme  $X \rightarrow (X_0)_{\mathbb{C}}$ , ce qui montre bien que  $X_0$  est une forme réelle de  $X$ .

- En partant d'une forme réelle  $X_0$  de  $X$ , si  $\sigma$  est la structure réelle associée, alors  $X/\langle\sigma\rangle$  redonne bien  $X_0$  (à isomorphisme près).

Par propriété universelle du quotient, si  $\pi : X \rightarrow X/\langle\sigma\rangle$  désigne la projection canonique, alors  $\pi \circ \varphi$  descend en un isomorphisme  $\varphi_0 : (X_0)_{\mathbb{C}}/\langle\sigma_0\rangle \rightarrow X/\langle\sigma\rangle$ . D'après la Proposition 3.9, comme  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  est galoisienne, on a bien  $X/\langle\sigma\rangle \simeq (X_0)_{\mathbb{C}}/\langle\sigma_0\rangle = X_0$ .

- En partant d'une structure réelle  $\sigma$  sur  $X$ , si  $X_0 := X/\langle\sigma\rangle$  est la forme réelle associée et si  $\sigma_0$  est la structure réelle associée à  $X_0$ , alors  $\sigma_0\varphi = \varphi\sigma = (\pi, \text{Spec}(z \mapsto \bar{z})) \circ f_X$  (donc  $\varphi\sigma_0\varphi^{-1} = \sigma$ ) car les diagrammes suivants commutent



□

**Théorème 3.12.** Soient  $X$  et  $Y$  des variétés quasi-projectives complexes et  $\sigma_X$  (resp.  $\sigma_Y$ ) une structure réelle sur  $X$  (resp.  $Y$ ).

Il y a correspondance bijective entre les  $\mathbb{C}$ -morphisms équivariants de  $(X, \sigma_X)$  vers  $(Y, \sigma_Y)$  (3) et les  $\mathbb{R}$ -morphisms de  $X_0 := X/\langle\sigma_X\rangle$  vers  $Y_0 = Y/\langle\sigma_Y\rangle$  :

- à un  $\mathbb{R}$ -morphisme  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ , on associe le  $\mathbb{C}$ -morphisme équivariant  $f : (X, \sigma_X) \rightarrow (Y, \sigma_Y)$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_X} & (X_0)_{\mathbb{C}} \\ f \downarrow & & \downarrow f_0 \times \text{Id} \\ Y & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_Y} & (Y_0)_{\mathbb{C}} \end{array}$$

où  $\varphi_X = (\pi_X, f_X) : X \rightarrow (X_0)_{\mathbb{C}}$  et  $\varphi_Y = (\pi_Y, f_Y) : Y \rightarrow (Y_0)_{\mathbb{C}}$  sont les isomorphismes définis en 3.10.

- à un  $\mathbb{C}$ -morphisme équivariant  $f : (X, \sigma_X) \rightarrow (Y, \sigma_Y)$ , on associe le  $\mathbb{R}$ -morphisme  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  obtenu par passage au quotient de  $\pi_Y \circ f$  ( $\pi_Y : Y \rightarrow Y_0$  étant la projection canonique).

*Démonstration.* • Si  $f_0$  est un  $\mathbb{R}$ -morphisme, alors  $f$  est un  $\mathbb{C}$ -morphisme équivariant.

Clairement, il suffit de le vérifier dans le cas où  $X = (X_0)_{\mathbb{C}}$ ,  $Y = (Y_0)_{\mathbb{C}}$  et  $f = f_0 \times \text{Id}$ . On remarque alors que

$$f\sigma_X = (f_0 \times \text{Id}) \circ (\text{Id} \times \text{Spec}(z \mapsto \bar{z})) = (f_0 \circ \text{Id}) \times (\text{Id} \circ \text{Spec}(z \mapsto \bar{z})) = f_0 \times \text{Spec}(z \mapsto \bar{z})$$

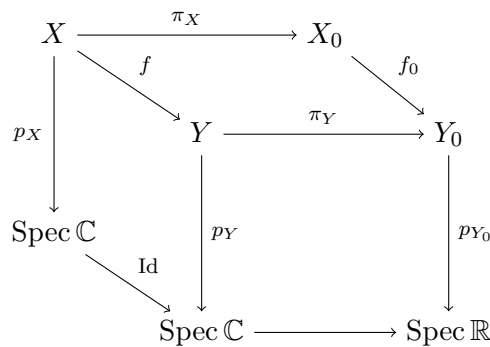
et que

$$\sigma_Y f = (\text{Id} \times \text{Spec}(z \mapsto \bar{z})) \circ (f_0 \times \text{Id}) = (\text{Id} \circ f_0) \times (\text{Spec}(z \mapsto \bar{z}) \circ \text{Id}) = f_0 \times \text{Spec}(z \mapsto \bar{z})$$

Enfin, puisque  $f = f_0 \times \text{Id}$ ,  $f$  est bien un  $\mathbb{C}$ -morphisme (grâce au facteur  $\text{Id}$ ).

3. Il s'agit des  $\mathbb{C}$ -morphisms  $f : X \rightarrow Y$  tels que  $f\sigma_X = \sigma_Y f$ .

- Si  $f : (X, \sigma_X) \rightarrow (Y, \sigma_Y)$  est un  $\mathbb{C}$ -morphisme équivariant, alors il définit un  $\mathbb{R}$ -morphisme  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ .  
 $\pi_Y \circ f$  est un  $\mathbb{C}$ -morphisme invariant par  $\sigma_X$  : par propriété universelle du quotient,  $\pi_Y \circ f$  induit un morphisme  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$ . En prenant  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  dans la définition 3.5, on voit que  $f_0$  est bien un  $\mathbb{R}$ -morphisme.
- Si  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  est un  $\mathbb{R}$ -morphisme alors le passage au quotient de  $f = f_0 \times \text{Id} : (X_0)_{\mathbb{C}} \rightarrow (Y_0)_{\mathbb{C}}$  est  $f_0$ .  
D'après la Proposition 3.9,  $\pi_X$  est la projection canonique du produit fibré  $X = X_0 \times_{\text{Spec } \mathbb{R}} \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow X_0$  et  $\pi_Y$  est la projection canonique du produit fibré  $Y = Y_0 \times_{\text{Spec } \mathbb{R}} \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow Y_0$ . Or  $f = f_0 \times \text{Id}$  donc, par définition de  $f$ , on a  $\pi_Y f = f_0 \pi_X$  : l'unicité de la factorisation dans la propriété universelle du quotient montre alors que  $f_0$  est bien le passage au quotient de  $\pi_Y \circ f$ .
- Si  $f : (X, \sigma_X) \rightarrow (Y, \sigma_Y)$  est un  $\mathbb{C}$ -morphisme équivariant et si  $f_0$  est son passage au quotient, alors  $f_0 \times \text{Id} = f$ .



On remarque que par définition de  $f_0$ , on a  $f_0 \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$ . De plus,  $p_Y \circ f = \text{Id} \circ p_X$  puisque  $f$  est un  $\mathbb{C}$ -morphisme. Donc, par unicité de  $f_0 \times \text{Id}$  dans la propriété universelle du produit fibré, on a  $f = f_0 \times \text{Id}$ . □

**Corollaire 3.13.** Notons  $\mathcal{C}$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(X, \sigma)$  où  $X$  est une variété quasi-projective complexe,  $\sigma$  est une structure réelle sur  $X$ ,  $\pi_X : X \rightarrow X/\langle \sigma \rangle$  est la projection canonique et telle que

$$\forall (X, \sigma), (Y, \tau) \in \mathcal{C}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}((X, \sigma), (Y, \tau)) = \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) \mid f\sigma = \tau f\}.$$

On a une équivalence de catégories entre  $\mathcal{C}$  et la catégorie  $\mathbb{R} - \mathbf{Var}$  des variétés quasi-projectives réelles :

$$F : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{C} & \longrightarrow \mathbb{R} - \mathbf{Var} \\ (X, \sigma) & \longmapsto X_0 := X/\langle \sigma \rangle \\ (f : (X, \sigma) \mapsto (Y, \tau)) & \longmapsto f_0 := \text{passage au quotient de } \pi_Y f. \end{array} \right.$$

□

**Proposition 3.14. (Lieu réel et points  $\mathbb{R}$ -rationnels)**

Soient  $X$  une variété quasi-projective complexe,  $\sigma$  une structure réelle sur  $X$ ,  $X_0 = X/\langle \sigma \rangle$  la forme réelle associée et  $\pi : X \rightarrow X_0$  la projection canonique.

Les points  $\mathbb{R}$ -rationnels de la forme réelle  $X_0$  correspondent bijectivement via  $\pi$  aux points du lieu réel  $X(\mathbb{C})^\sigma$  de la structure réelle  $\sigma$  :

$$\boxed{\pi^{-1}(X_0(\mathbb{R})) = X(\mathbb{C})^\sigma.}$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\pi^{-1}(X_0(\mathbb{R})) = X(\mathbb{C})^\sigma$ . On commence par supposer  $X$  affine.

- D'après le Théorème 3.6,  $X_0$  est affine de type fini sur  $\mathbb{R}$  donc  $X_0 = \text{Spec}(\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I)$  pour un idéal  $I$  de  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . D'après la preuve du Théorème 3.10, en posant  $\sigma_0 := \text{Id} \times \text{Spec}(z \mapsto \bar{z})$ , on a  $(X, \sigma) \simeq ((X_0)_{\mathbb{C}}, \sigma_0)$ . On peut donc supposer que l'on a  $X = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I_{\mathbb{C}})$  muni

de la structure réelle  $\sigma_0$ , où  $I_{\mathbb{C}}$  est l'idéal de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  engendré par  $I$ . Finalement, un point  $\mathfrak{p} \in X_0(\mathbb{R})$  est un idéal premier de la forme  $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)/I$  pour  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\forall f \in I, f(a_1, \dots, a_n) = 0$ . (cf. [Liu02, 3.2.18] ou [EH00, II.2])

Ainsi,  $\pi^{-1}(\{\mathfrak{p}\}) = \{\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}\}$  : en effet, tout idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I_{\mathbb{C}}$  appartenant à  $\pi^{-1}(\{\mathfrak{p}\})$  vérifie  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap (\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I)$  (par définition de  $\pi = \text{Spec}(\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I_{\mathbb{C}})$ ) donc  $\mathfrak{q}$  contient  $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)_{\mathbb{C}}/I_{\mathbb{C}}$  et celui-ci est maximal donc  $\mathfrak{q}$  est nécessairement égal à  $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ . Par ailleurs, on a bien  $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \in \pi^{-1}(\mathfrak{p})$ .

Comme  $\sigma_0 = \text{Spec} \left( c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ P \otimes z & \mapsto & P \otimes \bar{z} \end{array} \right)$  agit en conjuguant les coordonnées des points complexes (i.e.  $\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \sigma_0((x_1 - z_1, \dots, x_n - z_n)) = (x_1 - \bar{z}_1, \dots, x_n - \bar{z}_n)$ ), et comme les coordonnées  $a_1, \dots, a_n$  de  $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$  sont réelles, il vient  $\sigma_0(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$  i.e.  $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \in (X_0)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})^{\sigma_0}$ . Finalement, on a montré l'inclusion  $\pi^{-1}(X_0(\mathbb{R})) \subseteq X(\mathbb{C})^{\sigma}$ .

- Réciproquement, si  $\mathfrak{q} \in X(\mathbb{C})^{\sigma}$ , alors  $\pi(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \cap (\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/I) =: \mathfrak{p}$  est bien un point  $\mathbb{R}$ -rationnel de  $X_0$  : en fait, si  $\mathfrak{q} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)/I_{\mathbb{C}}$ , l'invariance de  $\mathfrak{q}$  par  $\sigma_0$  montre que les  $a_k$  sont réels donc  $\mathfrak{p} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)/I \in X_0(\mathbb{R})$ .

Pour le cas général, on remarque que  $X$  admet un recouvrement par des ouverts affines  $\sigma$ -invariants sur chacun desquels on vient de montrer que le résultat est vrai : on vérifie alors aisément que le résultat est vrai sur  $X$  tout entier. En particulier, pour  $x \in X_0$ , si  $U$  est un ouvert affine de  $X_0$  contenant  $x$ , alors  $\pi^{-1}(\{x\}) \subseteq \pi^{-1}(U)$  ce qui nous ramène au raisonnement précédent.

Enfin, d'après le Théorème 3.6, les fibres de  $\pi$  correspondent aux orbites sous l'action de  $\langle \sigma \rangle$  donc  $\pi|_{X(\mathbb{C})^{\sigma}}$  est injective et  $\pi$  induit bien une bijection entre  $X(\mathbb{C})^{\sigma}$  et  $X_0(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Remarque 3.15.** Le lieu réel  $X(\mathbb{C})^{\sigma}$  d'une structure réelle est parfois noté  $X(\mathbb{R})$  : la Proposition précédente montre bien d'où vient cette notation qui est cependant un *abus*. En soi, un  $\mathbb{C}$ -schéma  $X$  n'a pas de points  $\mathbb{R}$ -rationnels, i.e.  $X(\mathbb{R}) = \emptyset$  : en effet, si  $p : \text{Spec } \mathbb{R} \rightarrow X$  était un tel point, alors quitte à restreindre l'ensemble d'arrivée de  $p$ , on peut supposer  $X = \text{Spec } A$  affine.  $A$  est donc une  $\mathbb{C}$ -algèbre (on a donc un morphisme d'anneaux  $u : \mathbb{C} \rightarrow A$ ) et  $p$  correspond à un morphisme d'anneaux  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . On remarque alors que  $-1 = f(u(-1)) = f(u(i^2)) = f(u(i))^2$ , ce qui contredit la réalité du nombre  $f(u(i))$ .

Nous voulons maintenant traduire en termes de structures réelles la notion de  $\mathbb{R}$ -isomorphisme entre formes réelles.

Pour cela, remarquons d'abord que si  $X_0$  et  $X'_0$  sont deux formes réelles d'une même variété quasi-projective complexe  $X$  et si  $\varphi_0 : X_0 \rightarrow X'_0$  est un  $\mathbb{R}$ -isomorphisme, alors  $\varphi_1 := \varphi_0 \times \text{Id}$  est un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme entre  $(X_0)_{\mathbb{C}}$  et  $(X'_0)_{\mathbb{C}}$ . De plus,  $\varphi_1$  commute avec les structures réelles  $\sigma_0 := \text{Id}_{X_0} \times \text{Spec}(z \mapsto \bar{z})$  et  $\sigma'_0 := \text{Id}_{X'_0} \times \text{Spec}(z \mapsto \bar{z})$  de sorte que  $\sigma'_0 = (\varphi_0 \times \text{Id})\sigma_0(\varphi_0 \times \text{Id})^{-1}$ . Comme  $X_0$  et  $X'_0$  sont deux formes réelles de  $X$ , il existe des  $\mathbb{C}$ -isomorphismes  $\psi : (X_0)_{\mathbb{C}} \rightarrow X$  et  $\psi' : (X'_0)_{\mathbb{C}} \rightarrow X$  ; en définissant  $\sigma := \psi\sigma_0\psi^{-1}$  et  $\sigma' := \psi'\sigma'_0\psi'^{-1}$ , on voit alors que  $\varphi := \psi'(\varphi_0 \times \text{Id})\psi^{-1}$  conjugue les structures réelles  $\sigma$  et  $\sigma'$  sur  $X$  associées à  $\sigma_0$  et  $\sigma'_0$ , i.e.  $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ .

Réciproquement, si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux structures réelles sur une même variété quasi-projective complexe  $X$  et si  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{C}} X$  vérifie  $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ , alors en notant  $X_0 := X/\langle \sigma \rangle$ ,  $X'_0 = X/\langle \sigma' \rangle$  ainsi que  $\pi : X \rightarrow X_0$  et  $\pi' : X \rightarrow X'_0$  les projections canoniques, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\sigma} & X \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 X & \xrightarrow{\sigma'} & X \\
 \pi' \swarrow & & \searrow \pi' \\
 & X'_0 &
 \end{array}$$

Ainsi, le morphisme  $\pi' \circ \varphi$  est clairement  $\langle \sigma \rangle$ -invariant (i.e.  $(\pi' \circ \varphi) \circ \sigma = \pi' \circ \varphi$ ) donc, par propriété universelle du quotient par un groupe fini, il se factorise uniquement à travers la projection  $\pi$  en un morphisme

$\varphi_0 : X_0 \rightarrow X'_0$ . Reste à montrer que c'est un  $\mathbb{R}$ -isomorphisme : pour cela, remarquons d'abord que de façon analogue,  $\pi' \circ \varphi^{-1}$  est  $\langle \sigma' \rangle$ -invariant donc se factorise uniquement à travers  $\pi'$  en un morphisme  $\varphi'_0 : X'_0 \rightarrow X_0$ . On vérifie ensuite que  $\pi = \pi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$  est  $\langle \sigma \rangle$ -invariant donc se factorise uniquement à travers  $\pi$  et donne un morphisme  $X_0 \rightarrow X_0$  : l'identité et  $\varphi'_0 \circ \varphi_0$  conviennent tous deux donc  $\varphi'_0 \circ \varphi_0 = \text{Id}_{X_0}$  par unicité. De même, on montre que  $\varphi_0 \circ \varphi'_0 = \text{Id}_{X'_0}$  et donc  $\varphi_0$  est un  $\mathbb{R}$ -isomorphisme entre  $X_0 = X/\langle \sigma \rangle$  et  $X'_0 = X/\langle \sigma' \rangle$ .

On déduit naturellement de ce qui précède la définition et le théorème ci-après :

**Definition 3.16. (Équivalence de structures réelles)**

Deux structures réelles  $\sigma$  et  $\sigma'$  sur une même variété complexe  $X$  sont dites **équivalentes** si, et seulement si, il existe un  $\mathbb{C}$ -automorphisme  $\varphi$  de  $X$  tel que

$$\boxed{\sigma' = \varphi \sigma \varphi^{-1}}$$

**Théorème 3.17.** *Soit  $X$  une variété quasi-projective complexe.*

*Deux formes réelles de  $X$  sont  $\mathbb{R}$ -isomorphes si, et seulement si, les structures réelles associées sont équivalentes.* □

Pour une variété quasi-projective complexe  $X$ , nous avons donc obtenu une correspondance biunivoque entre les classes de  $\mathbb{R}$ -isomorphisme des formes réelles de  $X$  et les classes d'équivalence des structures réelles sur  $X$  : cela montre que l'étude des formes réelles des variétés complexes se ramène à celle des involutions antirégulières sur ces variétés. Nous allons maintenant réduire cette étude à un problème portant sur les groupes d'automorphismes (biréguliers) de ces variétés.

**Remarque 3.18.** Dans la suite, il nous arrivera donc d'appeler "variété (ou surface) algébrique réelle" un couple  $(X, \sigma)$  formé d'une variété (ou surface) algébrique complexe  $X$  et d'une structure réelle  $\sigma$  sur  $X$ .

## 3.2 Cohomologie galoisienne

### 3.2.1 Cohomologie galoisienne et structures réelles

Soit  $X$  une variété quasi-projective complexe. On s'intéresse à la classification de ses formes réelles à  $\mathbb{R}$ -isomorphisme près. Pour cela, remarquons d'abord que nous pouvons supposer qu'il existe au moins une structure réelle  $\sigma$  sur  $X$  : en effet, s'il n'existe pas de structure réelle sur  $X$ , alors le nombre de structures réelles est clairement fini. Fixons donc une structure réelle  $\sigma$  sur  $X$  : si  $\sigma'$  est une autre structure réelle sur  $X$ , alors  $\sigma' \circ \sigma$  est clairement birégulière donc

$$\sigma' \circ \sigma =: a_\sigma \in \text{Aut } X \text{ et } \sigma' = a_\sigma \sigma$$

et la donnée de  $\sigma'$  est équivalente à la donnée de  $a_\sigma$ .

Réciproquement, si  $a_\sigma \in \text{Aut } X$ , alors  $a_\sigma \sigma$  n'est pas nécessairement une structure réelle, car elle peut ne pas être une involution. En fait,  $a_\sigma \sigma$  est une structure réelle si, et seulement si

$$\text{Id}_X = (a_\sigma \sigma)^2 = a_\sigma (\sigma a_\sigma \sigma) = a_\sigma \sigma \cdot a_\sigma.$$

Cette égalité est appelée la *condition de cocycle*. Un automorphisme  $a_\sigma$  vérifiant cette égalité est un *cocycle* pour l'action du groupe  $G := \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $\text{Aut } X$  définie par  $G \times \text{Aut } X \rightarrow \text{Aut } X$ ,  $(\sigma, \varphi) \mapsto \sigma \cdot \varphi := \sigma \varphi \sigma^{-1} = \sigma \varphi \sigma$ .

Maintenant, si  $a_\sigma$  et  $b_\sigma$  sont deux cocycles, alors les structures réelles associées  $a_\sigma \sigma$  et  $b_\sigma \sigma$  sont équivalentes si, et seulement si :

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in \text{Aut } X, \quad b_\sigma \sigma &= \alpha^{-1} (a_\sigma \sigma) \alpha \\ \text{i.e. } b_\sigma &= \alpha^{-1} a_\sigma (\sigma \alpha \sigma^{-1}) = \alpha^{-1} a_\sigma \sigma \cdot \alpha \end{aligned}$$

Tout cela nous mène donc naturellement aux définitions suivantes<sup>4</sup> :

4. Pour simplifier, nous supposons ici que le groupe qui agit est fini, ce qui nous suffit amplement (cf. [Ser94] pour les définitions générales).

**Definition 3.19.** Soient  $G$  un groupe fini (ici  $G = \langle \sigma \rangle$ ) et  $A$  un  $G$ -groupe, i.e. un groupe équipé d'une action de  $G$  par automorphismes (ici  $A = \text{Aut } X$ ).

- Une application  $a : \begin{cases} G & \rightarrow A \\ \sigma & \mapsto a_\sigma \end{cases}$  est un **cocycle** si

$$\forall \sigma, \tau \in G, a_{\sigma\tau} = a_\sigma \sigma.a_\tau.$$

L'ensemble des cocycles est noté  $Z^1(G, A)$ .

- Deux cocycles  $a$  et  $b$  sont **équivalents** (ce que l'on note  $a \sim b$ ) si

$$\exists \alpha \in A, \forall \sigma \in G, b_\sigma = \alpha^{-1} a_\sigma \sigma.\alpha.$$

- Le **premier ensemble de cohomologie** est  $H^1(G, A) := Z^1(G, A) / \sim$ . En général, il s'agit seulement d'un *ensemble pointé* (le point distingué étant la classe de  $a \equiv \text{Id}$ ). Le zéroième ensemble de cohomologie est  $H^0(G, A) := A^G = \{a \in A \mid \forall \sigma \in G, \sigma.a = a\}$ .
- Si  $B$  est un  $G$ -groupe et si  $A$  est un sous-groupe normal de  $B$  stable par l'action de  $G$ , alors pour tout  $b \in Z^1(G, B)$ , on peut définir une nouvelle action de  $G$  sur  $A$  par :

$$\forall \sigma \in G, \forall a \in A, \sigma * a := b_\sigma \sigma.a b_\sigma^{-1}$$

Le groupe  $A$  équipé de cette nouvelle action est noté  $\mathbf{A}_b$  (en tant que  $G$ -groupe). On dit alors que le  $G$ -groupe  $A_b$  est obtenu par **torsion** du  $G$ -groupe  $A$  par  $b$ .

- Si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme de  $G$ -groupes (i.e. un morphisme de groupes tel que  $\forall \sigma \in G, \forall a \in A, f(\sigma.a) = \sigma.f(a)$ ),  $f$  induit un morphisme d'ensembles pointés  $f_* : H^1(G, A) \rightarrow H^1(G, B)$  défini comme suit :

$$f_* : \begin{cases} H^1(G, A) & \rightarrow H^1(G, B) \\ [(a_\sigma)] & \mapsto [(f(a_\sigma))] \end{cases}$$

**Remarque 3.20.** Dans la suite, puisque nous aurons toujours  $G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , nous identifierons un cocycle  $a$  et sa valeur  $a_\sigma$  en l'élément non-trivial  $\sigma$  de  $G$ .

On déduit alors de ce qui précède le théorème suivant :

**Théorème 3.21. (Structures réelles et cohomologie galoisienne - [BS64, 2.6])**

Soient  $X$  une variété quasi-projective complexe et  $\sigma$  une structure réelle sur  $X$ .

Les classes d'équivalence de structures réelles sont en bijection avec les éléments de  $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Aut}_{\mathbb{C}} X)$ , où l'élément non-trivial de  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$  agit sur  $\text{Aut}_{\mathbb{C}} X$  par conjugaison par  $\sigma$  (la classe de  $\sigma$  correspond à la classe de cohomologie du cocycle trivial).  $\square$

Par la suite, nous utiliserons abondamment le résultat suivant (et notamment le critère de finitude qu'il contient) :

**Théorème 3.22. (Suites exactes en cohomologie galoisienne - [BS64, 1.17])**

Soient  $G$  un groupe fini et  $1 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 1$  une suite exacte de  $G$ -groupes (i.e. une suite exacte  $G$ -équivariante de groupes).

On a une suite exacte d'ensembles pointés<sup>5</sup>

$$1 \rightarrow A^G \rightarrow B^G \rightarrow C^G \rightarrow H^1(G, A) \xrightarrow{f_*} H^1(G, B) \xrightarrow{g_*} H^1(G, C)$$

De plus, si  $H^1(G, C)$  est fini et si  $H^1(G, A_b)$  est fini pour tout  $b \in Z^1(G, B)$ , alors  $H^1(G, B)$  est fini.<sup>6</sup>  $\square$

**Remarque 3.23.** Nous ne définirons pas ici le deuxième ensemble de cohomologie d'un groupe abélien (cf. [Ser94, I, §2]), mais notons simplement que si  $A$  s'injecte dans le centre du groupe  $B$ , alors cette suite exacte se prolonge au  $H^2(G, A)$  (cf. [Ser94, I, §5.7]).

5. Ce qui signifie que l'image d'une application est égale à la préimage du point distingué par l'application qui suit.

6. En fait, ce résultat est un peu plus simple que celui d'origine, qui remplace l'hypothèse de finitude de  $H^1(G, A_b)$  pour tout  $b$  par l'hypothèse plus faible de finitude de  $\text{Im}(H^1(G, A_b) \rightarrow H^1(G, B_b)) \simeq (g^*)^{-1}(\{g^*(b)\})$  pour tout  $b$ .

Par la suite, nous aurons à utiliser ce théorème en lien avec les groupes  $\text{Aut}^\# X$  et  $\text{Aut}^* X$  d'une variété complexe  $X$  (cf. 2.16), ce qui nécessite le lemme suivant :

**Lemme 3.24.** *Soit  $X$  une variété algébrique complexe projective et  $\sigma$  une structure réelle sur  $X$ . La suite exacte  $1 \rightarrow \text{Aut}^\# X \rightarrow \text{Aut} X \rightarrow \text{Aut}^* X \rightarrow 1$  est  $\langle \sigma \rangle$ -équivariante.*

*Démonstration.* Remarquons d'abord que l'action de  $\sigma$  stabilise  $\text{Aut}^\# X$  : en effet, si  $\varphi \in \text{Aut}^\# X$ , alors pour tout diviseur  $D$  sur  $X$ ,  $(\sigma\varphi\sigma^{-1})^*(D) = \sigma^*\varphi^*(\sigma^*D) \sim \sigma^*\sigma^*D \sim D$  (où  $\sigma^*$  est tel que défini en 5.2).

Par conséquent, l'injection canonique  $\text{Aut}^\# X \hookrightarrow \text{Aut} X$  est  $\langle \sigma \rangle$ -équivariante. On peut alors définir l'action sur  $\text{Aut}^* X$  par  $\sigma.\varphi^* := (\sigma\varphi\sigma^{-1})^*$ , ce qui finit de rendre équivariante cette suite exacte.  $\square$

**Proposition et Définition 3.25. (Torsion des suites exactes)**

Soient  $G$  un groupe fini et  $1 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 1$  une suite exacte de  $G$ -groupes.

Pour  $b \in Z^1(G, B)$  et  $c := g_*(b) \in Z^1(G, C)$  (i.e.  $\forall \sigma \in G, c_\sigma := g(b_\sigma)$ ), on définit de nouvelles actions, dites **tordues par  $b$** , sur  $A, B$  et  $C$  comme suit :

- $G$  agit sur  $A$  par

$$\begin{cases} G \times A & \rightarrow A \\ (\sigma, x) & \mapsto \sigma * x := f^{-1}(b_\sigma f(\sigma.x)b_\sigma^{-1}) \end{cases}$$

où l'on a noté  $f^{-1}$  la réciproque de la corestriction de  $f$  à son image.<sup>7</sup>

- $G$  agit sur  $B$  par

$$\begin{cases} G \times B & \rightarrow B \\ (\sigma, y) & \mapsto \sigma * y := b_\sigma \sigma.y b_\sigma^{-1} \end{cases}$$

- $G$  agit sur  $C$  par

$$\begin{cases} G \times C & \rightarrow C \\ (\sigma, z) & \mapsto \sigma * z := c_\sigma \sigma.z c_\sigma^{-1} \end{cases}$$

En notant respectivement  $A_b, B_b$  et  $C_c$  les  $G$ -groupes ainsi définis (ils coïncident avec  $A, B$  et  $C$  en tant que groupes, seule l'action de  $G$  est modifiée), on obtient les résultats suivants :

1. on a une suite exacte de  $G$ -groupes

$$1 \rightarrow A_b \xrightarrow{f} B_b \xrightarrow{g} C_c \rightarrow 1 ;$$

2. elle donne donc naissance à une suite exacte d'ensembles pointés :

$$1 \rightarrow A_b^G \rightarrow B_b^G \rightarrow C_c^G \rightarrow H^1(G, A_b) \xrightarrow{\varphi_b} H^1(G, B_b) \xrightarrow{\psi_b} H^1(G, C_c)$$

3. on a une bijection naturelle d'ensembles pointés

$$\tau_b : \begin{cases} H^1(G, B_b) & \rightarrow H^1(G, B) \\ [(y_\sigma)] & \mapsto [(y_\sigma b_\sigma)] \end{cases}$$

ainsi qu'une bijection naturelle d'ensembles pointés<sup>8</sup>

$$\tau_c : \begin{cases} H^1(G, C_c) & \rightarrow H^1(G, C) \\ [(z_\sigma)] & \mapsto [(z_\sigma c_\sigma)] \end{cases}$$

4. on a des bijections d'ensembles pointés

$$\text{Im}(\varphi_b : H^1(G, A_b) \rightarrow H^1(G, B_b)) \simeq \text{Ker}(\psi_b : H^1(G, B_b) \rightarrow H^1(G, C_c)) = \psi_b^{-1}([\text{Id}]) \simeq \psi^{-1}([c])$$

où l'on a noté  $\psi : H^1(G, B) \rightarrow H^1(G, C)$  le morphisme induit par  $g$  avant torsion.

7. Cette définition est bien équivalente à celle donnée en 3.19.

8. Par contre, il n'y a pas en général de bijection entre  $H^1(G, A_b)$  et  $H^1(G, A)$  : en effet, dans ce cas, la torsion est faite par un cocycle **extérieur à  $A$**  contrairement aux cas de  $B$  et  $C$ .

*Démonstration.* 1. Il suffit de vérifier l'équivariance :

- si  $x \in A_b$  et  $\sigma \in G$ , alors  $f(\sigma * x) = f(f^{-1}(b_\sigma f(\sigma.x)b_\sigma^{-1})) = b_\sigma f(\sigma.x)b_\sigma^{-1} = b_\sigma \sigma.f(x)b_\sigma^{-1} = \sigma * f(x)$  ;
- si  $y \in B_b$  et  $\sigma \in G$ , alors  $g(\sigma * y) = g(b_\sigma \sigma.y b_\sigma^{-1}) = g(b_\sigma)g(\sigma.y)g(b_\sigma)^{-1} = c_\sigma \sigma.g(y)c_\sigma^{-1} = \sigma * g(y)$ .

2. C'est une conséquence directe de 1. et du Théorème 3.22.

3. Cf. [BS64, 1.5].

4. C'est une conséquence directe du Théorème 3.22 et de [BS64, 1.10]. □

**Remarque 3.26.** • Le 4. de la proposition précédente nous donne la fibre par  $\psi$  des éléments  $[c]$  de l'image de  $\psi$  mais ne nous dit rien sur la fibre de n'importe quel élément de  $Z^1(G, C)$  ; bien sûr, les éléments de  $Z^1(G, C) \setminus \text{Im } \psi$  ont une fibre vide mais pour appliquer cette proposition, il faut déjà connaître les éléments de  $\text{Im } \psi$ .

- Si  $X$  est une variété complexe,  $\sigma$  une structure réelle sur  $X$ , tordre par le cocycle  $b_\sigma \in Z^1(G, \text{Aut } X)$  revient à faire agir  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $\text{Aut } X$  par conjugaison par la nouvelle structure réelle  $b_\sigma \sigma$  : ce faisant, on change de structure réelle "privilegiée".

### 3.2.2 Quelques théorèmes de cohomologie

Nous donnons dans un premier temps des résultats déjà connus, à commencer par le théorème suivant qui est classique et dont on trouvera une preuve dans [Ser68, X.Prop.3] :

**Théorème 3.27. (Théorème 90 de Hilbert)**

$H^1(\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}), GL_n(\mathbb{L}))$  est trivial pour l'action usuelle. □

**Théorème 3.28.**

1. [BS64, 6.2] Si le  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -groupe  $A$  est un groupe algébrique linéaire défini sur  $\mathbb{R}$  (i.e. un groupe algébrique linéaire complexe muni d'une structure réelle), alors  $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), A)$  est fini pour "l'action naturelle" de  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$  (celle correspondant à la structure réelle de  $A$ ).
2. [Kam75, Th.1] Soit  $G$  un groupe fini. Si  $A$  et  $B$  sont deux  $G$ -groupes, alors  $H^1(G, A * B)$  est la somme amalgamée de  $H^1(G, A)$  et  $H^1(G, B)$  dans la catégorie des ensembles pointés, i.e. <sup>(9)</sup>

$$H^1(G, A * B) = (H^1(G, A) \times \{[e_B]\}) \cup (\{[e_A]\} \times H^1(G, B)). \quad \square$$

Pour conclure cette section, nous énonçons quelques résultats cohomologiques que nous avons eu à mettre au point en vue d'applications dans les chapitres ultérieurs. Le premier se déduit directement des définitions :

**Proposition 3.29.** Soient  $G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $A$  un  $G$ -groupe.

- Si  $G$  agit trivialement sur  $A$ , i.e.  $\forall a \in A, \sigma.a = a$ , alors

$$H^1(G, A) = \{[e_A]\} \cup \{\text{classes de conjugaison des éléments d'ordre 2 de } A\}.$$

- Si  $A = \langle \tau \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , alors la seule action possible de  $G$  sur  $A$  par automorphismes est l'action triviale. □

Le critère de finitude que voici sera – avec le Théorème 3.35 – un ingrédient crucial de la preuve de nos principaux résultats au Chapitre 5 (notamment 5.4 et 5.18) :

**Théorème 3.30.** Soient  $G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $A$  un  $G$ -groupe et  $A \rtimes G$  le produit semi-direct défini par l'action de  $G$  sur  $A$ .

Si  $A \rtimes G$  possède un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2 (en particulier, s'il a un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis), alors  $H^1(G, A)$  est fini.

9. Pour un groupe  $A$ , on note  $e_A$  son élément neutre.

*Démonstration.* Nous suivons ici une idée de Borel et Serre ([BS64, 3.8]). Rappelons que la loi de groupe du produit semi-direct  $A \rtimes G = \{(a, \sigma) \mid a \in A, \sigma \in G\}$  est définie comme suit :

$$(a, \sigma)(a', \sigma') := (a \sigma.a', \sigma \sigma').$$

Si  $a \in Z^1(G, A)$  est un cocycle, alors on vérifie facilement que l'application  $\tilde{a} : \begin{cases} G & \rightarrow A \rtimes G \\ \sigma & \mapsto (a_\sigma, \sigma) \end{cases}$  est un morphisme de groupes. Notons de plus que si  $\alpha \in A, \sigma \in G$  et  $a \in Z^1(G, A)$ , alors

$$(\alpha^{-1}, 1)(a_\sigma, \sigma)(\alpha, 1) = (\alpha^{-1}a_\sigma, \sigma)(\alpha, 1) = (\alpha^{-1}a_\sigma \sigma.\alpha, \sigma).$$

Ainsi, deux cocycles  $a$  et  $b$  sont équivalents si, et seulement si,  $\exists \alpha \in A$  tel que  $\forall \sigma \in G, (\alpha, 1)\tilde{a}(\sigma)(\alpha^{-1}, 1) = \tilde{b}(\sigma)$  ce qui revient à dire que les sous-groupes d'ordre 2 de  $A \rtimes G$  que sont  $\tilde{a}(G)$  et  $\tilde{b}(G)$  sont conjugués par un élément  $(\alpha, 1)$  de  $A \subseteq A \rtimes G$ .

Maintenant, si  $A \rtimes G$  possède un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2, alors il existe un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2 *seulement via des éléments de  $A$*  puisque  $A$  est d'indice fini dans  $A \rtimes G$ .

Donc, il existe  $p \in \mathbb{N}$  et  $a_1, \dots, a_p \in Z^1(G, A)$  tel que pour tout  $a \in Z^1(G, A)$ , il existe  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$  et  $(\alpha, 1) \in A \subseteq A \rtimes G$  tel que  $\tilde{a}(G) = (\alpha, 1)\tilde{a}_i(G)(\alpha^{-1}, 1)$ . On peut donc en conclure que  $H^1(G, A) = \{[a_1], \dots, [a_p]\}$  est fini.  $\square$

**Théorème 3.31.** *Soit  $G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Si  $A$  est un  $G$ -groupe abélien tel que  $\forall a \in A, \exists! b \in A \mid a = 2b$ , alors  $H^1(G, A) = 0$  et  $H^2(G, A) = 0$ .*

*Démonstration.* Nous proposons ici une preuve élémentaire de ce résultat.

- **$H^1(G, A)$ .** On remarque que  $a_\sigma \in A$  est un cocycle si, et seulement si,  $0 = a_\sigma + \sigma.a_\sigma$ , i.e.  $\boxed{\sigma.a_\sigma = -a_\sigma}$ . Maintenant, si  $a_\sigma$  et  $b_\sigma$  sont deux cocycles alors

$$\begin{aligned} (b_\sigma) \sim (a_\sigma) &\iff \exists \alpha \in A \mid b_\sigma = -\alpha + a_\sigma + \sigma.\alpha \\ &\iff \exists \alpha \in A \mid b_\sigma - a_\sigma = \sigma.\alpha - \alpha \end{aligned}$$

Soit  $\alpha \in A$  tel que  $a_\sigma - b_\sigma = 2\alpha$  <sup>(10)</sup>. Comme l'action de  $\sigma$  sur  $A$  est un endomorphisme du groupe  $A$  :

$$2(\sigma.\alpha - \alpha) = \sigma.(2\alpha) - 2\alpha = \sigma.(a_\sigma - b_\sigma) - (a_\sigma - b_\sigma) = b_\sigma - a_\sigma - a_\sigma + b_\sigma = 2(b_\sigma - a_\sigma).$$

L'injectivité de  $A \rightarrow A, x \mapsto 2x$  montre alors que  $\sigma.\alpha - \alpha = b_\sigma - a_\sigma$ . Ainsi, deux cocycles sont toujours équivalents, i.e.  $H^1(G, A) = 0$ .

- **$H^2(G, A)$ .** Un 2-cocycle de l'action de  $G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $A$  est une application  $b : G^2 \rightarrow A$  telle que

$$\forall \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in G, \sigma_1.b_{\sigma_2, \sigma_3} - b_{\sigma_1 \sigma_2, \sigma_3} + b_{\sigma_1, \sigma_2 \sigma_3} - b_{\sigma_1, \sigma_2} = 0.$$

En spécialisant ce qui précède à chacun des 8 triplets possibles, on obtient que  $b : G^2 \rightarrow A$  est un 2-cocycle si, et seulement si,

$$\boxed{\bullet b_{1, \sigma} = b_{1, 1} \quad \bullet b_{\sigma, 1} = \sigma.b_{1, 1} \quad \bullet \sigma.(b_{1, 1} + b_{\sigma, \sigma}) = b_{1, 1} + b_{\sigma, \sigma}.}$$

Par définition,  $b$  est cohomologiquement trivial si, et seulement si, il existe  $a : G \rightarrow A$  tel que

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in G, b_{\sigma_1, \sigma_2} = \sigma_1.a_{\sigma_2} - a_{\sigma_1 \sigma_2} + a_{\sigma_1} =: (d^1 a)_{\sigma_1, \sigma_2}.$$

En spécialisant, on obtient que ceci équivaut à dire que

$$a_1 = b_{1, 1} \text{ et } \exists a_\sigma \in A \mid b_{\sigma, \sigma} + b_{1, 1} = \sigma.a_\sigma + a_\sigma.$$

Comme ci-dessus, on voit alors qu'on obtient le résultat en choisissant l'unique  $a_\sigma \in A$  vérifiant  $b_{1, 1} + b_{\sigma, \sigma} = 2a_\sigma$ , ce qui montre que tout 2-cocycle est cohomologiquement trivial, i.e. que  $H^2(G, A) = 0$ .

10. Le lecteur peut se convaincre aisément que ce choix est naturel malgré les apparences : en effet, il suffit de traiter le cas où  $G$  agit par conjugaison complexe sur  $A := \mathbb{C}$ .

□

**Remarque 3.32.** En passant, on a redémontré le résultat classique (cf.[Wei94, 6.2.2] et [Sil89, II.3.5.1]) suivant : si  $A$  est un  $G$ -groupe **abélien** avec  $G = \langle \sigma \rangle$  d'ordre 2, alors

$$H^1(G, A) = \frac{\text{Ker}(1 + \sigma)}{\text{Im}(1 - \sigma)} \text{ et } H^2(G, A) = \frac{\text{Ker}(1 - \sigma)}{\text{Im}(1 + \sigma)}.$$

Pour le dernier résultat, nous aurons besoin notamment de la définition suivante (cf.[BS64, 3.1] ou [GP99]) :

**Definition 3.33. (Groupe arithmétique)**

Un groupe  $\Gamma$  est dit **arithmétique** s'il peut être plongé dans le groupe  $G(\mathbb{Q})$  des points  $\mathbb{Q}$ -rationnels d'un groupe algébrique linéaire  $G$  défini sur  $\mathbb{Q}$  de telle sorte à être commensurable avec  $G(\mathbb{Z})$  (i.e.  $\Gamma \cap G(\mathbb{Z})$  est d'indice fini à la fois dans  $\Gamma$  et dans  $G(\mathbb{Z})$ ).

**Exemple 3.34.** En prenant  $G = \mathbb{G}_a^k$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ , on voit que  $\Gamma := \mathbb{Z}^k = G(\mathbb{Z})$  est un groupe arithmétique.

**Théorème 3.35.** Soient  $G$  un groupe fini et  $A$  un  $G$ -groupe.

1. Si  $A$  est un groupe arithmétique, alors  $H^1(G, A)$  est fini indépendamment de l'action de  $G$  sur  $A$ .
2. Si  $A$  contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $\mathbb{Z}^k$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ , alors  $H^1(G, A)$  est fini indépendamment de l'action de  $G$  sur  $A$ . (Ceci est vrai en particulier si  $A$  est fini, i.e.  $k = 0$ .)

*Démonstration.* 1. D'après [GP99, Th.1.4] (voir aussi [BS64, 3.8]), toute extension finie d'un groupe arithmétique (en particulier,  $A \rtimes G$ ) a un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis. Le Théorème 3.30 donne alors directement le résultat voulu.

2. Par hypothèse,  $A$  contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à  $\mathbb{Z}^k$  pour un  $k \in \mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}^k$  est un groupe arithmétique résoluble : donc, d'après [GP99] (voir le corollaire du Théorème 1.2),  $A$  est un groupe arithmétique. Le point précédent permet de conclure. □

### 3.3 Structures réelles et éclatements

**Definition 3.36.** Soient  $(X, \sigma)$  et  $(X', \sigma')$  deux surfaces algébriques réelles.

Une **transformation birationnelle réelle** (resp. un **isomorphisme réel**) entre  $X$  et  $X'$  est une transformation birationnelle (resp. un isomorphisme) qui commute avec les structures réelles  $\sigma$  et  $\sigma'$ .

**Proposition 3.37. (Éclatements réels)**

Soit  $(X, \sigma)$  une surface projective réelle lisse et  $X(\mathbb{R}) := X(\mathbb{C})^\sigma$  son lieu réel (cf. 3.14 et 3.15).

1. [Sil89, II.6.1] L'éclatement  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  d'un point réel  $x$  de  $X$  ou d'une paire de points non-réels conjugués de  $X$  permet de munir  $\tilde{X}$  d'une structure réelle naturelle telle que  $\pi$  soit réelle.
2. [Sil89, II.6.9] Si  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  est l'éclatement d'un point réel de  $X$ , alors on a<sup>11</sup> :  $\tilde{X}(\mathbb{R}) \approx X(\mathbb{R}) \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ .  
Si  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  est l'éclatement d'une paire de points non-réels conjugués de  $X$ , alors :  $\tilde{X}(\mathbb{R}) \approx X(\mathbb{R})$ .
3. Si l'éclatement d'un point est réel, alors ce point est réel. Si l'éclatement d'une paire  $(p_1, p_2)$  de points non-réels est réel, alors  $\sigma(p_1) = p_2$ .

**Remarque 3.38.** Notons que si  $(x, y)$  sont des coordonnées analytiques locales au voisinage d'un point réel éclaté  $p$ , alors la structure réelle obtenue en relevant  $\sigma$  sur  $X$  est  $\sigma' : ((x, y), [z : t]) \mapsto (\sigma(x, y), [\bar{z} : \bar{t}])$ , où la barre désigne la conjugaison complexe usuelle.

*Démonstration.* On prouve 3. dans le cas de l'éclatement d'un point (la preuve est analogue dans l'autre cas). Notons  $\tilde{\sigma}$  et  $\sigma$  les structures réelles sur  $\tilde{X}$  et  $X$  resp. pour lesquelles l'éclatement  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  du point  $x \in X$  est réel. Si  $E$  est la courbe exceptionnelle de  $\pi$  et si  $\tilde{\sigma}(E) \neq E$ , alors  $\pi(\tilde{\sigma}(E))$  est une courbe et, comme  $\pi$  est réel,  $\pi(\tilde{\sigma}(E)) = \sigma(\pi(E)) = \sigma(x)$  est un point. Ceci étant absurde, on en déduit que  $\tilde{\sigma}(E) = E$  et donc que  $\sigma(x) = \sigma(\pi(E)) = \pi(\tilde{\sigma}(E)) = \pi(E) = x$ . □

11. En notant  $\approx$  la relation d'homéomorphie pour la topologie euclidienne, et non la topologie de Zariski.

Pour ce qui est des contractions, on a le résultat suivant, prouvé dans [Sil89, 6.2, 6.6] :

**Proposition 3.39. (Contractions réelles)** *Soit  $X$  une surface projective lisse réelle.*

1. Si  $D$  est un diviseur sur  $X$  tel que :

- $D = \sigma^*D$  avec  $D^2 = -1$ ,  $D \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  ;
- ou  $D = E + \sigma^*E$  avec  $E \cdot \sigma^*E = 0$  et  $E^2 = -1$ ,  $E \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

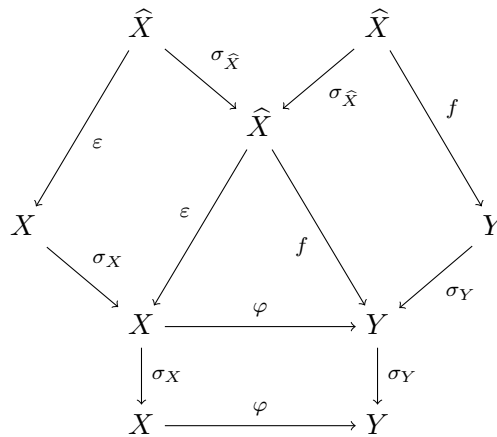
alors il existe une structure réelle naturelle sur  $\pi(X)$ , image de  $X$  par la contraction  $\pi$  de  $D$ , telle que  $\pi$  soit réel.

2. Si  $D = E + \sigma^*E$  avec  $E \cdot \sigma^*E \neq 0$ , alors on ne peut pas contracter  $D$  vers une surface réelle lisse.  $\square$

La factorisation des transformations birationnelles en produit d'éclatements et de contractions (cf. [Har77, V.5.5]) se comporte comme on s'y attend avec les structures réelles :

**Proposition 3.40.** *Une transformation birationnelle réelle entre surfaces projectives lisses réelles se factorise avec des éclatements et des contractions réels.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi : X \dashrightarrow Y$  une transformation birationnelle réelle entre deux surfaces projectives lisses réelles. D'après [Har77, V.5.5], il existe des morphismes birationnels  $\varepsilon : \widehat{X} \rightarrow X$  et  $f : \widehat{X} \rightarrow Y$  tels que  $f = \varphi \circ \varepsilon$ . Comme  $\varphi = [f_0 : \dots : f_n]$  est réelle, son lieu d'indétermination  $\bigcap_{i=0}^n \mathcal{V}(f_i)$  est globalement stabilisé par  $\sigma_X$  et donc la suite d'éclatements  $\varepsilon$  est réelle.



Comme  $\varepsilon$  est réel, on a  $\varepsilon\sigma_{\widehat{X}} = \sigma_X\varepsilon$  ; on a également  $f = \varphi\varepsilon$  (c'est le principe même de la factorisation) et  $\varphi\sigma_X = \sigma_Y\varphi$  car  $\varphi$  est réelle. Ainsi, on en déduit que  $f\sigma_{\widehat{X}} = \varphi\varepsilon\sigma_{\widehat{X}} = \varphi\sigma_X\varepsilon = \sigma_Y\varphi\varepsilon = \sigma_Yf$  et  $f$  est réel, comme  $\varepsilon$ , d'où le résultat.  $\square$

### 3.4 Caractérisation de l'équivalence des structures réelles par leurs lieux réels

Le but de cette section est d'amener à la preuve du théorème suivant (qui n'est pas dans la littérature, à notre connaissance) :

**Théorème 3.41.** *Soit  $X$  un schéma intègre et quasi-projectif sur  $\mathbb{C}$ .*

*Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux structures réelles sur  $X$  telles que  $X^\sigma$  et  $X^{\sigma'}$  sont Zariski-denses dans  $X$  (en particulier, si  $X$  est régulier et irréductible, cela revient à ce qu'ils soient non-vides), alors*

$$\sigma \sim \sigma' \iff \exists \varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{C}} X \mid \varphi(X^\sigma) = X^{\sigma'}$$

Après avoir énoncé un résultat classique sur la densité du lieu réel des structures réelles sur les variétés lisses, nous rappellerons la définition de l'égalisateur de deux morphismes de schémas ainsi que les propriétés dont nous aurons besoin à son propos pour prouver le théorème précédent.

### 3.4.1 Densité du lieu réel des variétés lisses

**Théorème 3.42.** *Soient  $X$  un schéma intègre et quasi-projectif sur  $\mathbb{C}$  et  $\sigma$  une structure réelle sur  $X$ . Si  $X^\sigma$  n'est pas inclus dans le lieu singulier<sup>12</sup> de  $X$ , alors  $X^\sigma$  est Zariski-dense dans  $X$ .*

Une preuve non-schématique de ce théorème est disponible dans [Man, Chap. 2]. Nous en proposons une preuve schématique s'appuyant sur le théorème suivant :

**Théorème 3.43.** ([Jar11, 5.6.3])

*Soit  $V$  un schéma intègre séparé géométriquement irréductible de type fini sur  $\mathbb{R}$ .*

*Si  $V$  contient un point réel régulier, alors  $V(\mathbb{R})$  est Zariski-dense dans  $V$ .* □

*Preuve du Théorème 3.42.* Il nous reste à prouver que le théorème ci-dessus implique le résultat voulu. Soient donc  $X$  un  $\mathbb{C}$ -schéma intègre quasi-projectif,  $\sigma$  une structure réelle sur  $X$ ,  $X_0 = X/\langle\sigma\rangle$  et  $\pi : X \rightarrow X_0$  la projection canonique.

Notons d'abord que  $X_0$  est bien un schéma intègre séparé géométriquement irréductible de type fini sur  $\mathbb{R}$ . En effet,  $X_0$  est d'abord géométriquement intègre (et donc intègre et géométriquement irréductible) puisque  $X \simeq (X_0)_{\mathbb{C}}$  est intègre. D'après [sga71, V, Cor. 1.5],  $X_0$  est séparé de type fini sur  $\mathbb{R}$  car  $X$  l'est aussi sur  $\mathbb{R}$ . Enfin, puisque  $X(\mathbb{C})^\sigma$  contient un point régulier  $p$ , la Proposition 3.14 montre que  $\pi(p)$  est un point réel lisse (puisque  $p$  est régulier) donc régulier d'après [Liu02, 4.3.30]. Nous pouvons donc appliquer le théorème précédent qui montre que  $X_0(\mathbb{R})$  est Zariski-dense dans  $X_0$ .

Pour en déduire la densité de  $X(\mathbb{C})^\sigma$  dans  $X$ , notons que la Proposition 3.14 montre que  $\pi^{-1}(X_0(\mathbb{R})) = X(\mathbb{C})^\sigma$ . Comme  $\pi$  est la projection canonique du quotient d'un espace topologique par un groupe d'homéomorphismes,  $\pi$  est continue et ouverte : on peut alors vérifier que pour toute partie  $A$  de  $X_0$ ,  $\pi^{-1}(\overline{A}) = \overline{\pi^{-1}(A)}$ . On en déduit que :

$$\overline{X(\mathbb{C})^\sigma} = \overline{\pi^{-1}(X_0(\mathbb{R}))} = \pi^{-1}(\overline{X_0(\mathbb{R})}) = \pi^{-1}(X_0) = X.$$

□

On en déduit immédiatement le :

**Corollaire 3.44.** *Soient  $X$  un schéma intègre quasi-projectif sur  $\mathbb{C}$  et  $\sigma$  une structure réelle sur  $X$ .*

*Si  $X$  est régulier et  $X^\sigma \neq \emptyset$ , alors  $X^\sigma$  est Zariski-dense dans  $X$ .* □

Si  $X$  n'est pas régulier, son lieu réel peut n'être ni vide, ni dense : c'est le cas par exemple de la sous-variété de  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$  d'équation  $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 4y^2 + 4 + x^2$  avec la structure réelle usuelle, cf. [Man, Chap. 2].

### 3.4.2 Égalisateur de deux morphismes de schémas

Rappelons d'abord la définition générale d'un égalisateur en théorie des catégories :

**Definition 3.45.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $X$  et  $Y$  deux objets de  $\mathcal{C}$  et  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .

Un **égalisateur de  $f$  et  $g$**  est un couple  $(E, i)$  formé d'un objet  $E$  de  $\mathcal{C}$  et d'un morphisme  $i : E \rightarrow X$  tel que  $f \circ i = g \circ i$  et vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout couple  $(F, j)$  tel que  $f \circ j = g \circ j$ , il existe un unique morphisme  $\varepsilon : F \rightarrow E$  tel que  $j = i \circ \varepsilon$ .

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{i} & X \xrightarrow[f]{g} Y \\
 \uparrow \exists! \varepsilon & \nearrow j & \\
 F & & 
 \end{array}$$

Un tel égalisateur  $(E, i)$  est unique à isomorphisme près et est noté **Ker**  $(f, g)$ .

Autrement dit, pour tout objet  $F$  de  $\mathcal{C}$ , on a une bijection

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(F, E) \simeq \{j \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F, X) \mid f \circ j = g \circ j\}$$

---

12. En particulier, cela implique  $X^\sigma \neq \emptyset$

**Remarque 3.46.** En particulier, si  $S$  est un schéma et  $\mathcal{C}$  est la catégorie des  $S$ -schémas, on obtient que, pour tout  $S$ -schéma  $F$ , les points  $F$ -rationnels de  $E$  sont exactement les points  $F$ -rationnels de  $X$  en lesquels  $f \circ \cdot$  et  $g \circ \cdot$  coïncident. Autrement dit,  $E$  est bien le schéma correspondant à l'égalisation de  $f$  et  $g$  comme *morphismes de schémas* (i.e. morphismes entre leurs foncteurs de points) et pas simplement comme applications ensemblistes.

Dans la catégorie des schémas, on a le résultat suivant (cf. [GW10, 9.3])

**Proposition 3.47.** Soient  $S$  un schéma,  $X$  et  $Y$  deux  $S$ -schémas ainsi que  $f, g : X \rightarrow Y$  des  $S$ -morphismes de schémas.

L'égalisateur de  $f$  et  $g$  est un sous-schéma localement fermé  $E$  de  $X$  défini par le diagramme ci-dessous (autrement dit, c'est le tiré en arrière de  $\Delta_{Y/S}$  par  $(f, g)$ ) :

$$\begin{array}{ccc} E = Y \times_{(Y \times_S Y)} X & \xrightarrow{p} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow \Delta_{Y/S} \\ X & \xrightarrow{(f, g)} & Y \times_S Y \end{array}$$

De plus, si  $Y$  est séparé sur  $S$ , alors  $E$  est un sous-schéma fermé de  $X$ .

*Démonstration.* Vérifions d'abord que le couple  $(E, i)$  défini dans l'énoncé est bien un égalisateur de  $f$  et  $g$  :

- en notant  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les deux projections canoniques  $Y \times_S Y \rightarrow Y$ , on a :

$$\begin{aligned} f \circ i &= \pi_1 \circ (f, g) \circ i = \underbrace{\pi_1 \circ \Delta_{Y/S} \circ p}_{= \text{Id}} \\ &= p = \pi_2 \circ \Delta_{Y/S} \circ p \\ &= \pi_2 \circ (f, g) \circ i = g \circ i \end{aligned}$$

- si  $j : F \rightarrow X$  est tel que  $f \circ j = g \circ j =: y$ , alors  $(f, g) \circ j = (y, y) \in \Delta(Y)(F)$  et en posant  $\varepsilon := (j, y) : F \rightarrow E = Y \times_{(Y \times_S Y)} X$ , on a bien  $j = i \circ \varepsilon$ . De plus,  $\varepsilon$  est bien uniquement défini par  $j$  et  $y = f \circ j = g \circ j$ , c'est-à-dire par  $j$  : en effet, si  $\varepsilon' = (j', y') : F \rightarrow E$  convenait aussi, alors d'une part, on doit avoir  $j = i \circ \varepsilon'$  donc  $j = j'$  et d'autre part, l'existence de  $\varepsilon = (j', y') : F \rightarrow E$  implique (par définition du produit fibré) que  $\Delta_{Y/S} \circ y' = (f, g) \circ j$ , i.e.  $(y', y') = (f \circ j, g \circ j) = (y, y)$ .

Donc  $(E, i)$  est bien un égalisateur de  $f$  et  $g$ . Enfin, comme le morphisme diagonal est toujours une immersion et comme le changement de base d'une immersion (resp. fermée) est une immersion (resp. fermée), on voit que  $E$  est bien un sous-schéma localement fermé de  $X$  et que c'en est un sous-schéma fermé si  $Y$  est séparé sur  $S$ .  $\square$

Cependant, l'égalisateur de  $f$  et  $g$  n'est pas l'ensemble des points de  $X$  en lesquels  $f$  et  $g$  coïncident. Par exemple, si  $X$  et  $Y$  sont intègres et séparés sur  $S$  et si  $f$  et  $g$  sont dominants et distincts, alors ils coïncident en le point générique  $\zeta$  de  $X$  (puisqu'ils l'envoient sur le point générique de  $Y$ ) : mais  $\zeta$  ne peut appartenir à  $\text{Ker}(f, g)$ , sans quoi  $\text{Ker}(f, g)$  serait un fermé dense de  $X$  et serait donc  $X$  lui-même (au moins topologiquement, et donc aussi schématiquement car  $X$  est réduit, cf. Lemme 3.49). Mais ceci est impossible puisque, d'après la remarque 3.46, cela montrerait que, pour tout  $S$ -schéma  $T$ , tout point  $T$ -rationnel de  $X$  est un point de coïncidence de  $f \circ \cdot$  et  $g \circ \cdot$ , c'est-à-dire que les morphismes de schémas  $f$  et  $g$  seraient égaux (et ce quels que soient  $f$  et  $g$  dominants entre  $X$  et  $Y$ !).

On va tout de même montrer que l'égalisateur se comporte bien comme attendu sur les points  $\mathbb{K}$ -rationnels si on prend  $S = \text{Spec } \mathbb{K}$ .

**Proposition 3.48. (Points rationnels de la diagonale et de l'égalisateur)**

Soient  $\mathbb{K}$  un corps,  $X$  et  $Y$  deux  $\mathbb{K}$ -schémas,  $f, g : X \rightarrow Y$  deux  $\mathbb{K}$ -morphismes,  $\Delta := \Delta_{X/\mathbb{K}}$  le morphisme diagonal et  $E = \text{Ker}(f, g)$ .

1. Pour tout  $\mathbb{K}$ -schéma  $T$ , les points  $T$ -rationnels de  $\Delta(X)$  sont :

$$\boxed{(\Delta(X))(T) = \{(f, f) \mid f \in X(T)\}}$$

2. Pour tout  $\mathbb{K}$ -schéma  $T$ , les points  $T$ -rationnels de  $E$  sont :

$$\boxed{E(T) = \{(x, y) \in X(T) \times Y(T) \mid (f, g) \circ x = \Delta_{Y/\mathbb{K}} \circ y\} = \{(x, y) \in X(T) \times Y(T) \mid f \circ x = g \circ x = y\}}$$

3. Les points  $\mathbb{K}$ -rationnels de  $E$  sont :

$$\boxed{E(\mathbb{K}) = \{(x, y) \in X(\mathbb{K}) \times Y(\mathbb{K}) \mid f(x) = g(x) = y\} \simeq \{x \in X(\mathbb{K}) \mid f(x) = g(x)\}}$$

*Démonstration.* Notons d'abord  $\delta : X \rightarrow \Delta(X)$  l'isomorphisme tel que  $\Delta = j \circ \delta$ , où  $j : \Delta(X) \hookrightarrow X \times X$  est l'injection canonique.

1. Si  $f \in X(T)$ , alors  $(f, f) \in (\Delta(X))(T)$  : pour le voir, on va montrer que  $\delta \circ f = (f, f)$ . Or, en notant  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les deux projections canoniques  $X \times X \rightarrow X$ , on a :

$$\pi_1 \circ \underbrace{j \circ (\delta \circ f)}_{\Delta} = \underbrace{(\pi_1 \circ \Delta)}_{=\text{Id}} \circ f = f = \underbrace{(\pi_2 \circ \Delta)}_{=\text{Id}} \circ f = \pi_2 \circ \underbrace{j \circ (\delta \circ f)}_{\Delta}$$

donc  $\delta \circ f = (f, f)$ .

Réciproquement, si  $\varphi \in (\Delta(X))(T)$  alors  $f := \delta^{-1} \circ \varphi \in X(T)$  et  $j \circ \varphi = (f, f)$  puisque

$$\pi_1 \circ (j \circ \varphi) = \pi_1 \circ \underbrace{j \circ \delta \circ f}_{=\Delta} = \underbrace{\pi_1 \circ \Delta}_{=\text{Id}} \circ f = f = \pi_2 \circ \Delta \circ f = \pi_2 \circ j \circ \delta \circ f = \pi_2 \circ (j \circ \varphi)$$

2. C'est une conséquence directe de la définition du produit fibré : pour tout  $\mathbb{K}$ -schéma  $T$

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(T, Y \times_{(Y \times_S Y)} X) = \{(x, y) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T, Y) \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T, X) \mid (f, g) \circ x = \Delta_{Y/\mathbb{K}} \circ y\}.$$

3. D'après ce qui précède,  $E(\mathbb{K}) = \{(\varphi, y) \in X(\mathbb{K}) \times Y(\mathbb{K}) \mid f \circ \varphi = g \circ \varphi = y\}$ . Soient  $\eta = (0_{\mathbb{K}})$  le point de  $\text{Spec } \mathbb{K}$  et  $x = \varphi(\eta)$ . Par définition d'un morphisme de schémas : (en notant  $y = f(x) = g(x) = y(\eta)$ )

$$f \circ \varphi = g \circ \varphi \iff f(x) = g(x) \text{ et } (f \circ \varphi)_x^\# = (g \circ \varphi)_x^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{K}, \eta} = \mathbb{K}$$

Le but ici est de montrer que la condition sur  $(f \circ \varphi)_x^\#$  et  $(g \circ \varphi)_x^\#$  est inutile pour les points  $\mathbb{K}$ -rationnels, i.e. que  $(f \circ \varphi)_x^\# = (g \circ \varphi)_x^\#$  si  $f(x) = g(x)$ , **ce qui est faux en général**<sup>13</sup> ce qui explique qu'en général, si  $\mathbb{L}$  est une extension de  $\mathbb{K}$  alors  $E(\mathbb{L}) \subseteq \{(x, y) \in X(\mathbb{L}) \times Y(\mathbb{L}) \mid f(x) = g(x) = y\}$  mais qu'il n'y a pas nécessairement égalité.

Remarquons d'abord que la définition d'un morphisme d'espaces localement annelés implique que  $f_x^\#(\mathfrak{m}_{Y,y}) \subseteq \mathfrak{m}_{X,x}$  (et idem pour  $g$ ) donc  $(f \circ \varphi)_x^\#$  et  $(g \circ \varphi)_x^\#$  induisent par passage au quotient des morphismes entre les corps résiduels. Ces morphismes déterminent complètement  $(f \circ \varphi)_x^\#$  et  $(g \circ \varphi)_x^\#$  donc il nous suffit de raisonner sur ces morphismes entre corps résiduels pour obtenir l'égalité voulue. Mais  $\kappa(y) = \mathbb{K}$  : en effet,  $(f \circ \varphi)_x^\#$  induit un morphisme de corps (donc injectif) de  $\kappa(y)$  vers  $\mathbb{K}$  et  $\kappa(y)$  est donc une  $\mathbb{K}$ -algèbre qui s'injecte dans  $\mathbb{K}$ , ce qui implique que  $\kappa(y) = \mathbb{K}$ .

Maintenant, le seul endomorphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbre de  $\mathbb{K}$  est Id (les seuls endomorphismes de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel sont les  $x \mapsto ax$  pour  $a \in \mathbb{K}$  et parmi eux, seul Id est un morphisme de corps). Donc les morphismes induits<sup>14</sup> par  $(f \circ \varphi)_x^\#$  et  $(g \circ \varphi)_x^\#$  sont égaux.

Finalement, on a bien montré que si  $x$  et  $y$  sont  $\mathbb{K}$ -rationnels, alors  $f \circ \varphi = g \circ \varphi \iff f(x) = g(x)$ .

□

13. Contre-exemple : les morphismes  $f = \text{Spec}(P \mapsto P(i))$  et  $g = \text{Spec}(P \mapsto P(-i))$  de  $\text{Spec } \mathbb{C} = \{\eta\}$  dans  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$  vérifient bien  $f(\eta) = g(\eta) = (x^2 + 1)$  mais il est clair que  $f \neq g$ .

14. Entre les corps résiduels, i.e. de  $\kappa(y) = \mathbb{K}$  vers  $\mathbb{K} = \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{K}, \eta}$ .

### 3.4.3 Preuve du Théorème 3.41

*Démonstration.* ( $\Rightarrow$ ) Si  $\sigma \sim \sigma'$ , alors il existe  $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}X$  tel que  $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ . On vérifie aussitôt que  $\forall x \in X^\sigma, \varphi(x) \in X^{\sigma'}$  et que  $\forall x \in X^{\sigma'}, \varphi^{-1}(x) \in X^\sigma$ .

( $\Leftarrow$ ) D'après ce qui précède,  $\varphi(X^\sigma) = X^{\varphi\sigma\varphi^{-1}}$ . En notant  $\sigma_1 := \varphi\sigma\varphi^{-1}$ , on suppose donc que  $X^{\sigma_1} = X^{\sigma'}$  et on va montrer que  $\sigma_1 = \sigma'$ .

Soit  $f := \sigma_1 \circ \sigma'$  et soit  $E = \text{Ker}(f, \text{Id}_X)$ . Remarquons que  $X^{\sigma_1} = X^{\sigma'} \subseteq E(\mathbb{C}) \subseteq E$  : en effet, si  $x \in X^{\sigma'}$ , alors  $x$  est bien un point fermé (i.e.  $\mathbb{C}$ -rationnel) vérifiant  $f(x) = x$ , donc  $x \in E(\mathbb{C})$  d'après le point 3. de la Prop. 3.48. Comme  $X^{\sigma'}$  est dense dans  $X$ , on voit que  $E$  est dense dans  $X$ . Puisque  $f \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}X$ , la Prop. 3.47 montre que  $E$  est un sous-schéma fermé de  $X$ . Par conséquent,  $X$  et  $E$  ont le même espace topologique sous-jacent et comme  $X$  est réduit, le Lemme ci-après montre que  $E = X$ . Ainsi, la remarque 3.46 montre que  $\sigma_1 \circ \sigma' = f = \text{Id}_X$  et donc  $\sigma_1 = \sigma'$ .  $\square$

**Lemme 3.49.** *Soient  $X$  un  $\mathbb{C}$ -schéma réduit et  $E$  un sous-schéma fermé de  $X$ .*

*Si  $E$  et  $X$  ont les mêmes espaces topologiques sous-jacents, alors  $E = X$  en tant que schémas.*

*Démonstration.* Soit  $U = \text{Spec } \mathcal{O}_X(U)$  un ouvert affine de  $X$  : comme  $E$  est un sous-schéma fermé de  $X$  (cf. [EH00, I-27]), il existe un faisceau quasi-cohérent d'idéaux  $\mathcal{I}$  sur  $X$  tel que  $U \cap E = \text{Spec}(\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}(U))$ . Notons  $A = \mathcal{O}_X(U)$  et  $I = \mathcal{I}(U)$ .

Comme  $E$  et  $X$  ont les mêmes espaces topologiques sous-jacents,  $U$  et  $E \cap U$  aussi donc tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  correspond à un point de  $\text{Spec}(A/I)$ , i.e.  $\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A, I \subseteq \mathfrak{p}$ . Par conséquent,  $I \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A} \mathfrak{p} = \sqrt{0} = (0)$  car

$A$  est réduit. Ainsi,  $I = \mathcal{I}(U) = 0$ . Ceci étant vrai pour tout ouvert affine de  $X$ , on en déduit que  $\mathcal{I} = 0$  et donc que  $E = X$ .  $\square$

**Remarque 3.50.** La preuve du Théorème 3.41 n'aurait pas fonctionné si l'on avait utilisé directement l'égalisateur des  $\mathbb{R}$ -automorphismes  $\sigma_1$  et  $\sigma'$  du  $\mathbb{C}$ -schéma  $X$  : en effet, celui-ci n'est pas un sous-schéma fermé de  $X$ , puisqu'un tel sous-schéma fermé doit être défini sur  $\mathbb{C}$ , ce qui nécessite des  $\mathbb{C}$ -automorphismes.

### 3.5 English summary of Chapter 3

Since this Chapter is crucial for the understanding of the whole thesis, we sum up briefly its main definitions and results.

**Definition 3.1-3.3. (Real varieties and real structures)**

- A **real (resp. complex) algebraic variety** is a geometrically reduced, separated scheme of finite type over  $\mathbb{R}$  (resp. over  $\mathbb{C}$ ). Such a real (resp. complex) variety is **quasiprojective** if it is isomorphic to an open subvariety of a real (resp. complex) projective variety.
- A real variety  $X_0$  is a **real form** of the complex variety  $X$  if there exists a  $\mathbb{C}$ -isomorphism  $\psi : (X_0)_{\mathbb{C}} := X_0 \times_{\text{Spec } \mathbb{R}} \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow X$ .
- A **real structure** on a complex algebraic variety  $X$  is an antiregular<sup>15</sup> involution  $\sigma$  on  $X$  ; the antiregularity condition means that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{Spec } (z \mapsto \bar{z})} & \text{Spec } \mathbb{C} \end{array}$$

- The **real locus** of such an involution  $\sigma$  is the set  $X^\sigma$  of closed points of  $X$  fixed by  $\sigma$ .

**Theorem 3.13.** *Let us denote by  $\mathcal{C}$  the category whose objects are the couples  $(X, \sigma)$ , where  $X$  is a quasiprojective complex variety and  $\sigma$  is a real structure on  $X$  and such that  $\forall (X, \sigma), (Y, \tau) \in \mathcal{C}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}((X, \sigma), (Y, \tau)) = \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) \mid f\sigma = \tau f\}$ .*

*There is an equivalence of categories between  $\mathcal{C}$  and the category  $\mathbb{R} - \mathbf{Var}$  of real algebraic varieties:*

$$F : \begin{cases} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \mathbf{Var} \\ (X, \sigma) & \longmapsto & X_0 := X / \langle \sigma \rangle \\ (f : (X, \sigma) \rightarrow (Y, \tau)) & \longmapsto & f_0 := \text{descent to the quotient of } \pi_Y f \end{cases}$$

**Definition 3.16. (Equivalence of real structures)**

Two real structures  $\sigma$  and  $\sigma'$  on the same complex variety  $X$  are **equivalent** if and only if there exists a  $\mathbb{C}$ -automorphism  $\varphi$  of  $X$  such that  $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ .

**Theorem 3.17.** *Let  $X$  be a quasiprojective complex variety.*

*Two real forms of  $X$  are  $\mathbb{R}$ -isomorphic if and only if the associated real structures are equivalent.*

**Theorem 3.21. (Real structures and Galois cohomology - [BS64, 2.6])**

*Let  $X$  be a quasiprojective complex variety and  $\sigma$  be a real structure on  $X$ .*

*The equivalence classes of real structures are in bijection with the elements of  $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Aut}_{\mathbb{C}} X)$ , where the non-trivial element of  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$  acts on  $\text{Aut}_{\mathbb{C}} X$  by conjugation by  $\sigma$ .*

In the next chapters, we use abundantly the following result (and especially its finiteness criterion):

**Theorem 3.22. (Exact sequences in Galois cohomology - [BS64, 1.17])**

*If  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  is an exact sequence of  $G$ -groups (in particular,  $f$  and  $g$  are  $G$ -equivariant), then we have the following exact sequence of pointed sets:*

$$0 \rightarrow A^G \rightarrow B^G \rightarrow C^G \rightarrow H^1(G, A) \xrightarrow{f_*} H^1(G, B) \xrightarrow{g_*} H^1(G, C)$$

*Moreover, if  $H^1(G, C)$  is finite and if  $H^1(G, A_b)$  is finite for all  $b \in Z^1(G, B)$ , then  $H^1(G, B)$  is finite.*

15. This is equivalent to "antiholomorphic" if  $X$  is projective.

In order to use Galois cohomology in the next chapters, we will use the following results (besides classical results established in [Ser94]):

**Lemma 3.24.** *Let  $X$  be a complex projective variety and let  $\sigma$  be a real structure on  $X$ .*

*If  $\text{Aut}^\# X$  and  $\text{Aut}^* X$  are resp. the kernel and the image of the natural action of  $\text{Aut} X$  on  $\text{Pic} X$ , then the exact sequence  $1 \rightarrow \text{Aut}^\# X \rightarrow \text{Aut} X \rightarrow \text{Aut}^* X \rightarrow 1$  is  $\langle \sigma \rangle$ -equivariant.*

**Theorem 3.28.** *Let  $G$  be a finite group.*

1. [BS64, 6.2] *If the  $G$ -group  $A$  is a linear algebraic group defined over  $\mathbb{R}$  (i.e. a complex linear algebraic group endowed with a real structure), then  $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), A)$  is finite for the natural Galois action (which corresponds to the real structure on  $A$ ).*
2. [Kam75, Th.1] *If  $A$  and  $B$  are two  $G$ -groups, then  $H^1(G, A * B)$  is the pushout (amalgamed sum) of  $H^1(G, A)$  and  $H^1(G, B)$  in the category of pointed sets, i.e.<sup>(16)</sup>*

$$H^1(G, A * B) = (H^1(G, A) \times \{[e_B]\}) \cup (\{[e_A]\} \times H^1(G, B)).$$

□

The following finiteness criterion will be – in conjunction with Theorem 3.35 below – a crucial ingredient of the proof of our main results in Chapter 5 (especially 5.4 and 5.18):

**Theorem 3.30.** *Let  $G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $A$  be a  $G$ -group and  $A \rtimes G$  the semidirect product defined by the action of  $G$  on  $A$ .*

*If  $A \rtimes G$  has a finite number of conjugacy classes of elements of order 2 (in particular, if it has finitely many conjugacy classes of finite subgroups), then  $H^1(G, A)$  is finite.*

**Theorem 3.31.** *Let  $G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . If  $A$  is an abelian  $G$ -group such that  $\forall a \in A, \exists! b \in A \mid a = 2b$ , then  $H^1(G, A) = 0$  and  $H^2(G, A) = 0$ .*

**Theorem 3.35.** *Let  $G$  be a finite group and  $A$  be a  $G$ -group.*

- *If  $A$  is an arithmetic group, then  $H^1(G, A)$  is finite independently of the action of  $G$  on  $A$ .*
- *If  $A$  has a finite index subgroup isomorphic to  $\mathbb{Z}^k$  for a  $k \in \mathbb{N}$ , then  $H^1(G, A)$  is finite independently of the action of  $G$  on  $A$ . (In particular, this is true if  $A$  is finite, i.e.  $k = 0$ .)*

Finally, the last result of this Chapter (which is, to our knowledge, not in the literature) is the following characterization of equivalence of real structures by their real loci:

**Theorem 3.41.** *Let  $X$  a quasiprojective integral scheme over  $\mathbb{C}$ .*

*If  $\sigma$  and  $\sigma'$  are two real structures on  $X$  such that  $X^\sigma$  et  $X^{\sigma'}$  are Zariski-dense in  $X$  (in particular, if  $X$  is regular and irreducible, this amounts to saying they are not empty), then*

$$\sigma \sim \sigma' \iff \exists \varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{C}} X \mid \varphi(X^\sigma) = X^{\sigma'}.$$

*Sketch of proof.* Proving the direct implication is easy ; for the reverse one, since  $\varphi(X^\sigma) = X^{\varphi\sigma\varphi^{-1}}$ , it suffices to prove that  $X^{\varphi\sigma\varphi^{-1}} = X^{\sigma'} \Rightarrow \sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ . Since  $X^{\sigma'}$  is Zariski-dense in  $X$ , the  $\mathbb{C}$ -automorphism  $f := \varphi\sigma\varphi^{-1}\sigma'$  coincides with  $\text{Id}_X$  on a dense closed subscheme of  $X$ , hence on the whole scheme  $X$  because  $X$  is reduced. Thus,  $f = \text{Id}_X$ . □

16. For a group  $A$ , we denote by  $e_A$  its neutral element.

---

# Chapitre 4

---

## Structures réelles : calculs explicites

Dans ce chapitre, nous utilisons les outils de cohomologie galoisienne et les groupes d'automorphismes obtenus précédemment pour déterminer explicitement les classes d'équivalence de structures réelles sur quelques variétés classiques (espaces projectifs, surfaces de Hirzebruch, droite et plan affines), pour lesquelles ces résultats sont déjà connus (nous présentons ces calculs à titre d'illustration du fonctionnement de la cohomologie galoisienne). Nous faisons de même ensuite pour les éclatés de  $\mathbb{P}^2$  en peu de points dont nous avons déterminé les automorphismes au Chapitre 2 avant d'établir un résultat un peu plus général (et un peu moins explicite) pour les éclatés de  $\mathbb{P}^2$  en au plus 8 points : en particulier, nous y soulevons une difficulté cohomologique que nous résoudrons au Chapitre 5.

### 4.1 Variétés classiques

#### 4.1.1 Espaces projectifs

Remarquons d'abord qu'une structure réelle sur  $\mathbb{P}^n$  s'écrit toujours  $\sigma_0 \circ \varphi$ , où  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n) = \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$  et  $\sigma_0 : [x_0 : \dots : x_n] \mapsto [\overline{x_0} : \dots : \overline{x_n}]$ . Cependant, il peut exister des structures réelles non-équivalentes à la conjugaison complexe  $\sigma_0$ . L'exemple le plus simple est celui de  $\mathbb{P}^1$ , vu comme la sphère de Riemann : dans ce cas, une autre structure réelle possible est  $\sigma_1 : z \mapsto -\frac{1}{\overline{z}}$ , c'est-à-dire  $\sigma_1 : [z_0 : z_1] \mapsto [-\overline{z_1} : \overline{z_0}]$  qui correspond à l'antipodie.

En fait, ce sont les deux seules possibilités et on a plus généralement le théorème suivant (dont on trouvera une preuve géométrique partielle dans [Rus02, 1.1]) :

#### **Théorème 4.1. (Structures réelles sur $\mathbb{P}^n$ )**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Si  $n$  est pair, alors toute structure réelle sur  $\mathbb{P}^n$  est équivalente à  $\sigma_0 : [z_0 : \dots : z_n] \mapsto [\overline{z_0} : \dots : \overline{z_n}]$ .  
Le lieu réel d'une telle structure est donc homéomorphe à  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ .
- Si  $n$  est impair ( $n = 2k + 1$ ), il y a deux classes d'équivalence :
  - celle de  $\sigma_0 : [z_0 : \dots : z_n] \mapsto [\overline{z_0} : \dots : \overline{z_n}]$  : son lieu réel est homéomorphe à  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$
  - celle de  $\sigma_1 : [z_0 : z_1 : \dots : z_{2k} : z_{2k+1}] \mapsto [-\overline{z_1} : \overline{z_0} : \dots : -\overline{z_{2k+1}} : \overline{z_{2k}}]$  : son lieu réel est vide.

*Démonstration.* Les résultats sur les lieux réels ne présentant aucune difficulté, on se consacre à la classification des structures réelles sur  $\mathbb{P}^n$ .

- La remarque qui précède le théorème montre qu'une structure réelle s'écrit en coordonnées sous la forme  $\sigma : x \mapsto \overline{Ax}$ , où  $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$  est une matrice de  $\varphi = \sigma_0 \circ \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ . La condition  $\sigma^2 = \text{Id}$  se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^{n+1}, \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid \overline{\overline{AAx}} = \lambda x$$

Le scalaire  $\lambda$  dépend *a priori* de  $x$  ; en fait, il n'en est rien. En effet, cette condition signifie que  $\overline{\overline{AA}}$  est une transformation linéaire de  $\mathbb{C}^{n+1}$  pour laquelle tout vecteur est un vecteur propre ; il est alors bien connu qu'une telle transformation est nécessairement une homothétie, c'est-à-dire précisément que  $\lambda$  est indépendant de  $x$ . Donc on cherche les matrices  $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$  telles que  $\overline{\overline{AA}} = \lambda \text{Id}$ , pour un  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .



C'est donc la valeur de  $a_{\sigma,\sigma}$  qui suffit à caractériser le cocycle  $a$  : par rapport au point de vue matriciel exposé précédemment,  $a_{\sigma,\sigma} = b_{\sigma} \sigma b_{\sigma} \sigma = A\bar{A}$ . On a vu justement dans cette étude matricielle qu'on pouvait toujours choisir  $a_{\sigma,\sigma} = \pm \text{Id}$ . On notera  $a^+$  (resp.  $a^-$ ) le cocycle tel que  $a_{\sigma,\sigma}^+ = \text{Id}$  (resp.  $a_{\sigma,\sigma}^- = -\text{Id}$ ), dans le cas où  $n$  est impair (dans le cas où  $n$  est pair, on n'a qu'une seule possibilité, à savoir  $a^+$ , ce qui achève la preuve de ce cas, puisque  $\text{Ker } \delta_1 = \{\text{Id}\}$ ).

Toute la question revient donc à montrer que  $a^+$  et  $a^-$  ne sont pas cohomologues : s'ils l'étaient, il existerait  $\varphi : G \rightarrow \mathcal{Z}(\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}))$  tel que  $d^1\varphi = a^+(a^-)^{-1}$ , où  $d^1\varphi : \begin{cases} G^2 & \rightarrow \mathcal{Z}(\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C})) = \mathbb{C}^* \text{Id} \\ (s, t) & \mapsto (s \cdot \varphi(t)) \varphi(st)^{-1} \varphi(s) \end{cases}$ .

En particulier, on a :

- $(d^1\varphi)_{\sigma, \text{Id}} = (\sigma \cdot \varphi(\text{Id})) \varphi(\sigma)^{-1} \varphi(\sigma) = \underbrace{\sigma \varphi(\text{Id})}_{:=\alpha \text{Id}} \sigma^{-1}$  doit être égal à  $a_{\sigma, \text{Id}}^+(a_{\sigma, \text{Id}}^-)^{-1} = \text{Id}$ . On a donc  $\forall v \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,  $v = \sigma(\alpha \sigma^{-1}(v)) = \bar{\alpha} \bar{v} = \bar{\alpha} v$ , c'est-à-dire  $\boxed{\alpha = 1}$ .
- $(d^1\varphi)_{\sigma, \sigma} = (\sigma \cdot \varphi(\sigma)) \varphi(\text{Id})^{-1} \varphi(\sigma) = \sigma \underbrace{\varphi(\sigma)}_{:=\lambda \text{Id}} \sigma^{-1} \circ \frac{1}{\alpha} \text{Id} \circ \lambda \text{Id}$  doit être égal à  $a_{\sigma, \sigma}^+(a_{\sigma, \sigma}^-)^{-1} = -\text{Id}$ .

On a donc  $\forall v \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,  $\sigma \left( \lambda \sigma^{-1} \left( \frac{\lambda}{\alpha} v \right) \right) = \lambda \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\alpha}} v = \frac{|\lambda|^2}{\alpha} v = -v$ , ce qui impose  $\boxed{\alpha < 0}$ , ce qui est absurde.

On en déduit que si  $n$  est impair, on a exactement deux éléments dans  $H^1(G, \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{C}))$ , qui sont ceux annoncés, d'où le résultat. □

### 4.1.2 Surfaces de Hirzebruch

On trouvera une autre preuve des deux résultats de cette sous-section dans [Wel00, Th. 1.1, 1.2] (ou [Rus02, 1.2] pour le cas de  $\mathcal{F}_0$ ). Remarquons qu'on ne s'occupera pas de  $\mathcal{F}_1$ , qui est l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en un point (cf. section 4.2).

**La surface  $\mathcal{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$**

**Théorème 4.2. (Structures réelles sur  $\mathcal{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ )**

Toute structure réelle sur  $\mathcal{F}_0$  est équivalente à une et une seule des quatre structures suivantes :

- $\sigma_0 \times \sigma_0 : ([x : y], [z : t]) \mapsto ([\bar{x} : \bar{y}], [\bar{z} : \bar{t}])$  de lieu réel  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  ;
- $\sigma_0 \times \sigma_1 : ([x : y], [z : t]) \mapsto ([\bar{x} : \bar{y}], [-\bar{t} : \bar{z}])$  de lieu réel vide ;
- $\sigma_1 \times \sigma_1 : ([x : y], [z : t]) \mapsto ([-\bar{y} : \bar{x}], [-\bar{t} : \bar{z}])$  de lieu réel vide ;
- $\sigma : ([x : y], [z : t]) \mapsto ([\bar{z} : \bar{t}], [\bar{x} : \bar{y}])$  de lieu réel homéomorphe à la sphère  $\mathcal{S}^2$ .

*Démonstration.* Nous noterons ici  $\sigma$  la structure réelle "naturelle"  $\sigma_0 \times \sigma_0$ . On étudie l'action de  $G = \langle \sigma \rangle$  sur  $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_0)$ . On vérifie sans difficulté que la suite exacte du Théorème 2.2 est  $G$ -équivariante ; elle fournit donc une suite exacte en cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & [(\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2]^G & \rightarrow & (\text{Aut } \mathcal{F}_0)^G & \rightarrow & \langle \tau \rangle^G \\ & & \delta^0 \rightarrow & H^1(G, (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2) & \xrightarrow{i^*} & H^1(G, \text{Aut } \mathcal{F}_0) & \xrightarrow{\rho^*} & H^1(G, \langle \tau \rangle) \end{array}$$

Cette suite va bien jusqu'à  $H^1(G, \langle \tau \rangle)$  car  $(\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2$  est un sous-groupe distingué de  $\text{Aut } \mathcal{F}_0$ .

- Étudions  $\langle \tau \rangle^G$  et  $H^1(G, \langle \tau \rangle)$ .

On voit d'abord que  $\forall ([x : y], [z : t]) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{C})$  :

$$\begin{aligned} \sigma \tau \sigma^{-1}([x : y], [z : t]) &= \sigma \tau([\bar{x} : \bar{y}], [\bar{z} : \bar{t}]) = \sigma([\bar{z} : \bar{t}], [\bar{x} : \bar{y}]) \\ &= ([z : t], [x : y]) = \tau([x : y], [z : t]) \end{aligned}$$

---

2.  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathcal{Z}(\text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}))$  donc  $\exists \alpha \in \mathbb{C}^* | \varphi(\text{Id}) = \alpha \text{Id}$ .

donc  $\tau$  est fixé par  $G$  et  $\langle \tau \rangle^G = \langle \tau \rangle$ .

Déterminons maintenant les cocycles de  $\langle \tau \rangle$  : on a bien sûr le cocycle trivial  $a : \begin{cases} G & \rightarrow & \langle \tau \rangle \\ \sigma & \mapsto & \text{Id} \end{cases}$ . De plus,

l'application  $\alpha : \begin{cases} G & \rightarrow & \langle \tau \rangle \\ \sigma & \mapsto & \tau \end{cases}$  est bien un cocycle puisque  $\alpha_{\sigma^2} = \alpha_\sigma \sigma \cdot \alpha_\sigma = \tau(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \tau^2 = \text{Id}$ .

Reste à savoir si ces deux cocycles  $a$  et  $\alpha$  sont cohomologues ou non : ce n'est pas le cas. En effet, s'ils l'étaient, il existerait un élément  $\beta$  de  $\langle \tau \rangle$  tel que  $\tau = \alpha_\sigma = \beta^{-1} a_\sigma \sigma \cdot \beta = \beta^{-1} \sigma \cdot \beta$  et on vérifie aisément que c'est impossible. Donc  $H^1(G, \langle \tau \rangle)$  est de cardinal 2.

- Étudions à présent l'application  $\delta^0$ .

Clairement,  $\delta^0([\text{Id}]) = [1]$  est la classe triviale dans  $H^1(G, (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2)$ . De plus,  $\delta^0(\tau) = [1]$  aussi (cf. [BS64, 1.11] pour la définition de  $\delta^0$ ) : en effet,  $\tau$  est un antécédent de  $\tau$  via  $\rho : \text{Aut } \mathcal{F}_0 \rightarrow \langle \tau \rangle$  et  $\tau^{-1} \sigma \cdot \tau = \text{Id}$  donc  $\delta^0([\tau]) = [1]$ . La suite exacte d'ensembles pointés précédente montre alors que  $i^* : H^1(G, (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2) \rightarrow H^1(G, \text{Aut } \mathcal{F}_0)$  vérifie  $(i^*)^{-1}([1]) = \text{Im } \delta^0 = \{[1]\}$ .

- Pour étudier  $H^1(G, (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2)$ , on se sert de la suite exacte évidente suivante :

$$1 \rightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\iota} (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2 \xrightarrow{\pi} \text{PGL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow 1$$

Celle-ci est aussi  $G$ -équivariante et on obtient donc la suite exacte en cohomologie ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{PGL}_2(\mathbb{C})^G & \rightarrow & [(\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2]^G & \rightarrow & \text{PGL}_2(\mathbb{C})^G \\ & \xrightarrow{\Delta^0} & H^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\iota^*} & H^1(G, (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2) & \xrightarrow{\pi^*} & H^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C})) \end{array}$$

Soit  $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})^G$  : alors  $\pi(\varphi \times \text{Id}) = \varphi$  et  $(\varphi \times \text{Id})^{-1} \sigma \cdot (\varphi \times \text{Id}) = \text{Id}$  donc  $\Delta^0 \equiv 1$  et  $(\iota^*)^{-1}([1]) = \text{Im } \Delta^0 = \{[1]\}$ . D'après le Théorème 4.1, il y a deux classes d'équivalence de structures réelles sur  $\mathbb{P}^1$  : celle de  $\sigma_0 : [x : y] \mapsto [\bar{x} : \bar{y}]$  qui correspond à la classe du cocycle trivial  $[\text{Id}] \in H^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C}))$ , et celle de  $\sigma_1 : [x : y] \mapsto [-\bar{y} : \bar{x}]$  qui correspond à l'élément  $b$  non-trivial de  $H^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C}))$ . Puisque  $(\iota^*)^{-1}([1]) = \{[1]\}$  et  $[b] \neq [\text{Id}]$ , on voit que  $[b] \notin (\iota^*)^{-1}([1])$  i.e.  $[1] = [\text{Id} \times \text{Id}] = \iota^*([\text{Id}]) \neq \iota^*([b]) = [b \times \text{Id}]$  c'est-à-dire  $\sigma_0 \times \sigma_0 \not\sim \sigma_1 \times \sigma_0$  dans  $(\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2$ . En faisant de même avec le second facteur de  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ , on obtient aussi que  $\sigma_0 \times \sigma_0 \not\sim \sigma_0 \times \sigma_1$  dans  $(\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2$ .

- Soit  $a \in Z^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C})^2)$  : l'application  $a : G \rightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{C})^2$  est déterminée par  $a_\sigma = (a_\sigma^{(1)} \times a_\sigma^{(2)}) \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})^2$ . On vérifie sans difficulté que  $a^{(1)}$  et  $a^{(2)}$  sont deux cocycles de  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$  et que si  $a^{(1)} \sim \text{Id}$  et  $a^{(2)} \sim b$ , alors  $a \sim \text{Id} \times b$  (et de même pour les autres cas). Ainsi,  $H^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C})^2)$  contient au plus 4 éléments :

$$[\text{Id} \times \text{Id}], [\text{Id} \times b], [b \times \text{Id}], [b \times b].$$

En fait, on vérifie aisément que ces 4 éléments sont non-équivalents : par exemple, si on avait  $b \times b \sim b \times \text{Id}$ , alors il existerait  $\varphi_1 \times \varphi_2 \in (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2$  tel que

$$b_\sigma \times b_\sigma = (\varphi_1^{-1} \times \varphi_2^{-1})(b_\sigma \times \text{Id}) \sigma (\varphi_1 \times \varphi_2) \sigma^{-1}$$

et donc on aurait  $\varphi_2 \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$  tel que  $b_\sigma = \varphi_2^{-1} \text{Id} \sigma \varphi_2$ , c'est-à-dire  $b \sim \text{Id}$ , ce qui est absurde donc  $b \times b \not\sim b \times \text{Id}$ . Bref,  $H^1(G, (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2) = \{[\text{Id} \times \text{Id}], [\text{Id} \times b], [b \times \text{Id}], [b \times b]\}$ .

- On revient maintenant à la première suite exacte. On a vu que  $\delta^0 \equiv 1$ , que  $\#H^1(G, (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2) = 4$  et que  $\#H^1(G, \langle \tau \rangle) = 2$ . Puisque  $\delta^0 \equiv 1$ , on voit que  $(i^*)^{-1}([1]) = \{[\text{Id} \times \text{Id}]\}$  donc  $\text{Id} \times \text{Id}$  n'est équivalent (dans  $\text{Aut } \mathcal{F}_0$ ) à aucun des trois autres éléments de  $H^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C})^2)$ . Mais par contre,  $b \times \text{Id}$  et  $\text{Id} \times b$  sont équivalents dans  $\text{Aut } \mathcal{F}_0$  alors qu'ils ne l'étaient pas dans  $(\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2$  ; en effet  $\text{Id} \times b_\sigma = \tau^{-1}(b_\sigma \times \text{Id}) \underbrace{\sigma \cdot \tau}_{=\tau}$ . Enfin, il reste à vérifier que  $b \times b \not\sim b \times \text{Id}$  : d'après ce qui précède, ils ne peuvent être équivalents *via* un élément de  $(\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2$ , donc s'ils étaient équivalents, il existerait  $\varphi = (\varphi_1 \times \varphi_2) \in (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2$  tel que

$$b_\sigma \times b_\sigma = (\varphi\tau)^{-1}(b_\sigma \times \text{Id}) \sigma (\varphi\tau) \sigma$$

c'est-à-dire  $\forall (p, q) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  :

$$\begin{aligned} b_\sigma \times b_\sigma(p, q) &= \tau^{-1} \varphi^{-1} (b_\sigma \times \text{Id}) \sigma(\varphi_1 \times \varphi_2) \tau(\bar{p}, \bar{q}) \\ &= \tau^{-1} \varphi^{-1} (b_\sigma \times \text{Id}) (\overline{\varphi_1(\bar{q})}, \overline{\varphi_2(\bar{p})}) \\ &= \tau^{-1} (\varphi_1^{-1} \circ b_\sigma(\overline{\varphi_1(\bar{q})}), \varphi_2^{-1} \circ \text{Id}(\overline{\varphi_2(\bar{p})})) \\ &= (\varphi_2^{-1} \circ \text{Id}(\overline{\varphi_2(\bar{p})}), \varphi_1^{-1} \circ b_\sigma(\overline{\varphi_1(\bar{q})})) \end{aligned}$$

La première coordonnée donne  $b \sim \text{Id}$ , ce qui est absurde. Ainsi,

$$\text{Im } i^* = (\rho^*)^{-1}([1]) = \{[\text{Id} \times \text{Id}], [b \times \text{Id}] = [\text{Id} \times b], [b \times b]\}$$

contient 3 éléments.

- Reste à voir pourquoi  $(\rho^*)^{-1}([\tau])$  contient seulement  $[\tau] = [(\text{Id} \times \text{Id}) \circ \tau]$ .<sup>(3)</sup> Mais un élément de la fibre de  $[\tau]$  est la classe d'un  $a_\sigma = (\varphi_1 \times \varphi_2) \circ \tau$ , pour  $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2$  :
  - C'est un cocycle si, et seulement si,  $a_\sigma \sigma . a_\sigma = (\varphi_1 \times \varphi_2) \tau \sigma(\varphi_1 \times \varphi_2) \tau \sigma = \text{Id}$  si, et seulement si,  $\forall (p, q) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  :

$$\begin{aligned} (p, q) &= (\varphi_1 \times \varphi_2) \tau \sigma(\varphi_1 \times \varphi_2) \tau \sigma(p, q) \\ &= (\varphi_1 \times \varphi_2) \tau \sigma(\varphi_1 \times \varphi_2)(\bar{q}, \bar{p}) \\ &= (\varphi_1 \times \varphi_2) \tau \sigma(\varphi_1(\bar{q}), \varphi_2(\bar{p})) \\ &= (\varphi_1 \times \varphi_2)(\overline{\varphi_2(\bar{p})}, \overline{\varphi_1(\bar{q})}) \\ &= (\varphi_1 \varphi_2(\bar{p}), \varphi_2 \varphi_1(\bar{q})) \end{aligned}$$

c'est-à-dire si, et seulement si,  $\varphi_1 \sigma \varphi_2 \sigma = \varphi_2 \sigma \varphi_1 \sigma = \text{Id}$ , ce qui équivaut à  $\varphi_1 \sigma \varphi_2 \sigma = \text{Id}$  (ceci implique en effet que  $\varphi_2 \sigma(\varphi_1 \sigma \varphi_2 \sigma) = \varphi_2 \sigma$  et donc que  $\varphi_2 \sigma \varphi_1 \sigma = \text{Id}$ ).

- Deux cocycles dans la fibre de  $[\tau]$  sont toujours équivalents : en effet, pour montrer que  $(\varphi_1 \times \varphi_2) \tau \sim (\text{Id} \times \text{Id}) \tau$ , il suffit de montrer qu'il existe  $\alpha_1 \times \alpha_2 \in (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2$  tel que

$$(4.1) \quad (\varphi_1 \times \varphi_2) \tau = (\alpha_1^{-1} \times \alpha_2^{-1})((\text{Id} \times \text{Id}) \tau) \sigma(\alpha_1 \times \alpha_2) \sigma$$

Mais (4.1) équivaut à :  $\exists \alpha_1 \times \alpha_2 \in (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^2 \mid \forall (p, q) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \times \varphi_2) \tau(p, q) = (\varphi_1(q), \varphi_2(p)) &= (\alpha_1^{-1} \times \alpha_2^{-1}) \tau \sigma(\alpha_1 \times \alpha_2)(\bar{p}, \bar{q}) \\ &= (\alpha_1^{-1} \times \alpha_2^{-1}) \tau \sigma(\alpha_1(\bar{p}), \alpha_2(\bar{q})) \\ &= (\alpha_1^{-1} \times \alpha_2^{-1})(\overline{\alpha_2(\bar{q})}, \overline{\alpha_1(\bar{p})}) \\ &= (\alpha_1^{-1} \alpha_2(\bar{q}), \alpha_2^{-1} \alpha_1(\bar{p})) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (4.1) \quad &\iff \exists \alpha_1 \times \alpha_2 \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})^2 \mid \begin{cases} \varphi_1 = \alpha_1^{-1} \sigma \alpha_2 \sigma \\ \varphi_2 = \alpha_2^{-1} \sigma \alpha_1 \sigma \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha_1 \times \alpha_2 \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})^2 \mid \begin{cases} \varphi_1 \sigma = \alpha_1^{-1} \sigma \alpha_2 \\ \varphi_2 \sigma = \alpha_2^{-1} \sigma \alpha_1 = (\alpha_1^{-1} \sigma \alpha_2)^{-1} \end{cases} \\ &\iff \exists \alpha_1 \times \alpha_2 \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})^2 \mid \varphi_1 \sigma = \alpha_1^{-1} \sigma \alpha_2 \end{aligned}$$

(On sait que  $\varphi_2 \sigma = (\varphi_1 \sigma)^{-1}$  car on a un cocycle.) Bien sûr  $\alpha_1 = \varphi_1^{-1}$  et  $\alpha_2 = \text{Id}$  conviennent ! Donc  $(\rho^*)^{-1}([\tau]) = \{[\tau]\}$  et ainsi, on a bien fait le tour de toutes les classes d'équivalence de structures réelles sur  $\mathcal{F}_0$ , qui sont bien les 4 annoncées dans le Théorème : les 3 éléments de  $(\rho^*)^{-1}([\text{Id}])$  et l'unique élément de  $(\rho^*)^{-1}([\tau])$ .

En ce qui concerne les lieux réels, seul celui de  $\sigma : ([x : y], [z : t]) \mapsto ([\bar{z} : \bar{t}], [\bar{x} : \bar{y}])$  n'est pas immédiat. Il suffit de remarquer que dès que l'on a fixé  $[x : y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , on constate que l'on a automatiquement  $[z : t] = [\bar{x} : \bar{y}]$  et donc le lieu réel est paramétré par  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , qui est homéomorphe à la sphère  $\mathcal{S}^2$ .  $\square$

3. Remarquons ici que les deux fibres de  $p^*$  n'ont absolument pas le même cardinal, d'où la prudence nécessaire face aux suites exactes d'ensembles pointés, notamment pour contrer le réflexe (faux ici) qui voudrait que la trivialité d'une fibre implique l'injectivité.

### Les surfaces $\mathcal{F}_n$ pour $n \geq 1$

#### Théorème 4.3. (Structures réelles sur les surfaces de Hirzebruch)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Si  $n$  est pair, il y a deux structures réelles à équivalence près sur  $\mathcal{F}_n$ , à savoir

- $\sigma_0 : ([x : y : z], [u : v]) \mapsto ([\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}], [\bar{u} : \bar{v}])$  de lieu réel homéomorphe au tore  $\mathbb{T}^2$ .
- $\sigma_1 : ([x : y : z], [u : v]) \mapsto ([-\bar{y} : \bar{x} : \bar{z}], [-\bar{v} : \bar{u}])$  de lieu réel vide.

2. Si  $n$  est impair, toute structure réelle sur  $\mathcal{F}_n$  est équivalente à  $\sigma_0$  et son lieu réel est homéomorphe à la bouteille de Klein  $\mathcal{K} = (\mathbb{R}\mathbb{P}^2)\#^2$ .

*Démonstration.* Remarquons d'abord que  $\sigma_0$  est bien une structure réelle sur  $\mathcal{F}_n$  et que la suite exacte (cf. Théorème 2.3)

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \text{Aut } \mathcal{F}_n \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n \rightarrow 1$$

est  $G$ -équivariante (où  $G = \langle \sigma_0 \rangle$ ) pour les actions "standard" par conjugaison complexe de  $G$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  et sur  $\text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n$ . On obtient donc la suite exacte en cohomologie associée

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & (\mathbb{C}^{n+1})^G & \rightarrow & (\text{Aut } \mathcal{F}_n)^G & \rightarrow & (\text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n)^G \\ & & \delta^0 \rightarrow & H^1(G, \mathbb{C}^{n+1}) & \xrightarrow{i_n} & H^1(G, \text{Aut } \mathcal{F}_n) & \xrightarrow{\pi_n} & H^1(G, \text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n) \end{array}$$

On note  $A_n := \text{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_n$ . On peut remarquer que  $H^1(G, \mathbb{C}^{n+1})$  est trivial quelle que soit l'action d'après le Théorème 3.31 donc toutes les fibres de  $\pi_n : H^1(G, \text{Aut } \mathcal{F}_n) \rightarrow H^1(G, A_n)$  sont triviales et  $\pi_n$  est injective. Puisqu'en plus  $H^2(G, \mathbb{C}^{n+1})$  est aussi trivial quelle que soit l'action, (toujours d'après 3.31) on déduit du corollaire de la Proposition 41 du Chapitre 1 de [Ser94] que  $\pi_n$  est bijective. Par conséquent, toute la question est d'étudier  $H^1(G, A_n)$ .

1. Si  $n$  est pair, alors  $A_n \simeq \mathbb{C}^* \rtimes \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ . Cet isomorphisme (qui a été explicité dans la preuve de 2.3) est clairement  $G$ -équivariant donc on en déduit une suite exacte en cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & (\mathbb{C}^*)^G & \rightarrow & (A_n)^G & \rightarrow & (\text{PGL}_2(\mathbb{C}))^G \\ & & \delta^0 \rightarrow & H^1(G, \mathbb{C}^*) & \rightarrow & H^1(G, A_n) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C})) \end{array}$$

D'après le Théorème 4.1, on sait que  $H^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C})) = \{[\text{Id}], [J]\}$ , où  $J : [x : y] \mapsto [-y : x]$ . Puisque  $H^1(G, \mathbb{C}^*) = \{[1]\}$  (cf. 3.27), on obtient  $\alpha^{-1}([\text{Id}]) = \{[\text{Id}]\}$ .

Si  $[a_\sigma] \in \alpha^{-1}([J])$ , alors en notant  $a_\sigma = (\lambda_\sigma, A_\sigma)$  pour  $\lambda_\sigma \in \mathbb{C}^*$  et  $A_\sigma \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ , on voit que

$$a_\sigma \in Z^1(G, A_n) \iff a_\sigma \sigma . a_\sigma = \text{Id} \iff (\lambda_\sigma \overline{\lambda_\sigma}, A_\sigma \overline{A_\sigma}) = (1, \text{Id}) \iff |\lambda_\sigma| = 1 \text{ et } A_\sigma \in Z^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C})).$$

De plus, si  $[b_\sigma] = [(\mu_\sigma, B_\sigma)] \in \alpha^{-1}([J])$ , alors

$$\begin{aligned} a_\sigma \sim b_\sigma & \iff \exists (z, M) \in A_n \mid b_\sigma = (z, M)^{-1} a_\sigma \sigma . (z, M) \\ & \iff \exists (z, M) \in A_n \mid \begin{cases} \mu_\sigma & = & z^{-1} \lambda_\sigma \bar{z} \\ B_\sigma & = & M^{-1} A \bar{M} \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \mu_\sigma & \sim & \lambda_\sigma \\ A_\sigma & \sim & B_\sigma \end{cases} \\ & \iff [\mu_\sigma] = [\lambda_\sigma] \in H^1(G, \mathbb{C}^*) \text{ (pour l'action usuelle)} \end{aligned}$$

puisque l'égalité  $[A_\sigma] = [B_\sigma]$  est vraie dans  $H^1(G, \text{PGL}_2(\mathbb{C}))$ , car  $[a_\sigma]$  et  $[b_\sigma] \in \alpha^{-1}([J])$ .

Comme  $H^1(G, \mathbb{C}^*) = \{[1]\}$  d'après le Théorème 90 de Hilbert (cf. 3.27), on voit donc que deux éléments quelconques de  $\alpha^{-1}([J])$  sont toujours cohomologues, et donc que  $\alpha^{-1}([J]) = \{[(1, J)]\}$ . Ainsi,  $H^1(G, A_n) = \{[\text{Id}], [(1, J)]\}$  ce qui donne les deux structures réelles voulues sur  $\mathcal{F}_n$  pour  $n$  pair.

2. Si  $n$  est impair, alors  $A_n \simeq \mathbb{C}^* \rtimes \text{SL}_2(\mathbb{C})$ . Là encore, cet isomorphisme (qui a été explicité dans la preuve de 2.3) est clairement  $G$ -équivariant donc on en déduit une suite exacte en cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & (\mathbb{C}^*)^G & \rightarrow & (A_n)^G & \rightarrow & (\text{SL}_2(\mathbb{C}))^G \\ & & \delta^0 \rightarrow & H^1(G, \mathbb{C}^*) & \rightarrow & H^1(G, A_n) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(G, \text{SL}_2(\mathbb{C})) \end{array}$$

Par ailleurs,  $H^1(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \{[1]\}$  d'après la suite exacte en cohomologie

$$1 \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^* \xrightarrow{\delta_0} H^1(G, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \xrightarrow{\theta} H^1(G, \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})) = \{[1]\}$$

et d'après le fait que l'application  $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$  est surjective donc  $\delta_0$  est triviale tout en étant surjective puisque  $\theta$  est triviale.

Comme  $H^1(G, \mathbb{C}^*) = \{[1]\}$ , on a donc  $H^1(G, A_n) = \{[\mathrm{Id}]\}$  ce qui donne la structure réelle voulue sur  $\mathcal{F}_n$  pour  $n$  pair.

Pour ce qui concerne les lieux réels, on se reportera à [Sil89, VI, 1.2 et 1.3]. □

### 4.1.3 Droite et plan affines

#### Théorème 4.4. (Automorphismes de $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ )

Le groupe d'automorphismes de  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  est

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1) = \{\varphi : z \mapsto az + b \mid (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$$

*Démonstration.* On identifie naturellement  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  à  $\mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1]\}$  et on remarque alors que

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}^1 \simeq \{\varphi \in \mathrm{Aut} \mathbb{P}^1 \mid \varphi([0 : 1]) = [0 : 1]\} =: \mathcal{A}$$

En effet, un automorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{A}^1$  induit une application birationnelle de  $\mathbb{P}^1$  dans lui-même : mais  $\mathbb{P}^1$  est une courbe projective lisse donc  $\varphi$  se prolonge en un morphisme birationnel  $\tilde{\varphi} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  et de même pour  $\varphi^{-1}$  donc  $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Aut} \mathbb{P}^1$  et bien sûr  $\tilde{\varphi}([0 : 1]) = [0 : 1]$ . (Remarquons qu'un tel raisonnement est spécifique à la dimension 1 et ne fonctionne pas avec  $\mathbb{A}^2$ , car le plan affine a d'autres automorphismes que ceux venant de  $\mathbb{P}^2$ , cf. [Lam02].)

A partir de là, puisque  $\mathrm{Aut} \mathbb{P}^1 = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ , on vérifie facilement que  $\mathcal{A} = \{[x : z] \mapsto [ax : cx + dz] \mid a, c, d \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$  et on obtient le résultat par déshomogénéisation (c'est-à-dire en faisant  $x = 1$  pour les éléments de  $\mathcal{A}$ ). □

#### Théorème 4.5. (Structures réelles sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ )

Il n'existe qu'une seule structure réelle à équivalence près sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ , à savoir  $\sigma : z \mapsto \bar{z}$ .

Bien sûr, son lieu réel est  $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* Notons  $G = \langle \sigma \rangle$ . On a la suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathrm{Aut} \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow 1$$

On vérifie sans difficulté que cette suite exacte est  $G$ -équivariante. Pour conclure, il suffit donc de remarquer que  $H^1(G, \mathbb{C})$  et  $H^1(G, \mathbb{C}^*)$  sont triviaux quelle que soit l'action (d'après le Théorème 3.31 et le Théorème 90 de Hilbert) et donc  $H^1(G, \mathrm{Aut} \mathbb{A}^1)$  est trivial, d'où le résultat. □

Pour ce qui est du plan affine, on se contentera de citer le théorème suivant :

#### Théorème 4.6. (Structures réelles sur $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ - [Kam75])

Si  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  est une extension de corps finie séparable, alors  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$  est la seule  $\mathbb{K}$ -forme de  $\mathbb{A}_{\mathbb{L}}^2$ .

En particulier, toute structure réelle sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$  est équivalente à  $\sigma_0 : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$  et son lieu réel est  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ .

## 4.2 Éclatés de $\mathbb{P}^2$ en $r \leq 8$ points

On a déjà vu que  $\mathbb{P}^2$  n'admet qu'une seule structure réelle à équivalence près. On va maintenant étudier en détail (en donnant explicitement la liste des classes d'équivalence) les structures réelles sur les éclatés en au plus trois points distincts de  $\mathbb{P}^2$ , avant de donner un résultat de finitude pour les éclatés de 4 à 8 points distincts. On s'intéressera aussi au cas où l'on éclate un point de  $\mathbb{P}^2$  suivi d'un point infiniment proche. En particulier, notons que cette section ne se limite pas aux surfaces de Del Pezzo, pour lesquelles on peut aussi se reporter à [Rus02].

**Proposition 4.7. (1 point -  $\mathcal{F}_1$ )**

Pour tout  $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $p$  <sup>(4)</sup> n'admet qu'une seule structure réelle à équivalence près. Son lieu réel est homéomorphe à la somme connexe  $(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)^{\#2}$ .

*Démonstration.* Vérifions d'abord qu'il existe une structure réelle sur l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $p$ .

Pour ce faire, notons  $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$  et  $p_0 = [0 : 0 : 1]$ . On remarque qu'il existe  $\psi \in \text{Aut } \mathbb{P}^2$  tel que  $\psi(p_0) = p$ ; par conséquent,  $\sigma_1 := \psi\sigma_0\psi^{-1}$  vérifie :

$$\sigma_1(p) = \psi\sigma_0\psi^{-1}(p) = \psi\sigma_0(p_0) = \psi(p_0) = p$$

Donc il existe une structure réelle  $\sigma_1$  sur  $\mathbb{P}^2$  telle que  $\sigma_1(p) = p$  et d'après la Proposition 3.37,  $\sigma_1$  induit une structure réelle  $\sigma$  sur  $X_1$  vérifiant  $\pi\sigma = \sigma_1\pi$  (où on note  $\pi : X_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  la contraction).

On obtient un isomorphisme équivariant pour les actions de  $\sigma$  et de  $\sigma_1$  (cf. Proposition 2.9) :

$$\Phi : \begin{cases} \text{Aut } X_1 & \rightarrow & \text{Aut } {}_p\mathbb{P}^2 \\ \varphi & \mapsto & \varphi_1 := \pi\varphi\pi^{-1} \end{cases}$$

En effet, si  $\varphi \in \text{Aut } X_1$ , alors  $\Phi(\sigma.\varphi) = \Phi(\sigma\varphi\sigma^{-1}) = \pi\sigma\varphi\sigma^{-1}\pi^{-1} = \sigma_1\pi\varphi\pi^{-1}\sigma_1^{-1} = \sigma_1.\Phi(\varphi)$ . Par conséquent,  $H^1(\langle\sigma\rangle, \text{Aut } X_1) \simeq H^1(\langle\sigma_1\rangle, \text{Aut } {}_p\mathbb{P}^2)$ . On a ensuite un deuxième isomorphisme équivariant pour les actions de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_0$  (cf. Proposition 2.9) :

$$\Psi : \begin{cases} \text{Aut } {}_p\mathbb{P}^2 & \rightarrow & \text{Aut } {}_{p_0}\mathbb{P}^2 \\ \varphi_1 & \mapsto & \varphi_0 := \psi^{-1}\varphi_1\psi \end{cases}$$

En effet, si  $\varphi_1 \in \text{Aut } {}_p\mathbb{P}^2$ , alors  $\Psi(\sigma_1.\varphi_1) = \Psi(\sigma_1\varphi_1\sigma_1^{-1}) = \psi^{-1}\sigma_1\varphi_1\sigma_1^{-1}\psi = \sigma_0\psi^{-1}\varphi_1\psi\sigma_0 = \sigma_0.\Psi(\varphi_1)$ . Donc,  $H^1(\langle\sigma_1\rangle, \text{Aut } {}_p\mathbb{P}^2) \simeq H^1(\langle\sigma_0\rangle, \text{Aut } {}_{p_0}\mathbb{P}^2)$ .

Rappelons que, d'après la Proposition 2.9, on a  $\text{Aut } {}_{p_0}\mathbb{P}^2 \simeq \left\{ \left[ \begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline \alpha & \beta & 1 \end{array} \right], \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}), (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ .

On vérifie aisément que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \text{Aut } {}_{p_0}\mathbb{P}^2 & \rightarrow & \text{GL}_2(\mathbb{C}) \\ \left[ \begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ \hline \alpha & \beta & 1 \end{array} \right] & \mapsto & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{cases}$$

est un morphisme de groupes  $\sigma_0$ -équivariant dont le noyau est stable par  $\sigma_0$  et est équivariamment <sup>5</sup> isomorphe à  $\mathbb{C}^2$ . Par conséquent, on obtient une suite exacte  $\sigma_0$ -équivariante

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \longrightarrow \text{Aut } {}_{p_0}\mathbb{P}^2 \longrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow 1.$$

Comme  $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^2)$  et  $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{GL}_2(\mathbb{C}))$  sont triviaux (d'après 3.31 et le Théorème 90 de Hilbert), on obtient que  $H^1(\langle\sigma\rangle, \text{Aut } X_1) = \{\text{Id}\}$  et donc que  $X_1$  n'admet qu'une seule structure réelle à équivalence près.

Enfin, le lieu réel se déduit aisément de la Proposition 3.37 et du Théorème 4.1.  $\square$

**Proposition 4.8. (2 points distincts)**

Soient  $p_1$  et  $p_2$  deux points distincts de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et  $X$  l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en ces points.

$X$  admet 2 structures réelles à équivalence près, obtenues par relèvement de  $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$  et de  $\tau\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{y} : \bar{x} : \bar{z}]$ . Leurs lieux réels sont homéomorphes à  $(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)^{\#3}$  et  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  respectivement.

*Démonstration.* Vérifions qu'il existe une structure réelle sur  $X$ . Si l'on note  $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$ ,  $p_{1,0} = [1 : 0 : 0]$ ,  $p_{2,0} = [0 : 1 : 0]$ , on voit qu'il existe  $\psi \in \text{Aut } \mathbb{P}^2$  tel que  $\psi(p_{1,0}) = p_1$  et  $\psi(p_{2,0}) = p_2$  et que par conséquent,  $\sigma_1 := \psi\sigma_0\psi^{-1}$  est une structure réelle sur  $\mathbb{P}^2$  qui fixe  $p_1$  et  $p_2$ ; on peut alors la relever en

4. Et donc la surface  $\mathcal{F}_1 = \{([x : y : z], [u : v]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xv = yu\}$  qui est l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $[0 : 0 : 1]$ .

5. On préférera ce terme, formé comme "savamment" à partir de "savant", à l'anglicisme "équivariamment".

une structure réelle  $\sigma$  sur  $X$  telle que  $\pi\sigma = \sigma_1\pi$  (où on note  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  la contraction).

Comme dans le cas précédent, on a deux isomorphismes équivariants (cf. 2.10) :

$$\Phi : \begin{cases} \text{Aut } X & \rightarrow \text{Aut}_{\{p_1, p_2\}} \mathbb{P}^2 \\ \varphi & \mapsto \varphi_1 := \pi\varphi\pi^{-1} \end{cases}$$

et

$$\Psi : \begin{cases} \text{Aut}_{\{p_1, p_2\}} \mathbb{P}^2 & \rightarrow \text{Aut}_{\{p_1, 0, p_2, 0\}} \mathbb{P}^2 \\ \varphi_1 & \mapsto \varphi_0 := \psi^{-1}\varphi_1\psi \end{cases}$$

La suite exacte  $G$ -équivariante (où  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agit par  $\sigma$ )

$$1 \rightarrow \text{Aut}^\# X \rightarrow \text{Aut } X \rightarrow \text{Aut}^* X \rightarrow 1$$

est  $G$ -équivariamment isomorphe via  $\Psi \circ \Phi$  à la suite exacte donnée par 2.10 (où  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agit par  $\sigma_0$ )

$$(4.2) \quad 1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \text{Aut}_{\{p_1, 0, p_2, 0\}} \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

$$\text{où } \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \lambda \\ \beta & \delta \\ & & 1 \end{bmatrix} ; (\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2, (\lambda, \delta) \in \mathbb{C}^2 \right\} \simeq \mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2 \text{ et } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ est engendré par } \tau := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La suite exacte (4.2) donne une suite exacte en cohomologie

$$(4.3) \quad \dots \rightarrow H^1(G, \mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2) \xrightarrow{g_1} H^1(G, \text{Aut}_{\{p_1, 0, p_2, 0\}} \mathbb{P}^2) \xrightarrow{g_2} H^1(G, \langle \tau \rangle)$$

On vérifie facilement que  $H^1(G, \langle \tau \rangle) = \{[\text{Id}], [\tau]\}$ . Il faut maintenant calculer  $H^1(G, \mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2)$  puis son image par  $g_1$  qui donnera  $g_2^{-1}(\{[\text{Id}]\})$  et  $H^1(G, (\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2)_\tau)$  puis son image par  $g_1$  qui donnera  $g_2^{-1}(\{[\tau]\})$ .

Remarquons que la suite exacte  $1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow 1$  est clairement  $\langle \sigma_0 \rangle$ -équivariante. D'après le Théorème 3.31,  $H^1(G, \mathbb{C}^2)$  est trivial quelle que soit l'action de  $G$  sur  $\mathbb{C}^2$ . De plus, le dévissage de  $(\mathbb{C}^*)^2$  en deux facteurs isomorphes à  $\mathbb{C}^*$  est clairement  $\langle \sigma_0 \rangle$ -équivariant. Par conséquent, on voit grâce au Théorème 90 de Hilbert que  $H^1(G, \mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2)$  est trivial (et donc son image par  $g_1$  est aussi triviale).

On regarde maintenant  $H^1(G, (\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2)_\tau)$  : l'action de  $G$  sur  $(\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2)_\tau$  est donnée par

$$\sigma_0 * \begin{bmatrix} \alpha & \lambda \\ \beta & \delta \\ & & 1 \end{bmatrix} = \tau \sigma_0 \begin{bmatrix} \alpha & \lambda \\ \beta & \delta \\ & & 1 \end{bmatrix} \sigma_0^{-1} \tau^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\beta} & \bar{\delta} \\ \bar{\alpha} & \bar{\lambda} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

La suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow (\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2)_\tau \rightarrow (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow 1$$

est  $G$ -équivariante pour l'action de  $G$  sur  $\mathbb{C}^2$  vérifiant :

$$\forall (\lambda, \delta) \in \mathbb{C}^2, \sigma * (\lambda, \delta) = (\bar{\delta}, \bar{\lambda})$$

et pour l'action de  $G$  sur  $(\mathbb{C}^*)^2$  vérifiant :

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2, \sigma * (\alpha, \beta) = (\bar{\beta}, \bar{\alpha}).$$

Comme  $H^1(G, \mathbb{C}^2)$  est trivial quelle que soit l'action de  $G$  sur  $\mathbb{C}^2$ , il nous reste à calculer  $H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2)$  pour l'action mentionnée ci-dessus :

- $a_\sigma := (\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2$  est un cocycle si, et seulement si,  $a_\sigma \sigma * a_\sigma = (\alpha \bar{\beta}, \beta \bar{\alpha}) = (1, 1)$  si, et seulement si,  $\beta = \frac{1}{\bar{\alpha}}$  ;

- pour deux cocycles  $a_\sigma := (\alpha, \beta)$  et  $b_\sigma := (\alpha', \beta')$  :

$$\begin{aligned} a_\sigma \sim b_\sigma &\iff \exists v = (\alpha_0, \beta_0) \in (\mathbb{C}^*)^2, b_\sigma = v^{-1} a_\sigma \sigma * v \\ &\iff \exists v = (\alpha_0, \beta_0) \in (\mathbb{C}^*)^2, \begin{cases} \alpha' &= \frac{\bar{\beta}_0}{\alpha_0} \alpha \\ \frac{1}{\alpha'} &= \frac{\bar{\alpha}_0}{\beta_0} \frac{1}{\alpha} \end{cases} \\ &\iff \exists v = (\alpha_0, \beta_0) \in (\mathbb{C}^*)^2, \alpha' = \frac{\bar{\beta}_0}{\alpha_0} \alpha \end{aligned}$$

et  $v = (\alpha, \bar{\alpha}')$  convient. Donc  $H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2)$  est trivial et  $H^1(G, (\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathbb{C}^*)^2)_\tau)$  aussi.

Finalement, les deux fibres de la surjection  $H^1(G, \text{Aut } X) \rightarrow H^1(G, \langle \tau \rangle)$  sont de cardinal 1 ce qui montre que  $H^1(G, \text{Aut } X) = \{[\text{Id}], [\tau]\}$ . Ces deux classes sont bien distinctes puisque  $\#H^1(G, \langle \tau \rangle) = 2$ .

Ainsi,  $X$  admet exactement deux structures réelles à équivalence près, à savoir celles obtenues par relèvement de  $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$  et de  $\tau\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{y} : \bar{x} : \bar{z}]$ .

Enfin, le lieu réel se déduit aisément de la Proposition 3.37 et du Théorème 4.1 : dans le cas de  $\sigma_0$ , on éclate 2 points réels alors que dans le cas de  $\tau\sigma_0$ , on éclate 2 points non-réels conjugués.  $\square$

### Proposition 4.9. (2 points infiniment proches)

Soit  $X$  l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en deux points  $p_1$  et  $p_2$  avec  $p_2$  infiniment proche de  $p_1$ .

Toute structure réelle sur  $X$  est équivalente au relèvement de la structure réelle  $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$ .

Son lieu réel est homéomorphe à  $(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)\#^3$ .

*Démonstration.* Vérifions qu'il existe une structure réelle sur  $X$ . Si l'on note  $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$ ,  $p_{1,0} = [1 : 0 : 0]$ ,  $D_0$  la droite d'équation  $z = 0$  et  $D$  la droite de  $\mathbb{P}^2$  correspondant au point  $p_2$ , on voit qu'il existe  $\psi \in \text{Aut } \mathbb{P}^2$  tel que  $\psi(p_{1,0}) = p_1$  et  $\psi(D_0) = D$  et que par conséquent,  $\sigma_1 := \psi\sigma_0\psi^{-1}$  est une structure réelle sur  $\mathbb{P}^2$  qui fixe  $p_1$  et  $D$ ; on peut alors la relever en une structure réelle  $\sigma$  sur  $X$  telle que  $\pi\sigma = \sigma_1\pi$  (où on note  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  la contraction).

Comme dans le cas précédent, on a deux isomorphismes équivariants (pour les actions de  $\sigma$  et  $\sigma_1$  d'une part et pour celles de  $\sigma_1$  et  $\sigma_0$  d'autre part) :

$$\Phi : \begin{cases} \text{Aut } X & \rightarrow \text{Aut}_{p_1, D} \mathbb{P}^2 \\ \varphi & \mapsto \varphi_1 := \pi\varphi\pi^{-1} \end{cases}$$

et

$$\Psi : \begin{cases} \text{Aut}_{p_1, D} \mathbb{P}^2 & \rightarrow \text{Aut}_{p_{1,0}, D_0} \mathbb{P}^2 \\ \varphi_1 & \mapsto \varphi_0 := \psi^{-1}\varphi_1\psi \end{cases}$$

On vérifie alors sans difficulté que le dévissage donné par la Proposition 2.12 est  $G$ -équivariant. Comme  $H^1(G, \mathbb{C})$ ,  $H^1(G, \mathbb{C}^2)$  et  $H^1(G, \mathbb{C}^*)$  sont triviaux (cf. 3.31 et 3.27), on en déduit la trivialité de  $H^1(G, \text{Aut } X)$ , ce qui suffit à conclure.

Enfin, le lieu réel se déduit aisément de la Proposition 3.37 et du Théorème 4.1 en remarquant que tous les points éclatés sont réels.  $\square$

### Proposition 4.10. (3 points non-alignés)

Soient  $p_1, p_2$  et  $p_3$  trois points non-alignés de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et  $X$  l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en ces points.

$X$  admet 5 structures réelles à équivalence près : elles sont obtenues par relèvement sur  $X$  de l'une des structures réelles birationnelles<sup>6</sup> suivantes :

- $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$  (lieu réel homéomorphe à  $(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)\#^4$ );
- $\tau\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto \left[ \frac{1}{\bar{x}} : \frac{1}{\bar{y}} : \frac{1}{\bar{z}} \right]$  (lieu réel homéomorphe au tore  $\mathbb{T}^2$ );
- $A_1\tau\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto \left[ \frac{1}{\bar{x}} : -\frac{1}{\bar{y}} : \frac{1}{\bar{z}} \right]$  (lieu réel vide);
- $\varphi_{(1\ 2)}\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{y} : \bar{x} : \bar{z}]$  (lieu réel homéomorphe à  $(\mathbb{R}\mathbb{P}^2)\#^2$ );
- $\tau\varphi_{(1\ 2)}\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto \left[ \frac{1}{\bar{y}} : \frac{1}{\bar{x}} : \frac{1}{\bar{z}} \right]$  (lieu réel homéomorphe à la sphère  $\mathcal{S}^2$ ).

*Démonstration.* Vérifions qu'il existe une structure réelle sur  $X$ .

Si l'on note  $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$ ,  $p_{1,0} = [1 : 0 : 0]$ ,  $p_{2,0} = [0 : 1 : 0]$  et  $p_{3,0} = [0 : 0 : 1]$ , on voit qu'il existe  $\psi \in \text{Aut } \mathbb{P}^2$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ ,  $\psi(p_{i,0}) = p_i$  et que par conséquent,  $\sigma_1 := \psi\sigma_0\psi^{-1}$  est une structure réelle sur  $\mathbb{P}^2$  qui fixe  $p_1, p_2$  et  $p_3$ ; on peut alors la relever en une structure réelle sur  $X$  telle que  $\pi\sigma = \sigma_1\pi$  (où on note  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  la contraction).

Une fois encore, on a deux isomorphismes équivariants :

$$\Phi : \begin{cases} \text{Aut } X & \rightarrow \text{Aut}_{\{p_1, p_2, p_3\}} \mathbb{P}^2 \\ \varphi & \mapsto \varphi_1 := \pi\varphi\pi^{-1} \end{cases}$$

6. On appelle **structure réelle birationnelle** une involution antirégulière définie sur un ouvert dense de  $X$ .

et

$$\Psi : \begin{cases} \text{Aut}_{\{p_1, p_2, p_3\}} \mathbb{P}^2 & \rightarrow \text{Aut}_{\{p_{1,0}, p_{2,0}, p_{3,0}\}} \mathbb{P}^2 \\ \varphi_1 & \mapsto \varphi_0 := \psi^{-1} \varphi_1 \psi \end{cases}$$

La suite exacte  $G$ -équivariante (où  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agit par  $\sigma$ )

$$1 \rightarrow \text{Aut}^\# X \rightarrow \text{Aut} X \rightarrow \text{Aut}^* X \rightarrow 1$$

est  $G$ -équivariamment isomorphe via  $\Psi \circ \Phi$  à la suite exacte obtenue à la Proposition 2.13 (où  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agit par  $\sigma_0$ )

$$(4.4) \quad 1 \rightarrow (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow \text{Aut}_{\{p_{1,0}, p_{2,0}, p_{3,0}\}} \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

où  $\left\{ \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & 1 \end{bmatrix} ; (\alpha, \beta) \in (\mathbb{C}^*)^2 \right\} \simeq (\mathbb{C}^*)^2$  et  $\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est engendré par les matrices de permutations et

$$\tau : [x : y : z] \mapsto \left[ \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \right] = [yz : xz : xy].$$

La suite exacte (4.4) donne une suite exacte en cohomologie (on note  $\mathcal{P}_0 = \{p_{1,0}, p_{2,0}, p_{3,0}\}$ )

$$(4.5) \quad \dots \rightarrow H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2) \xrightarrow{i} H^1(G, \text{Aut}_{\mathcal{P}_0} \mathbb{P}^2) \xrightarrow{\pi} H^1(G, \mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

- **Calcul de  $H^1(G, \mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .**

Notons que les éléments de  $A := \mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sont à coefficients réels donc  $\forall \alpha \in \mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $\sigma \cdot \alpha = \sigma \alpha \sigma^{-1} = \alpha$ . D'après la Proposition 3.29, on a donc

$$H^1(G, A) = \{[\text{Id}]\} \cup \{\text{classes de conjugaison des éléments d'ordre 2 de } A\}.$$

On remarque que  $\mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\text{Id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), \tau, (1\ 2)\tau, (1\ 3)\tau, (2\ 3)\tau, (1\ 2\ 3)\tau, (1\ 3\ 2)\tau\}$  et que  $\tau$  commute avec les permutations donc on peut vérifier aisément que

$$H^1(G, \mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{[\text{Id}], [(1\ 2)], [\tau], [(1\ 2)\tau]\}.$$

- **Calcul de  $\pi^{-1}([\text{Id}]) \simeq \text{Im}[H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2) \rightarrow H^1(G, \text{Aut}_{\mathcal{P}_0} \mathbb{P}^2)]$ .**

$G$  agit sur  $(\mathbb{C}^*)^2$  par la conjugaison complexe standard donc le dévissage de  $(\mathbb{C}^*)^2$  en deux facteurs isomorphes à  $\mathbb{C}^*$  est  $G$ -équivariant et, d'après le Théorème 90 de Hilbert, on obtient  $H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2) = \{(1, 1)\}$  et donc  $\pi^{-1}([\text{Id}]) = \{[\text{Id}]\}$ .

- **Calcul de  $\pi^{-1}([\tau]) \simeq \text{Im}[H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2) \rightarrow H^1(G, (\text{Aut}_{\mathcal{P}_0} \mathbb{P}^2)_\tau)]$ .**

- Déterminons d'abord  $H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2_\tau)$ .  $\sigma$  agit sur un  $\varphi : [x : y : z] \mapsto [\alpha x : \beta y : z] \in (\mathbb{C}^*)^2$  par

$$\sigma * \varphi = \tau \sigma \varphi \sigma^{-1} \tau^{-1} : [x : y : z] \mapsto \left[ \frac{x}{\alpha} : \frac{y}{\beta} : z \right]$$

$$\text{i.e. } \sigma * (\alpha, \beta) = \left( \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right).$$

- Un élément  $a_\sigma = (\alpha, \beta)$  de  $(\mathbb{C}^*)^2$  est un cocycle si, et seulement si,  $a_\sigma \sigma * a_\sigma = (1, 1)$  c'est-à-dire  $\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} = 1$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $\beta \in \mathbb{R}^*$ .
- Deux cocycles  $a_\sigma = (\alpha, \beta)$  et  $b_\sigma = (\alpha', \beta')$  sont équivalents si, et seulement si,

$$\begin{aligned} & \exists A = (a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid b_\sigma = A^{-1} a_\sigma \sigma * A \\ \iff & \exists A = (a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid (\alpha', \beta') = (a^{-1} \alpha \frac{1}{a}, b^{-1} \beta \frac{1}{b}) \\ \iff & \exists A = (a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid |a|^2 = \frac{\alpha}{\alpha'} \text{ et } |b|^2 = \frac{\beta}{\beta'} \\ \iff & \frac{\alpha}{\alpha'} \in \mathbb{R}_*^+ \text{ et } \frac{\beta}{\beta'} \in \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}$$

On a donc 4 classes d'équivalence :

$$H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2_\tau) = \left\{ [\text{Id}], [A_1 := \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}], [A_2 := \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}], [A_3 := \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}] \right\}.$$

- Reste à trouver l'image de  $H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2_\tau)$  par l'application tordue, ou encore l'image des classes  $[\text{Id}], [A_1\tau], [A_2\tau], [A_3\tau]$  par l'application non tordue.

On remarque que :

$$(1\ 2)^{-1}A_1\tau\sigma.(1\ 2) = (1\ 2)A_1\tau(1\ 2) = (1\ 2)A_1(1\ 2)\tau = A_2\tau$$

et que (en notant que la matrice de  $(2\ 3)A_1(2\ 3)$  est  $-A_3$  donc égale  $A_3$  dans  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ ) :

$$(2\ 3)^{-1}A_1\tau\sigma.(2\ 3) = (2\ 3)A_1\tau(2\ 3) = (2\ 3)A_1(2\ 3)\tau = A_3\tau.$$

Donc les  $A_i\tau$  sont cohomologues.

Si  $\varphi \in (\mathbb{C}^*)^2$  et  $p \in \mathcal{S}_3$ , alors

$$(p\varphi)^{-1}\tau\sigma.(p\varphi) = \varphi^{-1}p^{-1}\tau\sigma.p\sigma.\varphi = \varphi^{-1}\tau\sigma.\varphi$$

et

$$(\tau p\varphi)^{-1}\tau\sigma.(\tau p\varphi) = \varphi^{-1} \underbrace{(\tau p)^{-1}\tau\sigma.(\tau p)}_{=\tau} \sigma.\varphi = \varphi^{-1}\tau\sigma.\varphi$$

donc si  $\tau$  est cohomologue à un élément de  $\text{Aut } X$ , il l'est via un élément de  $(\mathbb{C}^*)^2$ .

Maintenant, si  $\varphi : [x : y : z] \mapsto [\alpha x : \beta y : z]$ , alors

$$\varphi^{-1}\tau\sigma.\varphi : [x : y : z] \mapsto [\bar{\alpha}x : \bar{\beta}y : z] \mapsto \left[ \frac{1}{\bar{\alpha}x} : \frac{1}{\bar{\beta}y} : \frac{1}{z} \right] \mapsto \left[ \frac{1}{|\alpha|^2 x} : \frac{1}{|\beta|^2 y} : \frac{1}{z} \right]$$

ne peut être aucun des  $A_i\tau$  (puisque  $|\alpha|^2 \geq 0$  et  $|\beta|^2 \geq 0$ ), ce qui montre que  $\tau$  n'est pas cohomologue aux  $A_i\tau$  et donc  $\pi^{-1}([\tau]) = \{[\tau], [A_1\tau]\}$ .

- Calcul de  $\pi^{-1}([(1\ 2)]) \simeq \text{Im} [H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2_{(1\ 2)}) \rightarrow H^1(G, (\text{Aut } \mathcal{P}_0\mathbb{P}^2)_{(1\ 2)})]$ .

Déterminons d'abord  $H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2_{(1\ 2)})$ .  $\sigma$  agit sur un  $\varphi : [x : y : z] \mapsto [\alpha x : \beta y : z] \in (\mathbb{C}^*)^2$  par

$$\sigma * \varphi = (1\ 2)\sigma\varphi\sigma^{-1}(1\ 2)^{-1} : [x : y : z] \mapsto [\bar{\beta}x : \bar{\alpha}y : z].$$

On vérifie alors aisément qu'un  $a_\sigma = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in (\mathbb{C}^*)^2$  est un cocycle si, et seulement si,  $\beta = \frac{1}{\alpha}$ .

Par ailleurs, deux cocycles  $a_\sigma = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \frac{1}{\alpha} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$  et  $b_\sigma = \begin{bmatrix} \beta & & \\ & \frac{1}{\beta} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$  sont équivalents si, et seulement si,

$$\exists \begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid \begin{bmatrix} \beta & & \\ & \frac{1}{\beta} & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & & \\ & \frac{1}{b} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \frac{1}{\alpha} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b} & & \\ & \bar{a} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\exists a, b \in \mathbb{C}^* \mid \beta = \frac{\bar{b}}{a}$$

ce qui est clairement vrai  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ .

Ainsi deux cocycles sont toujours équivalents donc  $H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2_{(1\ 2)}) = \{[\text{Id}]\}$  et  $\pi^{-1}([(1\ 2)]) = \{[(1\ 2)]\}$ .

- Calcul de  $\pi^{-1}([\tau(1\ 2)]) \simeq \text{Im} [H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2_{\tau(1\ 2)}) \rightarrow H^1(G, (\text{Aut } \mathcal{P}_0 \mathbb{P}^2)_{\tau(1\ 2)})]$ .

Déterminons d'abord  $H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2_{\tau(1\ 2)})$ .  $\sigma$  agit sur un  $\varphi : [x : y : z] \mapsto [\alpha x : \beta y : z] \in (\mathbb{C}^*)^2$  par

$$\sigma * \varphi = \tau(1\ 2)\sigma\varphi\sigma^{-1}(\tau(1\ 2))^{-1} : [x : y : z] \mapsto \left[ \frac{x}{\beta} : \frac{y}{\alpha} : z \right].$$

On vérifie alors aisément qu'un  $a_\sigma = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in (\mathbb{C}^*)^2$  est un cocycle si, et seulement si,  $\beta = \bar{\alpha}$ .

Par ailleurs, deux cocycles  $a_\sigma = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \bar{\alpha} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$  et  $b_\sigma = \begin{bmatrix} \beta & & \\ & \bar{\beta} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$  sont équivalents si, et seulement si,

$$\exists \begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid \begin{bmatrix} \beta & & \\ & \bar{\beta} & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & & \\ & \frac{1}{b} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \bar{\alpha} & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & & \\ & \frac{1}{a} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\exists a, b \in \mathbb{C}^* \mid \beta = \frac{1}{ab}\alpha$$

ce qui est clairement vrai  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ .

Ainsi deux cocycles sont toujours équivalents donc  $H^1(G, (\mathbb{C}^*)^2_{\tau(1\ 2)}) = \{[\text{Id}]\}$  et  $\pi^{-1}([\tau(1\ 2)]) = \{[\tau(1\ 2)]\}$ .

Finalement, on a parcouru toutes les fibres de  $\pi$  et donc tout l'ensemble  $H^1(G, \text{Aut } \mathcal{P}_0 \mathbb{P}^2)$ . Ainsi, on obtient 5 classes de structures réelles sur  $X$  correspondant à :

$$H^1(G, \text{Aut } \mathcal{P}_0 \mathbb{P}^2) = \{[\text{Id}], [\tau], [A_1\tau], [(1\ 2)], [\tau(1\ 2)]\}.$$

Il reste à déterminer les lieux réels de ces structures réelles :

- ceux de  $\sigma_0$  et de  $(1\ 2)\sigma_0$  ne posent aucune difficulté;
- pour  $\tau\sigma_0$ , on notera que

$$X(\mathbb{C}) = \{p = ([x : y : z], [u : v : w]) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid ux = vy = wz\}$$

et que sur  $X(\mathbb{C})$

$$\tau\sigma_0 : ([x : y : z], [u : v : w]) \mapsto ([\bar{u} : \bar{v} : \bar{w}], [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]).$$

Un point  $p \in X(\mathbb{C})$  est réel pour  $\tau\sigma_0$  si, et seulement si,

$$\begin{cases} ux = vy = wz \\ \left| \frac{x}{y} \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \right| = \left| \frac{x}{z} \frac{\bar{u}}{\bar{w}} \right| = \left| \frac{y}{z} \frac{\bar{v}}{\bar{w}} \right| = 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} ux = vy, \bar{v}x = \bar{u}y \\ ux = wz, \bar{w}x = \bar{u}z \\ vy = wz, \bar{w}y = \bar{v}z \end{cases}$$

Si  $x \neq 0$ , alors on peut supposer que  $x = 1$  et on obtient

$$\begin{cases} u = vy, \bar{v} = \bar{u}y = \bar{v}|y|^2 \iff |y| = 1 \text{ ou } v = 0 \\ u = wz, \bar{w} = \bar{u}z = \bar{w}|z|^2 \iff |z| = 1 \text{ ou } w = 0 \\ vy = wz, \bar{w}y = \bar{v}z \end{cases}$$

Mais si  $v = 0$  ou  $w = 0$ , alors  $u = vy = wz = 0$  et on a  $\bar{w} = \bar{u}z = 0$  ou  $\bar{v} = \bar{u}y = 0$  donc  $u = v = w = 0$ , ce qui est impossible.

Donc  $(y, z) \in \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$  et une fois  $y$  et  $z$  fixés, on voit que le choix  $u := yz, v := xz = z$  et  $w := xy = y$  convient.

Si  $x = 0$ , alors  $y \neq 0$  ou  $z \neq 0$  et on obtient finalement  $u = v = w = 0$ , ce qui est impossible.

Donc  $X(\mathbb{C})^{\tau\sigma_0} \approx \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 = \mathbb{T}^2$ .

- pour  $A_1\tau\sigma_0$ , on notera que

$$A_1\tau\sigma_0 : ([x : y : z], [u : v : w]) \mapsto ([\bar{u} : -\bar{v} : \bar{w}], [\bar{x} : -\bar{y} : \bar{z}]).$$

Un point  $p \in X(\mathbb{C})$  est réel pour  $A_1\tau\sigma_0$  si, et seulement si,

$$\begin{cases} ux = vy = wz \\ \left| \begin{matrix} x & \bar{u} \\ y & -\bar{v} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} x & \bar{u} \\ z & \bar{w} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} y & -\bar{v} \\ z & \bar{w} \end{matrix} \right| = 0 \end{cases}$$

Les mêmes méthodes que ci-dessus montrent que  $X(\mathbb{C})^{A_1\tau\sigma_0} = \emptyset$ .

- pour  $\tau(1\ 2)\sigma_0$ , on notera que

$$\tau(1\ 2)\sigma_0 : ([x : y : z], [u : v : w]) \mapsto ([\bar{v} : \bar{u} : \bar{w}], [\bar{y} : \bar{x} : \bar{z}]).$$

Un point  $p \in X(\mathbb{C})$  est réel pour  $\tau(1\ 2)\sigma_0$  si, et seulement si,

$$\begin{cases} ux = vy = wz \\ \left| \begin{matrix} x & \bar{v} \\ y & \bar{u} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} x & \bar{v} \\ z & \bar{w} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} y & \bar{u} \\ z & \bar{w} \end{matrix} \right| = 0 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} ux = vy, \bar{u}x = \bar{v}y \\ ux = wz, \bar{w}x = \bar{v}z \\ vy = wz, \bar{w}y = \bar{u}z \end{cases}$$

- Si  $x \neq 0$ , alors on peut supposer que  $x = 1$  et on obtient

$$\begin{cases} u = vy, \bar{u} = \bar{v}y \\ u = wz, \bar{w} = \bar{v}z \\ vy = wz, \bar{w}y = \bar{u}z \end{cases}$$

Si  $v = 0$ , alors  $u = vy = 0$  et  $w = v\bar{z} = 0$ , ce qui est impossible.

Donc  $v \neq 0$  et on peut supposer que  $v = 1$ , pour obtenir, après simplifications :

$$\begin{cases} u = y, & y = \bar{u} \\ u = wz = |z|^2, \bar{w} = z \end{cases}$$

ce qui nous donne l'ensemble

$$\{([1 : |z|^2 : z], [|z|^2 : 1 : \bar{z}]) \mid z \in \mathbb{C}\}.$$

- Si  $x = 0$ , on obtient

$$\begin{cases} vy = \bar{v}y = 0 \\ wz = 0, \bar{w}z = 0 \\ \bar{w}y = \bar{u}z \end{cases}$$

Si  $v \neq 0$ , alors  $x = y = z = 0$ , ce qui est impossible donc  $v = 0$  et on obtient

$$\begin{cases} wz = 0 \\ \bar{w}y = \bar{u}z \end{cases}$$

ce qui implique  $w = z = 0$  et nous donne le point

$$([0 : 1 : 0], [1 : 0 : 0])$$

qui n'est autre que la limite de  $([1 : |z|^2 : z], [|z|^2 : 1 : \bar{z}]) = \left( \left[ \frac{1}{|z|^2} : 1 : \frac{1}{\bar{z}} \right], \left[ 1 : \frac{1}{|z|^2} : \frac{1}{z} \right] \right)$  quand  $z \rightarrow \infty$ .

Cela montre que le paramètre  $z$  parcourt la sphère  $X^{A_1\tau\sigma_0} \approx \mathcal{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

**Proposition 4.11. (3 points alignés)**

Soient  $p_1, p_2$  et  $p_3$  trois points alignés de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et  $X$  l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en ces points.

$X$  admet 2 structures réelles à équivalence près : elles sont obtenues par relèvement sur  $X$  de l'une des structures réelles suivantes :

- $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$  (lieu réel homéomorphe à  $(\mathbb{RP}^2)^{\#4}$ );
- $\varphi_{(1\ 2)}\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{y} : \bar{x} : \bar{z}]$  (lieu réel homéomorphe à  $(\mathbb{RP}^2)^{\#2}$ ).

*Démonstration.* Vérifions qu'il existe une structure réelle sur  $X$ .

Si l'on note  $\sigma_0 : [x : y : z] \mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]$ ,  $p_{1,0} = [1 : 0 : 0]$ ,  $p_{2,0} = [0 : 1 : 0]$  et  $p_{3,0} = [1 : 1 : 0]$ , on voit qu'il existe  $\psi \in \text{Aut } \mathbb{P}^2$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ ,  $\psi(p_{i,0}) = p_i$  et que par conséquent,  $\sigma_1 := \psi\sigma_0\psi^{-1}$  est une structure réelle sur  $\mathbb{P}^2$  qui fixe  $p_1, p_2$  et  $p_3$ ; on peut alors la relever en une structure réelle  $\sigma$  sur  $X$  telle que  $\pi\sigma = \sigma_1\pi$  (où on note  $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  la contraction).

Comme précédemment, la Proposition 2.15 nous fournit une suite exacte  $G$ -équivariante (où  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agit par  $\sigma_0$ )

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut } X \simeq \text{Aut}_{\{p_1, p_2, p_3\}} \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}_3 \rightarrow 1$$

Une fois encore,  $H^1(G, \mathcal{S}_3) = \{\text{[Id]}, [(1\ 2)]\}$ ,  $H^1(G, \mathbb{C}^*) = \{[1]\}$  et  $H^1(G, \mathbb{C}^2) = \{[0]\}$  donc  $\pi^{-1}(\text{[Id]}) = \{\text{[Id]}\}$ . Il reste à déterminer  $H^1(G, (\mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^*)_{(1\ 2)})$  puis  $\pi^{-1}([(1\ 2)]) : \sigma_0$  agit sur  $\mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^*$  par

$$\sigma_0 * \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \gamma \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (1\ 2)\sigma_0 \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \gamma \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sigma_0^{-1}(1\ 2)^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ensuite,  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \gamma \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  est un cocycle si, et seulement si,  $A\sigma_0 * A = \text{Id}$  soit

$$\begin{cases} |\alpha| = 1 \\ \beta = -\alpha\bar{\gamma} \\ \gamma = -\alpha\bar{\beta} \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} |\alpha| = 1 \\ \beta = -\alpha\bar{\gamma} \end{cases}$$

Ensuite, deux cocycles  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \gamma \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha' & \gamma' \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  sont équivalents si, et seulement si,  $\exists M =$

$\begin{bmatrix} a & b \\ a & c \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  tel que  $B = M^{-1}A\sigma_0 * M$  ce qui équivaut à

$$\exists a \in \mathbb{C}^*, b, c \in \mathbb{C} \text{ tel que } \begin{cases} \alpha' = \frac{\bar{a}}{a}\alpha \\ \beta' = \frac{\alpha\bar{c} + \beta - b}{a} \\ \gamma' = \frac{\alpha\bar{b} + \gamma - c}{a} \end{cases}$$

et la condition de cocycle montre que la 2e équation est redondante. On peut alors vérifier sans difficulté l'existence de tels  $a, b, c$  pour tous cocycles  $A$  et  $B$ , ce qui montre que  $H^1(G, (\mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^*)_{(1\ 2)})$ .

Bref, on obtient finalement :

$$H^1(G, \text{Aut } X) = \{\text{[Id]}, [(1\ 2)]\}$$

d'où le résultat (là encore, les lieux réels ne posent aucune difficulté selon qu'on éclate 3 points réels ou bien un point réel et une paire de points non-réels conjugués).  $\square$

Voici maintenant un résultat permettant de traiter le cas où l'on éclate entre 4 et 8 points distincts de  $\mathbb{P}^2$ ; nous verrons dans le prochain chapitre qu'il s'agit en réalité d'un cas particulier d'un résultat bien plus général :

**Théorème 4.12. ( $4 \leq r \leq 8$  points distincts)** Soient  $r \in \llbracket 4; 8 \rrbracket$ ,  $p_1, \dots, p_r$  des points deux à deux distincts de  $\mathbb{P}^2$  et  $X$  l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en ces points.

1. Si parmi les  $p_i$  on peut trouver 4 points formant un repère projectif (c'est-à-dire sans triplet aligné), alors  $\text{Aut}^\# X$  est trivial et  $\text{Aut} X$  est fini.

En particulier, dans les cas dont la liste suit,  $\text{Aut} X$  est fini et donc  $X$  admet un nombre fini de structures réelles :

(a) si  $X$  est une surface de Del Pezzo avec  $r \geq 4$  ;

(b) si parmi les  $p_i$ , on trouve 3 points alignés sur une droite  $\mathcal{D}$  et deux points n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$  ;

(c) si parmi les  $p_i$ , on trouve un sextuplet coconique ;

(d) si les  $p_i$  sont 8 points situés sur une cubique singulière de telle sorte que l'un d'entre eux est le point singulier de la cubique.

2. Si tous les  $p_i$  sauf un seul sont alignés, alors  $\text{Aut} X$  est infini, mais on a un nombre fini de structures réelles à équivalence près, en vertu de la suite exacte suivante (où  $N$  désigne le nombre, fini, de diviseurs exceptionnels sur  $X$ ) :

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \hookrightarrow \text{Aut} X \longrightarrow \mathcal{S}_N$$

3. Si tous les  $p_i$  sont alignés (avec  $r \geq 3$ ), alors  $\text{Aut} X$  est infini, mais on a un nombre fini de structures réelles à équivalence près, en vertu de la suite exacte suivante (où  $N$  désigne le nombre, fini, de diviseurs exceptionnels sur  $X$ ) :

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^* \hookrightarrow \text{Aut} X \longrightarrow \mathcal{S}_N$$

4. L'ensemble des résultats précédents montre que :

Un éclaté en  $r \leq 8$  points distincts de  $\mathbb{P}^2$  admet un nombre fini de structures réelles à équivalence près.

*Démonstration.* 1. D'abord, rappelons que la Proposition 2.24 montre que si  $X$  est l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en au moins 4 points distincts  $p_1, \dots, p_r$ , alors  $\text{Aut}^\# X$  est infini ou trivial et il est non-trivial si l'on ne peut trouver de repère projectif parmi les  $p_i$ , i.e. si tous les  $p_i$  (sauf peut-être un seul d'entre eux) sont alignés. De plus, d'après la Proposition 2.28,  $\text{Aut}^* X$  est fini pour  $r \leq 8$ . Cela démontre la première affirmation du 1. Reste à trouver un repère projectif dans chacun des cas indiqués, les cas (a) et (b) ne posant aucune difficulté :

(c) Remarquons que si  $p_1, \dots, p_6$  sont situés sur une même conique  $C$  et si trois d'entre eux sont alignés sur une droite  $D$ , alors  $C.D = 3$ , ce qui contredit le Théorème de Bezout. Ainsi, tout quadruplet de points inclus dans un sextuplet coconique forme un repère projectif de  $\mathbb{P}^2$ , ce qui montre que  $\text{Aut}^\# X$  est trivial, et donc que  $\text{Aut} X$  est fini car  $r \leq 8$ .

(d) Si  $p_1, \dots, p_8$  sont situés sur une même cubique singulière  $C$  et si trois d'entre eux sont alignés sur une droite  $D$ , alors en notant  $p_1$  le point singulier de  $C$ , on voit que  $(C.D)_{p_1} \geq m_{p_1}(C).m_{p_1}(D) = 2$  donc  $C \cap D$  ne peut contenir qu'un seul des  $p_i$ ,  $i \geq 2$ , sinon cela contredirait le Théorème de Bezout : ainsi,  $\forall k, \ell \in \llbracket 2; 8 \rrbracket$ ,  $p_1, p_k, p_\ell$  ne sont pas alignés. On distingue alors deux cas pour conclure :

- si  $p_2, p_3, p_4$  ne sont pas alignés, alors  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  est un repère projectif de  $\mathbb{P}^2$  ;
- sinon, le Théorème de Bezout montre que  $(p_2 p_3) \cap C = \{p_2, p_3, p_4\}$  et on en déduit que  $(p_1, p_2, p_3, p_5)$  est un repère projectif de  $\mathbb{P}^2$ .

2. Le calcul de  $\text{Aut}^\# X \simeq \mathbb{C}^*$  a été donné dans la preuve de la Proposition 2.24 et  $H^1(G, \mathbb{C}^*)$  est fini quelle que soit l'action de  $G$ . Comme un éclaté en  $r \leq 8$  points a un nombre fini de courbes exceptionnelles et comme  $H^1(G, A)$  est fini pour tout  $G$ -groupe fini  $A$ , on en déduit le résultat annoncé.

3. Le calcul de  $\text{Aut}^\# X \simeq \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^*$  a été donné dans la preuve de la Proposition 2.24. Mais contrairement au cas précédent, la finitude de  $H^1(G, \mathbb{C}^2 \rtimes \mathbb{C}^*)$  pour toutes les actions tordues n'est pas garantie *a priori*. C'est précisément cette difficulté qui nous a conduits à établir le résultat général sur le groupe  $\text{Aut}^\# X$  d'une surface rationnelle  $X$  que nous allons voir dès le début du prochain chapitre. □

---

# Chapter 5

---

---

## Finiteness results for real forms on rational surfaces

In this chapter, we state and prove the main results of this thesis (note that we established some of them in our paper [Ben16]). We begin by showing that any complex smooth rational surface  $X$  whose automorphism group does not contain a non-abelian free subgroup (necessarily generated by two "independent" automorphisms of positive entropy) has finitely many real forms ; this is especially the case if  $X$  cannot be obtained by blowing up  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  at  $r \geq 10$  points. For this purpose, we first prove that the group  $\text{Aut}^{\#} X$  of complex automorphisms of  $X$  which act trivially on the Picard group of  $X$  is a linear algebraic group defined over  $\mathbb{R}$  in some precise sense: thanks to this general result, we can avoid a tedious case disjunction depending on the relative position of the points blown-up. Then, we use results about isometries of lorentzian lattices in connection with topological entropy and hyperbolic geometry, as we saw in Section 2.4. After that, we establish finiteness of real structures on some examples of rational surfaces having positive entropy automorphisms, and especially for Cremona special surfaces, which are, in some sense, rational surfaces with the largest possible automorphism groups. Finally, we show that KLT Calabi-Yau pairs of dimension 2 also have a finite number of real forms, up to  $\mathbb{R}$ -isomorphism: the key result we use in order to prove this is the Cone Conjecture that Totaro proved in dimension 2.

### 5.1 Real structure on $\text{Aut}^{\#} X$

The aim of this section is to show that conjugation by a real structure  $\sigma$  on a smooth projective variety  $X$  induces a real structure on  $\text{Aut}^{\#} X$ . Combined with Theorem 3.28, it shows that  $H^1(\langle \sigma \rangle, \text{Aut}^{\#} X)$  is finite for every real structure  $\sigma$ . More precisely, we want to show the following result (its first part is well-known and its second part is supposedly well-known but we have not been able to find any reference):

**Theorem 5.1.** *Let  $X$  be a smooth irreducible projective complex variety and  $\sigma$  be a real structure on  $X$ .*

*$\text{Aut}^{\#} X$  is a complex linear algebraic group and the map  $\tilde{\sigma} : \begin{cases} \text{Aut}^{\#} X & \rightarrow & \text{Aut}^{\#} X \\ \varphi & \mapsto & \sigma \varphi \sigma^{-1} \end{cases}$  defines a real structure on  $\text{Aut}^{\#} X$ .*

Before the proof, let us recall the following conventions (cf. [Sil89, I.4]):

**Definition 5.2.** Let  $X$  be a smooth projective complex variety,  $\varphi$  be an endomorphism of  $X$  and  $\sigma$  be an antiregular endomorphism of  $X$ .

1. If  $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$  is a rational function on  $X$ , then we set  $\varphi^* f := f \circ \varphi$  and  $\sigma^* f := \overline{f \circ \sigma} = c \circ f \circ \sigma$  (where  $c : z \mapsto \bar{z}$ ).
2. If  $D = \{(U_i, f_i)\}$  is a Cartier divisor, then we set  $\varphi^* D := \{(\varphi^{-1}(U_i), \varphi^* f_i)\}$  and  $\sigma^* D := \{(\sigma^{-1}(U_i), \sigma^* f_i)\}$ .

**Remark 5.3.** With these conventions, one can prove that if  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  are two endomorphisms (regular or antiregular) of  $X$ , then  $(\varphi_1 \varphi_2)^* = \varphi_2^* \varphi_1^*$  as expected.

*Sketch of proof.* The idea of the proof is the following: we use an embedding of  $X$  into a projective space  $\mathbb{P}^n$  and we define a real structure  $\sigma_1$  on  $\mathbb{P}^n$  for which this embedding is equivariant. Then we show that the elements of  $\text{Aut}^{\#} X$  can be extended to automorphisms of  $\mathbb{P}^n$ , realizing  $\text{Aut}^{\#} X$  as an algebraic subgroup of  $\text{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ . Finally, we are reduced to prove that  $\tilde{\sigma}_1 : \begin{cases} \text{Aut}^{\#} \mathbb{P}^n & \rightarrow & \text{Aut}^{\#} \mathbb{P}^n \\ \varphi_1 & \mapsto & \sigma_1 \varphi_1 \sigma_1^{-1} \end{cases}$  defines a real structure on  $\text{Aut}^{\#} \mathbb{P}^n$  which stabilizes the image of  $\text{Aut}^{\#} X$  and this is finally a computation in homogeneous coordinates in  $\mathbb{P}^n$ .

- **Step 1: the embedding**

Since  $X$  is projective, we can find an ample divisor  $D_0$  on  $X$ : in fact, as  $\sigma^*$  is an isometry for the intersection form (cf. [Sil89, II.1.1]), Nakai-Moishezon criterion shows that  $D_1 := D_0 + \sigma^*D_0$  is also ample on  $X$  and there exists  $p \in \mathbb{N}$  such that  $D := pD_1$  is very ample on  $X$  and satisfies  $\sigma^*D = D$ . Now, let  $(s_0, \dots, s_n)$  be a basis of the  $\mathbb{C}$ -vector space

$$H^0(D) := \{f \in \mathcal{K}(X)^* \mid D + (f) \geq 0\} \cup \{0\}$$

We consider the embedding defined by this basis:

$$\Phi : \begin{cases} X & \rightarrow & \mathbb{P}^n \\ x & \mapsto & [s_0(x) : \dots : s_n(x)] \end{cases}$$

- **Step 2: the real structure on  $\mathbb{P}^n$**

Note that  $\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\sigma^*s_j \in H^0(D)$  since  $\sigma^*D = D$ : thus, there exist some complex numbers  $\sigma_{j0}, \dots, \sigma_{jn}$  such that  $\sigma^*s_j = \overline{s_j \circ \sigma} = \sum_{i=0}^n \sigma_{ji}s_i$ . We now define  $\sigma_1$  by:

$$\sigma_1 : \begin{cases} \mathbb{P}^n & \rightarrow & \mathbb{P}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] & \mapsto & \left[ \sum_{i=0}^n \overline{\sigma_{0i}x_i} : \dots : \sum_{i=0}^n \overline{\sigma_{ni}x_i} \right] \end{cases}$$

One can verify that  $\sigma_1$  is a real structure on  $\mathbb{P}^n$  and that  $\Phi$  is equivariant for  $\sigma$  and  $\sigma_1$ .

- **Step 3: building an automorphism of  $\mathbb{P}^n$  from an element of  $\text{Aut}^\# X$**

If  $\varphi \in \text{Aut}^\# X$ , then  $\varphi^*D \sim D$  thus there exists  $f_\varphi \in \mathcal{K}(X)^*$  such that  $\varphi^*D = D + (f_\varphi)$ . Now, note that  $\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $f_\varphi \varphi^*s_j \in H^0(D)$  since  $\varphi^*s_j \in H^0(\varphi^*D)$ : thus, there exist some complex numbers  $a_{j0}, \dots, a_{jn}$  such that  $f_\varphi \varphi^*s_j = \sum_{i=0}^n a_{ji}s_i$ . We now define  $\varphi_1 \in \text{Aut } \mathbb{P}^n$  by:

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{P}^n & \rightarrow & \mathbb{P}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] & \mapsto & \left[ \sum_{i=0}^n a_{0i}x_i : \dots : \sum_{i=0}^n a_{ni}x_i \right] \end{cases}$$

We have to verify that  $\Phi \circ \varphi = \varphi_1 \circ \Phi$ . Let us denote by  $\text{Ind}(f_\varphi)$  the indeterminacy locus of  $f_\varphi$  and let  $U := \{x \in X \setminus \text{Ind}(f_\varphi) \mid f_\varphi(x) \neq 0\}$ . For  $x \in U$ , one has:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi(x)) &= [s_0(\varphi(x)) : \dots : s_n(\varphi(x))] \\ &= [f_\varphi(x)\varphi^*s_0(x) : \dots : f_\varphi(x)\varphi^*s_n(x)] \\ &= \left[ \sum_{i=0}^n a_{0i}s_i(x) : \dots : \sum_{i=0}^n a_{ni}s_i(x) \right] = \varphi_1(\Phi(x)) \end{aligned}$$

Hence  $\Phi \circ \varphi$  and  $\varphi_1 \circ \Phi$  are two isomorphisms from  $X$  to  $\mathbb{P}^n$  which coincide on the dense open subset  $U$  of  $X$ : thus they coincide on all of  $X$ .

- **Step 4: the embedding of  $\text{Aut}^\# X$  into  $\text{Aut } \mathbb{P}^n$**

We define  $\beta : \begin{cases} \text{Aut}^\# X & \rightarrow & \text{Aut } \mathbb{P}^n \\ \varphi & \mapsto & \varphi_1 \end{cases}$  :  $\beta$  is clearly injective (since the data of  $\beta(\varphi)$  determines  $\beta(\varphi)|_{\Phi(X)}$  and thus  $\varphi$ ) and a slightly tedious computation shows that  $\beta$  is a group morphism. Hence  $\text{Aut}^\# X$  can be equipped with a structure of linear algebraic group over  $\mathbb{C}$  for which  $\beta$  is a morphism of algebraic groups.

- **Step 5: antiregularity of  $\widetilde{\sigma}_1$  and  $\widetilde{\sigma}$**

Finally, we define  $\widetilde{\sigma} : \begin{cases} \text{Aut}^\# X & \rightarrow & \text{Aut}^\# X \\ \varphi & \mapsto & \sigma\varphi\sigma^{-1} \end{cases}$  and  $\widetilde{\sigma}_1 : \begin{cases} \text{Aut } \mathbb{P}^n & \rightarrow & \text{Aut } \mathbb{P}^n \\ \varphi & \mapsto & \sigma_1\varphi\sigma_1^{-1} \end{cases}$ .

Now, a really tedious computation shows both that  $\beta\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}_1\beta$  and that  $\widetilde{\sigma}_1$  is antiregular. Thus, we can conclude that  $\widetilde{\sigma} = (\beta|_{\text{Im } \beta})^{-1} \widetilde{\sigma}_1 \beta$  is antiregular ; as it is clearly an involution, we obtain the desired result:  $\widetilde{\sigma}$  is a real structure on the complex linear algebraic group  $\text{Aut}^\# X$ . □

## 5.2 Entropy and finiteness of real structures

Thanks to the previous section and to the definitions and results recalled in Section 2.4 (in particular, the definition of topological entropy and the theorems about the structure of  $\text{Aut}^*X$ ) and thanks to the cohomological results of Section 3.2 (or Section 3.5), we now have all the elements for proving the main result of this thesis, which encompasses many particular cases and links the existence of positive entropy automorphisms with the finiteness problem for real structures:

**Theorem 5.4.** *If a rational surface  $X$  has infinitely many equivalence classes of real structures, then  $X$  is a blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at  $r \geq 10$  points and has at least two "independent" automorphisms of positive entropy (in the sense that they generate a non-abelian free group  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ).*

**Remark 5.5.** In particular, this theorem shows that every blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at any number of points in general position has a finite number of real forms (up to isomorphism): when  $r \geq 9$ , it is a direct corollary of Theorem 2.29.

*Proof.* We prove the contrapositive of the theorem. Recall that we use the following  $G$ -equivariant exact sequence (cf. Lemma 3.24):

$$1 \longrightarrow \text{Aut}^\# X \longrightarrow \text{Aut} X \longrightarrow \text{Aut}^* X \longrightarrow 1$$

If  $X$  is a rational surface, we begin by showing that  $H^1(G, (\text{Aut}^\# X)_b)$  is finite for every  $b \in Z^1(G, \text{Aut} X)$  and then, we show that  $H^1(G, \text{Aut}^* X)$  is finite if  $X$  is non-basic or if it is a basic surface with no couple of independent automorphisms of positive entropy ; by the exact sequence in Galois cohomology (cf. 3.22), we obtain the finiteness of  $H^1(G, \text{Aut} X)$  which gives the finiteness of the number of classes of real structures on  $X$  (by 3.21).

Let us note first that  $G = \langle \sigma \rangle$  acts on  $(\text{Aut}^\# X)_b$  by  $\sigma * \varphi := b_\sigma(\sigma\varphi\sigma^{-1})b_\sigma^{-1} = \sigma_b\varphi\sigma_b^{-1}$  where  $\sigma_b := b_\sigma\sigma$  is a new real structure on  $X$  (here is the meaning of the torsion: it corresponds to a change of real structure). Thus, it is always the cohomology set corresponding to some real structure on  $X$ . Theorem 5.1 shows that the action of a real structure on  $\text{Aut}^\# X$  defines a real structure on this complex linear algebraic group. Thus, by (1) of Theorem 3.28,  $H^1(G, (\text{Aut}^\# X)_b)$  is finite for every  $b \in Z^1(G, \text{Aut} X)$ .

Now, let us remark that if  $X$  is a non-basic rational surface (i.e. if  $X$  is not a blow-up of  $\mathbb{P}^2$ ), then  $\text{Aut}^* X$  is finite. Indeed, by [Har87b, Lemma 1.1], if  $\text{Aut}^* X$  is infinite, then  $X$  contains infinitely many exceptional curves. But, the Corollary 1.2 of [Har87b] shows that in this case,  $X$  dominates  $\mathbb{P}^2$ . Thus  $H^1(G, \text{Aut}^* X)$  is finite and every non-basic rational surface has a finite number of non-isomorphic real forms.

Moreover, if  $X$  is a blow-up of  $\mathbb{P}^2$  having no automorphism of positive entropy, then by Theorem 2.38,  $A := \text{Aut}^* X \cap \text{O}^+(\text{Pic} X) \simeq \mathbb{Z}^k \rtimes H$ , where  $k \geq 0$  and  $H$  is a finite group. But  $A$  is of index at most two in  $\text{Aut}^* X$ , so by Theorem 3.35,  $H^1(G, \text{Aut}^* X)$  is finite and  $X$  has a finite number of real forms. In particular, if  $X$  is obtained by blowing-up  $r \leq 9$  points, then it has no automorphism of positive entropy by 6. of Theorem 2.36.

Finally, if  $X$  is a basic rational surface with positive entropy automorphisms, then Theorem 2.39 shows that either  $\text{Aut}^* X$  contains a non-abelian free group  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  or it is a finite extension of an infinite cyclic group. In this last case, Theorem 3.35 again shows that  $H^1(G, \text{Aut}^* X)$  is finite ; this concludes the proof.  $\square$

**Remark 5.6.** In [Kha02], finiteness is claimed for blow-ups at 10 points but, in fact, in a discussion with Kharlamov, we saw that his argument was only valid for unnodal Coble surfaces (this argument is used below in the proof of Theorem 5.15).

It may be surprising to note that we can prove a partial finiteness result in the first case of Tits alternative (cf. Theorem 2.39):

**Proposition 5.7.** *Let  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . If  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , then  $H^1(G, \mathbb{Z}^{*k})$  is finite independently of the action of  $G$ .*

*Proof.* By (2) of Theorem 3.28,  $H^1(G, \mathbb{Z}^{*k})$  is the amalgamed sum (or pushout) of  $k$  copies of  $H^1(G, \mathbb{Z})$  in the category of pointed sets. But, if  $(A, a)$  and  $(B, b)$  are two pointed sets, then their amalgamed sum is  $(C, (a, b))$ , where  $C = (A \times \{b\}) \cup (\{a\} \times B)$ . Thus, Theorem 3.35 allows us to conclude that  $H^1(G, C)$  is finite independently of the action of  $G$ .<sup>(1)</sup>  $\square$

1. In fact, one can prove directly owing to the definitions that  $H^1(G, \mathbb{Z})$  is finite independently of the action of  $G$ , without using the deeper Theorem 3.35.

### 5.3 Some examples with positive entropy

Theorem 5.4 allows us to study some examples of surfaces with automorphisms of positive entropy. The first example is due to Bedford and Kim ([BK10, Th.2]) and we describe it more precisely below. The second example is due to Mc Mullen ([McM07, 7.1,7.2]) : his surface  $S$  is the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at the  $n \geq 10$  points  $[x_i : x_i^3 : 1]$ ,  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  on the cuspidal cubic  $y^3 = xz^2$ , where  $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  does not belong to the  $W_X$ -orbit of a simple root (cf. 2.27) and  $x_i = -v_i - v_0/3$ .

**Proposition 5.8.** *Bedford-Kim and Mc Mullen surfaces have a finite number of equivalence classes of real structures.*

*Proof.* In [BK10, Th.2], it is proved that the automorphism group of their surfaces  $X$  satisfies  $\text{Aut}^* X \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  and  $\text{Aut}^\# X$  is finite, and in [McM07, 7.1,7.2], Mc Mullen obtains an automorphism group isomorphic to  $\mathbb{Z} \rtimes T$ , where  $T$  is a finite group. In any case, Theorem 3.35 allows us to conclude.  $\square$

In fact, Bedford-Kim's example is explicit enough to allow us explicit computations when their automorphism  $f$  has real coefficients. Before giving our result, let us recall briefly some of the notations of their paper:

- We fix an *even* number  $k \in \mathbb{N}^*$  and we define the birational map

$$f : [z : x : y] \mapsto \left[ y^k z : y^{k+1} : -xy^k + \sum_{\substack{\ell=2 \\ \ell \text{ even}}}^{k-2} a_\ell y^{k-\ell} z^{\ell+1} + z^{k+1} \right]$$

Following [BK10, Theorem 2], we put  $n = 2$  so that their coefficient  $c$  is zero (cf. [BK10, (1.2)]).

We add to their notations the assumption that  $\forall \ell \in \llbracket 2; k-2 \rrbracket$ ,  $a_\ell \in \mathbb{R}$ , i.e.  $f$  has real coefficients.

- Also, let  $\rho$  denote the map  $[z : x : y] \mapsto [z : y : x]$ .

**Proposition 5.9.** *If  $f$  has real coefficients, the surface  $X$  constructed in [BK10, Th.2] has at least three real structures up to equivalence:*

- the lifting  $\sigma$  of the standard complex conjugation  $\sigma_0$  of  $\mathbb{P}^2$  on  $X$ ;
- the lifting on  $X$  of the map  $\rho \circ \sigma_0$ ;
- the lifting on  $X$  of the map  $\rho \circ f \circ \sigma_0$ .

Moreover, these three structures correspond to the three possible actions of a real structure of  $X$  on  $\text{Pic } X$ , up to conjugation by an element of  $\text{Aut}^* X$ . In other words, if  $\sigma_1$  is any real structure on  $X$ , then the isometry  $\sigma_1^*$  induced by  $\sigma_1$  on  $\text{Pic } X$  is conjugate by an element of  $\text{Aut}^* X$  to one of the isometries induced by the three real structures described above.

*Proof.* We first prove that  $\sigma_0$  does actually lift on  $X$ : for this purpose, it suffices to show that the points blow-up (see [BK10, Section 1]) are real:

- first, since  $n = 2$ , the points of  $\mathbb{P}^2$  are  $e_2 = [0 : 0 : 1]$  and  $f(e_2) = [0 : 1 : 0]$ : clearly, they are real so  $\sigma_0$  lifts on the blow-up of these two points and we denote this lifting by  $\sigma_1$ ;
- then, we use one of the two coordinate systems

$$(t_j, \eta_j) \mapsto (t_j, \eta_j t_j + \beta) \text{ or } (\xi_j, x_j) \mapsto (\xi_j x_j + \beta, x_j)$$

where  $\beta$  depends on the center of the blow-up. By [Sil89, II.6.1], we lift  $\sigma$  on the blow-up of a real point by  $\tilde{\sigma} : ((t, x), [\xi : \eta]) \mapsto (\sigma(t, x), [\bar{\xi} : \bar{\eta}])$  where  $\eta = \frac{x}{t}$  and  $\xi = \frac{t}{x}$  so that  $(t_j, \eta_j)$  is real for  $\tilde{\sigma} \iff (t_j, \eta_j) \in \mathbb{R}^2$  and  $(\xi_j, x_j)$  is real for  $\tilde{\sigma} \iff (\xi_j, x_j) \in \mathbb{R}^2$ .

Now, if  $\xi_j$  is the first coordinate of one of the points blown-up, then  $\beta = \xi_j = 0$  or  $\pm b_j$ , where  $b_j$  is the coefficient defined by:

$$\frac{y^k}{1 + a_{k-1}y + a_{k-2}y^2 + \cdots + a_1y^{k-1} - xy^k} = \sum_{i=0}^{2k-1} b_i y^i + (x + b_{2k})y^{2k} + O(y^{2k+1}).$$

Of course, the  $b_j$  are real since the  $a_\ell$  are real.

Thus, the points blown-up are real.

If  $\sigma$  is the lifting of  $\sigma_0$  on  $X$  and if we denote again by  $f$  (resp.  $\rho$ ) the lifting of  $f$  (resp.  $\rho$ ) on  $X$ , then we note that  $\sigma.f = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1} = f$  (since  $f$  has real coefficients),  $\sigma.\rho = \rho$  and  $\sigma.(\rho \circ f) = \rho \circ f$ .

By [BK10, Th.2]

$$\text{Aut}^* X = \underbrace{\langle f^*, \rho^* \rangle}_{\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}} = \langle f^* \rho^* = (\rho \circ f)^*, \rho^* \rangle \simeq \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} * \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

We can quickly verify that  $H^1(\langle \sigma \rangle, \langle \rho \rangle) = \{[\text{Id}], [\rho]\}$  and  $H^1(\langle \sigma \rangle, \langle \rho \circ f \rangle) = \{[\text{Id}], [\rho \circ f]\}$ . By (2) of Theorem 3.28, we obtain

$$H^1(\langle \sigma \rangle, \langle \rho \rangle * \langle \rho \circ f \rangle) = \{[\text{Id}], [\rho], [\rho \circ f]\}.$$

Finally, if  $\sigma_1$  is any real structure on  $X$ , then there exists  $a_\sigma \in \text{Aut} X$  such that  $\sigma_1 = a_\sigma \sigma$ . The image  $[(a_\sigma^{-1})^*]$  of  $[a_\sigma]$  by the map  $H^1(\langle \sigma \rangle, \text{Aut} X) \rightarrow H^1(\langle \sigma \rangle, \text{Aut}^* X)$  [recall Theorem and Definition 2.16] is one of the elements of  $\{[\text{Id}], [\rho^*], [(\rho \circ f)^*]\}$  (note that these are involutions). Thus, there exists  $\alpha \in \text{Aut} X$  such that

$$(a_\sigma^{-1})^* = (a_\sigma^*)^{-1} = ((\alpha^{-1})^*)^{-1} b_\sigma^* ((\sigma \alpha \sigma^{-1})^{-1})^* = \alpha^* b_\sigma^* \sigma^* (\alpha^{-1})^* \sigma^*$$

where  $b_\sigma \in \{\text{Id}, \rho, \rho \circ f\}$  (recall the action of  $\sigma$  on  $\text{Aut}^* X$  given in the proof of Lemma 3.24), i.e.  $(a_\sigma \sigma)^* = \sigma^* a_\sigma^* = \alpha^* (b_\sigma \sigma)^* (\alpha^*)^{-1}$ , hence the result: the real structures  $\sigma_1 = a_\sigma \sigma$  and  $b_\sigma \sigma$  act similarly on  $\text{Pic} X$ , up to conjugation by an element of  $\text{Aut}^* X$ . □

**Remark 5.10.** If we wanted to obtain the exact classification of the equivalence classes of real structures on  $X$ , we should compute  $H^1(\langle \sigma \rangle, (\text{Aut}^\# X)_b)$  for every  $b \in Z^1(\langle \sigma \rangle, \text{Aut}^* X)$ .

## 5.4 Cremona special surfaces

Let us recall from [CD12] the following definition:

**Definition 5.11.** A point set  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_r\}$  of  $\mathbb{P}^2$  is called **Cremona special** if  $r \geq 9$  and if the surface  $X$  obtained by blowing up  $\mathcal{P}$  is such that  $\text{Aut}^* X$  has finite index in the (infinite) Weyl group  $W_X$ . The surface  $X$  is then also called Cremona special.

The finiteness of the index roughly expresses that  $\text{Aut}^* X$  is as large as possible. In [CD12], it is proved that a Cremona special complex rational surface is either an unnodal Halphen surface (with  $r = 9$ ) or an unnodal Coble surface (with  $r = 10$ ).

**Definition 5.12. (Halphen and Coble surfaces)**

- A smooth projective rational surface  $X$  is a **Halphen surface of index  $m \in \mathbb{N}^*$**  if the linear system  $| -mK_X |$  is a pencil without base point nor fixed component.
- A smooth projective rational surface  $X$  is a **Coble surface** if  $| -K_X |$  is empty,  $| -2K_X |$  consists of a single irreducible curve  $\mathcal{C}$  and  $K_X^2 = -1$ .
- A Halphen or a Coble surface is **nodal** if it contains a  $(-2)$ -curve, i.e. if there exists a smooth effective divisor  $D$  such that  $D^2 = -2$ ,  $DK_X = 0$ . Otherwise, the surface is **unnodal**.

We now recall the two following results which give a brief geometric description of Halphen and Coble surfaces:

**Proposition 5.13.** ([CD12, Prop.2.2]) *Let  $X$  be a rational surface and let  $m > 0$ .*

*The following are equivalent :*

1.  $X$  is a Halphen surface of index  $m$  ;
2.  $X$  is equipped with a relatively minimal elliptic fibration  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  with no multiple fibre if  $m = 1$  and a unique multiple fibre (of order  $m$ ) if  $m > 1$  ;
3. there exists an irreducible pencil<sup>2</sup> of curves of degree  $3m$  in  $\mathbb{P}^2$  with 9 base points of multiplicity  $m$  (maybe infinitely near) such that  $X$  is the blow-up of these 9 base points and  $|-mK_X|$  is the strict transform of this pencil.  $\square$

**Proposition 5.14.** ([CD12, Prop.3.1]) *Let  $X$  be a Coble surface and  $\pi_E : X \rightarrow Y$  be the blowing down of a  $(-1)$ -curve  $E$ . Then:*

- $Y$  is a Halphen surface of index 2;
- $\mathcal{C} \in |-2K_X|$  is the proper transform of the fiber  $F$  containing  $y_0 = \pi_E(E)$ ;
- the fiber  $F$  is irreducible, and  $y_0$  is its unique singular point.

*Conversely, the blow-up of a singular point of an irreducible non-multiple fiber of a Halphen surface of index 2 is a Coble surface.*  $\square$

**Proposition 5.15.** *If  $X$  is a Cremona special rational surface, then  $X$  has a finite number of real forms.*

*Proof.* We will prove that  $\text{Aut}^*X$  has finite index in  $\text{O}(K_X^\perp)$ : let us first explain why this is sufficient. If  $\text{Aut}^*X$  has finite index in  $\text{O}(K_X^\perp)$ , then  $\text{Aut}^*X$  is an arithmetic  $G$ -group, since we can embed it into  $\text{O}(K_X^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ , which is a linear algebraic  $G$ -group defined over  $\mathbb{Q}$ . By Theorem 3.35, we see that  $H^1(G, \text{Aut}^*X)$  is finite: as in the proof of Theorem 5.4, this suffices to conclude that  $H^1(G, \text{Aut} X)$  is finite.

Now,  $\text{Aut}^*X$  is of finite index in the Weyl group  $W_X$  because  $X$  is Cremona special, and in this case,  $r = 9$  or  $r = 10$ . Thus, we have to explain why  $W_X$  is of finite index in  $\text{O}(K_X^\perp)$ . If  $r = 9$ , a classical result about the affine type Weyl group  $W_X = W_9 = W(E_{2,3,6}) = W(\widetilde{E}_8)$  (cf. [CD89, p.112] or [Dol12, Prop.7.5.9]) says that in this case

$$\text{O}(K_X^\perp)' = A(\widetilde{E}_8) \times W_9$$

where  $\text{O}(K_X^\perp)' := \{\varphi \in \text{O}(K_X^\perp) \mid \varphi(K_X) = \widetilde{K_X}\}$  is a subgroup of index 2 of  $\text{O}(K_X^\perp)$  and  $A(\widetilde{E}_8)$  is the automorphism group of the Dynkin diagram of  $\widetilde{E}_8$ . Clearly, this diagram has no symmetries, so this group is trivial. Hence  $W_9 = \text{O}(K_X^\perp)'$  is of index 2 in  $\text{O}(K_X^\perp)$ . If  $r = 10$ , then  $E_{10} := E_{2,3,7} \simeq K_X^\perp$  is a Nikulin lattice, that is, an even hyperbolic lattice isomorphic to  $E_8 \oplus H$ , where  $H$  is the "hyperbolic plane", i.e. a rank-two lattice equipped with a symmetric bilinear form of matrix  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . The classification of Nikulin lattices (see [Dol83] or [Dol08, Ex.2.7]) shows that  $W_X$  is of finite index in  $\text{O}(K_X^\perp)$ .  $\square$

Remark that Theorem 5.4 does not ensure the desired finiteness for general unnodal Coble surfaces, because they have too many automorphisms of positive entropy (see [Dés10, Ex.3.8]: Déserti constructs ten elliptic fibrations on a Coble surface and claims that for a general Coble surface  $X$ , one obtains a subgroup of  $\text{Aut} X$  isomorphic to  $(\mathbb{Z}^8)^{*10}$ , hence by [Gri16, Th.3.13],  $\text{Aut} X$  must contain automorphisms of positive entropy).

## 5.5 Real forms of KLT Calabi-Yau pairs

Theorem 5.4 solves only partially the finiteness problem for real forms of rational surfaces. In this section, we present another finiteness result for a very special class of rational surfaces, which are called *KLT Calabi-Yau pairs*. The proof of this result requires different kind of tools than before (like CAT(0) metric spaces) which we briefly present in a first subsection. Then, we define KLT Calabi-Yau pairs and we prove finiteness of real forms for them (cf. Theorem 5.22), using Totaro's Cone Theorem 5.21. We give an example of a rational surface whose finiteness of real forms cannot be deduced from Theorem 5.4 but is obtained from Theorem 5.22. Finally, we conclude this chapter by giving the example of a rational surface which does not belong to this KLT Calabi-Yau class (but which is situated at its "boundary") and for which the finiteness problem remains open, despite our efforts.

2. A linear system is *irreducible* if its general member is an irreducible effective divisor.

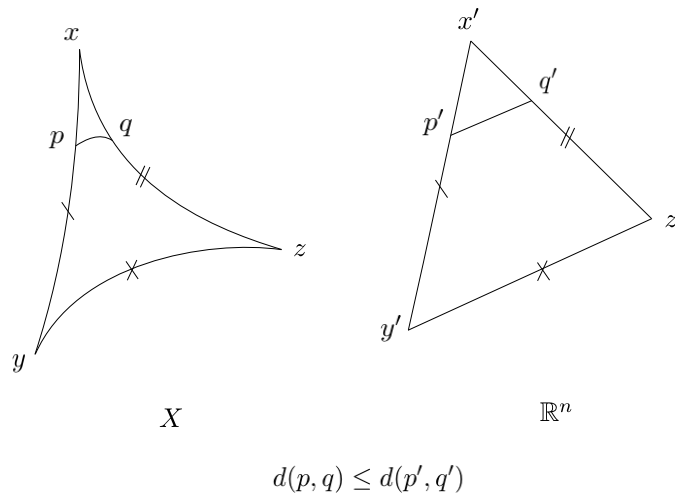
### 5.5.1 Preliminaries: Geometric actions on CAT(0) spaces

We begin this section by a brief explanation of the link between finiteness of real forms and geometric (i.e. proper and cocompact) actions on CAT(0) spaces, which are a generalization of manifolds with nonpositive curvature (see [BH99, I.1.3, II.1.1]): this will be our main tool in order to turn our finiteness problem into a problem of hyperbolic geometry.

**Definition 5.16.** • A **geodesic** between two points  $a$  and  $b$  in a metric space  $(X, d)$  is a map  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow X$  such that  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(\ell) = b$  and  $\forall t, t' \in [0, \ell]$ ,  $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$  (in particular,  $\gamma$  is continuous and  $\ell = d(a, b)$ ). A **geodesic triangle**  $\Delta$  in  $X$  consists of three points  $x, y, z \in X$  and three geodesic segments  $[x, y], [y, z], [z, x]$ .

- A metric space  $(X, d)$  is **geodesic** if every two points in  $X$  are joined by a geodesic (not necessarily unique).
- A geodesic metric space  $(X, d)$  is said to be a **CAT(0) space** if for every geodesic triangle  $\Delta$  in  $X$ , there exists a triangle  $\Delta'$  in  $\mathbb{R}^n$  endowed with the euclidean metric, with sides of the same length as the sides of  $\Delta$ , such that distances between points on  $\Delta$  are less than or equal to the distances between corresponding points on  $\Delta'$ .
- [BH99, I.8.2]<sup>3</sup> Let  $\Gamma$  be a group acting by isometries on a metric space  $X$ . The action is said to be **proper** (or **properly discontinuous**) if<sup>4</sup>

$$\forall x \in X, \exists r > 0, \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot B(x, r) \cap B(x, r) \neq \emptyset\} \text{ is finite.}$$



**Theorem 5.17. ([BH99, II.2.8])**

If a group  $\Gamma$  acts properly discontinuously and cocompactly (i.e. geometrically) by isometries on a complete CAT(0) space, then  $\Gamma$  contains only finitely many conjugacy classes of finite subgroups. □

Now, thanks to Theorems 3.30 and 3.21, we can easily prove the following corollary:

**Corollary 5.18.** Let  $X$  be a smooth projective irreducible complex variety equipped with a real structure  $\sigma$ . If  $\text{Aut}^* X \rtimes \langle \sigma^* \rangle$  acts properly discontinuously and cocompactly by isometries on a complete CAT(0) metric space, then  $X$  admits a finite number of real forms up to  $\mathbb{R}$ -isomorphism. □

---

3. As explained in *op.cit.*, I.8.3, if every closed ball of  $X$  is compact, then this definition is equivalent to the standard definition where the open balls are replaced by the compact subsets of  $X$ : for us, this is always the case.  
 4. Denoting by  $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$  the open ball of center  $x \in X$  and radius  $r \geq 0$ .

### 5.5.2 Finiteness theorem

Firstly, let us introduce the surfaces we deal with (cf. [Tot10], [Tot12, 8.2,8.4] for a slightly more general definition):

**Definition 5.19. (KLT Calabi-Yau smooth pair)**

Let  $X$  be a smooth complex algebraic variety and  $\Delta$  be a  $\mathbb{R}$ -divisor on  $X$ .

$(X, \Delta)$  is a **KLT (resp. log-canonical) Calabi-Yau smooth pair** if it satisfies the following conditions:

- $\Delta$  has simple normal crossings and his coefficients are  $< 1$  (KLT condition for  $X$  smooth), *resp.*  $\leq 1$  (log-canonical condition for  $X$  smooth) ;
- $\Delta$  is an effective  $\mathbb{R}$ -divisor such that  $K_X + \Delta$  is numerically trivial (Calabi-Yau condition).

**Example 5.20.** Let us present here some examples of KLT Calabi-Yau pairs. The reader may also look at Examples 5.29 and 5.30.

- Of course, there are irrational surfaces  $X$  having a  $\mathbb{R}$ -divisor  $\Delta$  such that  $(X, \Delta)$  is KLT Calabi-Yau (simply think of  $X$  being Calabi-Yau smooth and  $\Delta = 0$ ). There are less trivial examples, like some  $\mathbb{P}^1$ -bundles over elliptic curves (cf. [AM04, 1.4]).
- If  $X$  is a *Halphen surface* of index  $m \geq 2$  and  $F$  a reduced fibre of the elliptic fibration on  $X$  with simple normal crossings, then  $\left(X, \frac{1}{m}F\right)$  is a KLT Calabi-Yau pair: for, Definition 5.12 shows that  $F \sim -mK_X$  and  $\frac{1}{m} < 1$ . If  $X$  is of index 1, then  $\left(X, \frac{1}{2}(F + F')\right)$  is a KLT Calabi-Yau pair for two distinct reduced smooth fibers  $F$  and  $F'$  of  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ .
- Similarly, if  $X$  is a *Coble surface* and if the special fibre  $F$  (see Proposition 5.14) is reduced and has simple normal crossings, then  $\left(X, \frac{1}{2}F\right)$  is a KLT Calabi-Yau pair.

For our purposes, we need the following finiteness theorem:

**Theorem 5.21. (Cone theorem for KLT Calabi-Yau pairs - [Tot12, 8.7])**

Let  $(X, \Delta)$  be a KLT Calabi-Yau pair.

If  $X$  is a surface, then the action of  $\text{Aut } X$  on the nef cone has a rational polyhedral fundamental domain (i.e. it is the closed convex cone spanned by a finite set of Cartier divisors in  $\text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ).  $\square$

The aim of this section is to prove the following:

**Theorem 5.22.** Let  $(X, \Delta)$  be a KLT Calabi-Yau pair, where  $X$  is a rational surface.

$X$  has a finite number of real forms up to  $\mathbb{R}$ -isomorphism.

Thus, Example 5.20 shows that Proposition 5.15 about finiteness of real forms for Cremona special surfaces is essentially (but not exactly) a special case of this result. Before beginning the proof of this theorem, let us give some definitions to clarify the terms we use:

**Definition 5.23.** Let  $X$  be either  $\mathcal{H}^n$  or  $\mathbb{R}^n$  (5).

- A subset  $C$  of  $X$  is **convex** if  $\forall x, y \in C$ , the geodesic segment linking  $x$  and  $y$  is contained in  $C$ .
- A **side** of  $C$  is a maximal nonempty convex subset of the relative boundary  $\partial C$  (cf.[Rat06, p. 195, 198]).
- A **(convex) polyhedron** of  $X$  is a nonempty closed convex subset of  $X$  whose collection of sides is locally finite. In what follows, we will always say "polyhedron" instead of "convex polyhedron".

---

5. In what follows, when writing  $\mathbb{R}^n$ , it is understood as  $\mathbb{R}^n$  equipped with its euclidean metric (which is denoted by  $E^n$  in [Rat06]).

- Let  $X$  be a subset of either  $\mathcal{H}^n$  or  $\mathbb{R}^n$ . A **fundamental polyhedron (or polyhedral fundamental domain)** for the action of a discrete group  $\Gamma$  of isometries of  $X$  is a polyhedron  $P$  whose interior  $\overset{\circ}{P}$  is such that the elements of  $\{g(\overset{\circ}{P}), g \in \Gamma\}$  are pairwise disjoint and  $X = \bigcup_{g \in \Gamma} g(P)$ . Moreover,  $P$  is a **locally finite fundamental polyhedron** if the set  $\{g(P), g \in \Gamma\}$  is locally finite, i.e. if for all compact  $K \subseteq X$ , there are only finitely many elements of  $\{g(P), g \in \Gamma\}$  which intersect  $K$ .

*Proof of Theorem 5.22.* We begin by explaining how we can turn our problem into a problem of hyperbolic geometry. Let us recall (cf. §2.4.2) that Hodge index Theorem show that the signature of the intersection form on  $\text{NS}(X) = \text{Pic } X$  is  $(1, n)$ , where  $\text{rk Pic } X = n + 1$ . Thus, we obtain the *hyperboloid model* of the hyperbolic space  $\mathcal{H}^n := \{v \in \text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid v^2 = 1, v.E_0 > 0\}$  equipped with the distance  $d : (u, v) \mapsto \text{argcosh}(u.v)$  (where  $u.v$  is the intersection product of  $u$  and  $v$  and  $E_0$  is the pull-back of a general line of  $\mathbb{P}^2$ <sup>(6)</sup>).

The radial projection  $\pi : \text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow \text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  from the origin onto the hyperplane  $\{v \in \text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid v.E_0 = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$  maps the hyperboloid  $\mathcal{H}^n$  onto the open unit ball  $D^n$  of this hyperplane: when endowed with the appropriate metric, this is the *Klein (projective) model* of  $\mathcal{H}^n$  and  $\pi$  restricts to an isometry  $\mathcal{H}^n \rightarrow D^n$ . The geodesic lines of this model are straight line segments so that the convex subsets of  $D^n$  (for the hyperbolic metric) are exactly its convex subsets for the euclidean metric of  $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$ . Note that  $\pi$  maps the isotropic half-cone  $\{v \in \text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid v^2 = 0, v.E_0 > 0\}$  onto the boundary  $\partial D^n$  (which can be seen as the set of lines of this isotropic half-cone). We also want to mention the *Poincaré ball model*  $B^n$  of  $\mathcal{H}^n$  which is obtained from the hyperboloid model by means of a stereographic projection from the south pole of the unit sphere of  $\text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  on the hyperplane  $\{v \in \text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid v.E_0 = 0\}$ .

Finally, if we denote by  $\text{Nef } X$  the nef effective cone of  $X$  and if  $N := \pi(\text{Nef } X \cap \mathcal{H}^n) \simeq (\text{Nef } X \cap \mathcal{H}^n)/\mathbb{R}^*$ , then we see easily that  $N$  is a closed convex subset of  $D^n$  and that, by Totaro Cone Theorem 5.21,  $\text{Aut } X$  (or  $\text{Aut}^* X$ ) acts on it with a *finitely sided* polyhedral fundamental domain (namely, the projection onto  $D^n$  of a polyhedral fundamental domain of the action on  $\text{Nef } X$ ). Note that, as we said in the statement of Theorem 5.21, there is a fundamental domain  $\mathcal{P}$  of the action of  $\text{Aut } X$  on  $\text{Nef } X$  which is the closed convex cone generated by finitely many points of  $\text{Pic } X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ; hence,  $\overline{\mathcal{P}} := \pi(\mathcal{P}) \subseteq \overline{D^n}$  is the convex hull of finitely many points and classical results about convex polyhedra of  $\mathbb{R}^n$  show that such a convex set is the intersection of finitely many half spaces and has finitely many sides (which are defined by the bounding hyperplanes of  $\overline{\mathcal{P}}$ ). Hence, this is also true for  $P := \overline{\mathcal{P}} \cap D^n$ , the fundamental polyhedron of the action of  $\text{Aut } X$  on  $N$ .

In order to use Corollary 5.18, we have to prove that  $\text{Aut}^* X \rtimes \langle \sigma^* \rangle$  acts properly and cocompactly by isometries on a CAT(0) complete metric space. In fact, we are reduced to prove Lemma 5.26, which is the adaptation to our case of [Rat06, 12.4.5, 1 $\Rightarrow$  2] (where we replaced a fundamental domain of the action on  $\mathcal{H}^n$  by a fundamental domain on a closed convex subset, which is our  $N$ ), and Lemma 5.27. *The proof ends on page 85.*  $\square$

**Lemma 5.24.** *Any discrete subgroup  $\Gamma$  of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$  acts properly discontinuously on  $\mathcal{H}^n$ .*

*Proof.* Note that the action of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n) \simeq \text{O}^+(1, n)$  on  $\mathcal{H}^n$  is transitive and that the stabilizer of a point  $x \in \mathcal{H}^n$  (in the hyperboloid model) is the orthogonal group  $\text{O}(x^\perp) \simeq \text{O}_n(\mathbb{R})$ . Thus, this action induces a bijection  $\mathcal{H}^n \simeq \text{O}^+(1, n)/\text{O}_n(\mathbb{R})$ . Since  $\Gamma$  is discrete in the locally compact group  $\text{O}^+(1, n)$  and since  $\text{O}_n(\mathbb{R})$  is compact, the result follows from [Wol84, 3.1.1].  $\square$

Before stating our lemmas 5.26 and 5.27, let us give some other definitions (cf. [Rat06]):

**Definition 5.25.** Let  $\Gamma$  be a discrete subgroup of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$ .

- A point  $a \in \partial \mathcal{H}^n$  is a **limit point** of  $\Gamma$  if there is a point  $x$  of  $\mathcal{H}^n$  and a sequence  $(g_i)$  of elements of  $\Gamma$  such that  $(g_i(x))$  converges to  $a$ .
- In the Poincaré ball model  $B^n$ , an **horoball** based at a point  $a \in \partial B^n$  is an Euclidean ball contained in  $\overline{B^n}$  which is tangent to  $\partial B^n$  at the point  $a$ .
- Assume  $\Gamma$  contains a parabolic element (cf. 2.30) having  $a \in \partial \mathcal{H}^n$  as its fixed point. A **horocusp region** is an open horoball  $B$  based at a point  $a \in \partial \mathcal{H}^n$  such that

$$\forall g \in \Gamma \setminus \text{Stab}_\Gamma(a), g(B) \cap B = \emptyset.$$

6. Recall that, by Theorem 5.4, we can assume that  $X$  is a blow-up of  $\mathbb{P}^2$  since a non-basic rational surface has always finitely many real forms.

The following Lemma develops and makes more precise an idea of Totaro in [Tot12, §7]:

**Lemma 5.26.** *Let  $\Gamma$  be a discrete subgroup of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$ ,  $L(\Gamma)$  the set of limit points of  $\Gamma$  in  $\overline{\mathcal{H}^n}$ ,  $C(\Gamma)$  the convex hull of  $L(\Gamma)$  in  $\overline{\mathcal{H}^n}$  and  $N$  a  $\Gamma$ -invariant closed convex subset of  $\mathcal{H}^n$ .*

*If the action of  $\Gamma$  on  $N$  has a finitely sided polyhedral fundamental domain  $P$ , then there exists a finite union (maybe empty)  $V_0$  of horocusp regions with disjoint closures such that  $(P \cap C(\Gamma)) \setminus V_0$  is compact.*

*Sketch of proof.* The proof of this lemma is an adaptation of the proof of [Rat06, 12.4.5, 1 $\Rightarrow$  2]: we replaced the fundamental domain of the action on  $\mathcal{H}^n$  by a fundamental domain of the action on a closed convex subset, which is our  $N$  and we replaced geometrical finiteness hypothesis for  $\Gamma$  (which is more general than the existence of a finitely sided fundamental polyhedral domain of  $\Gamma$  on  $\mathcal{H}^n$ ) by the hypothesis of the existence of a finitely sided fundamental polyhedral domain for the action of  $\Gamma$  on  $N$ . Thus, we have to check all the proofs of the results used by [Rat06] in the proof of [Rat06, 12.4.5, 1 $\Rightarrow$  2] in order to replace  $\mathcal{H}^n$  by a closed convex subset  $N$ . The details of these verifications are in the Appendix. Here, we sum up the main points:

- if  $P_0$  is a fundamental polyhedron of the action of  $\Gamma$  on  $\mathcal{H}^n$ , then  $P = P_0 \cap N$  is a fundamental polyhedron of the action of  $\Gamma$  on  $\mathcal{H}^n$
- by (6.6.10, 8.5.7), like  $\mathcal{H}^n$ , a closed convex subset  $N$  of  $\mathcal{H}^n$  is a proper geodesically connected and geodesically complete metric space<sup>7</sup>: indeed,  $N$  is proper as a subspace of the proper metric space  $\mathcal{H}^n$ ,  $N$  is geodesically complete, as it is complete, and it is geodesically connected, since it is convex. From this fact, we can deduce that the action of  $\Gamma$  on  $N$  has a (locally finite) exact convex fundamental polyhedron, e.g. a Dirichlet polyhedron, by (5.3.5, 6.6.13) and (6.7.4 (2)) since the group is discrete (and hence acts properly discontinuously, cf. Lemma 5.24) and since there is a point  $a \in N$  whose stabilizer  $\Gamma_a$  is trivial (by (6.6.12)).
- for the other points, it is a question of replacing  $\mathcal{H}^n$  by  $N$  and checking that everything remains true (sometimes by using convexity and/or closedness of  $N$  in  $\mathcal{H}^n$ ).

□

**Lemma 5.27.** *Let  $C$  be a closed convex subset of  $\mathcal{H}^n$ ,  $\Gamma$  a discrete subgroup of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$  stabilizing  $C$ ,  $V_0$  a finite family of open horoballs with disjoint closures and  $V_1 := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(V_0)$ .*

*There is a family of open horoballs with disjoint closures, obtained by shrinking the horoballs of  $V_1$ , whose union  $U$  is such that  $C \setminus U$  is a complete CAT(0) space.*

*Proof.* By [BH99, II.11.27], for every family  $U$  of disjoint<sup>8</sup> open horoballs,  $\mathcal{H}^n \setminus U$  is a complete CAT(0) space for the induced length metric (this distance is defined between 2 points as the infimum of the lengths of rectifiable curves of  $\mathcal{H}^n \setminus U$  between those two points ; it is different from the metric induced by the hyperbolic metric on  $\mathcal{H}^n \setminus U$ ). Thus,  $C \setminus U$  is complete as a closed subset of the complete space  $\mathcal{H}^n \setminus U$ .

It remains to study geodesic connectedness (term of [Rat06, §1.4]) or convexity (term of [BH99, I.1.3]) of  $C \setminus V_1$  in  $\mathcal{H}^n \setminus V_1$  to conclude (using [BH99, II.1.15.(1)]) that  $C \setminus V_1$  is CAT(0) for the metric induced by the distance of  $\mathcal{H}^n \setminus V_1$  (which is itself the length metric induced by the metric of  $\mathcal{H}^n$ ). So let  $x, y \in C \setminus V_1$  : if the geodesic  $\gamma$  of  $\mathcal{H}^n$  joining  $x$  and  $y$  is contained in  $\mathcal{H}^n \setminus V_1$ , then it is also contained in  $C \setminus V_1$  since  $C$  is convex. Otherwise,  $\text{Im } \gamma$  passes through at least one horoball and [BH99, II.11.33, II.11.34] shows that a geodesic  $\delta$  of  $\mathcal{H}^n \setminus V_1$  linking  $x$  and  $y$  is obtained by concatenation of the hyperbolic geodesics which are tangent to the bounding horospheres of the horoballs crossed by  $\gamma$  on the one hand and geodesics of these horospheres on the other hand. *A priori*, it may happen that  $\text{Im } \delta$  is not contained in  $C$ . But we can shrink  $V_0$  so that the antipodal point of the base point of each horosphere of  $V_0$  belongs to  $C$  (<sup>9</sup>), which causes this effect on all the horoballs of  $V_1$  under a finite number of operations. Hence, the geodesics of the horospheres are contained in  $C$  and the hyperbolic geodesics are contained in  $C$  because they join two points of  $C$ . Thus, if we denote by  $U$  the result of this shrinking of  $V_1$ , we showed that  $C \setminus U$  is geodesically connected in  $\mathcal{H}^n \setminus U$  and this shows that  $C \setminus U$  is a complete CAT(0) space. □

7. A metric space is **proper** or **finitely compact** if every bounded closed subset of it is compact.

8. This is the key point which explains why we had to prove Lemma 5.26.

9. More simply, the horospheres do not "get out" of  $C$ .

*End of the proof of Theorem 5.22.* We apply Lemma 5.26 with  $\Gamma = \text{Aut}^*X$ ,  $N = \pi(\text{Nef}(X) \cap \mathcal{H}^n) \simeq \text{Nef}(X)/\mathbb{R}^*$  and  $P$  being a fundamental polyhedron of the action of  $\Gamma$  on  $N$ : this gives us a finite family  $V_0$  of open horoballs *with disjoint closures* and a convex subset  $P_C = P \cap C(\Gamma)$  of  $P$  such that  $P_C \setminus V_0$  is compact. Thus,  $\Gamma$  acts properly (by Lemma 5.24) and cocompactly on  $C \setminus V_1$  where  $C := N \cap C(\Gamma)$  and  $V_1 := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(V_0)$  (note that  $C(\Gamma)$  is a  $\Gamma$ -invariant closed convex subset of  $\mathcal{H}^n$ ).

Now, by Lemma 5.27, we can replace  $V_1$  by another family  $U$  of open horoballs *with disjoint closures* such that  $C \setminus U$  is a complete CAT(0) space. The compactness of a fundamental domain is preserved by this shrinking because  $P \setminus (U \cap P)$  is a bounded closed subset of  $\mathcal{H}^n$ , so it is compact because  $\mathcal{H}^n$  is a proper metric space. By the way, one can verify that the proof of [Rat06, 12.4.5, 1  $\Rightarrow$  2] allows to shrink the horoballs without trouble.

Finally, we can conclude that  $\text{Aut}^*X$  acts properly and cocompactly on the complete CAT(0) space  $C \setminus U$ . It is not enough: in order to apply Corollary 5.18, we must obtain the same result for  $\text{Aut}^*X \rtimes \langle \sigma^* \rangle$ , where  $\sigma$  is a real structure on  $X$ . By Lemma 5.24, the discrete isometry group  $\text{Aut}^*X \rtimes \langle \sigma^* \rangle$  acts properly on  $\mathcal{H}^n$  (hence also on  $\mathcal{H}^n \cap (C \setminus U)$ ). Since there is a fundamental domain of  $\text{Aut}^*X \rtimes \langle \sigma^* \rangle$  which is a closed subset of that of  $\text{Aut}^*X$  which is compact, we see that  $\text{Aut}^*X \rtimes \langle \sigma^* \rangle$  also acts cocompactly: this concludes the proof.  $\square$

**Remark 5.28.** In fact, we could give a much shorter proof of Theorem 5.22 if  $N$  were smooth complete.

First, note that  $N$  is a pinched Hadamard manifold<sup>10</sup> as a convex subset of  $\mathcal{H}^n$ : in particular, note that it is simply connected because of its convexity (which can be seen in the Klein model, where convexity is the same as Euclidean convexity and really implies simply connectedness).

Now, if we denote by  $P$  a fundamental domain of the action of  $\text{Aut}X$  on  $N \subseteq D^n$ , we remark that  $\overline{P}$  is a fundamental domain of the action of  $\text{Aut}X$  on  $\overline{N} \subseteq \overline{D}^n$  and that it is a convex polyhedron of the Klein model  $\overline{D}^n$  of  $\mathcal{H}^n$  and also of the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  (since convexity in the Klein model is the same as Euclidean convexity). Indeed, by Definition 5.23, we need to check that  $\overline{P}$  has a locally finite collection of sides. But this is true since Totaro Cone Theorem 5.21 shows that it is finitely sided (as we have seen in the beginning of the proof of Theorem 5.22, see page 83). Thus, by [Rat06, 6.4.8],  $\overline{P}$  has finite volume. Therefore,  $P$  is also of finite volume. Since there is a fundamental domain  $P'$  of  $\text{Aut}X \rtimes \langle \sigma \rangle$  which is contained in  $P$ , we see that  $P'$  is also of finite volume. Thus, the quotient of  $N$  by  $\Gamma := \text{Aut}X \rtimes \langle \sigma \rangle$  is a finite volume quotient of the pinched Hadamard manifold  $N$  and [Bow95, 5.4.2, F5, 6.1, 5.5.2] shows that  $\Gamma$  has finitely many conjugacy classes of finite subgroups: thus  $X$  has a finite number of real forms by Theorem 3.30.

### 5.5.3 Two examples

**Example 5.29.** Here we study the example given by Totaro in [Tot10]: it is a blow-up  $X$  of  $\mathbb{P}^2$  at 12 points and we show that  $\text{Aut}X$  contains a subgroup isomorphic to  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Since there exists a  $\mathbb{R}$ -divisor  $\Delta$  such that  $(X, \Delta)$  is a KLT Calabi-Yau pair,  $X$  has finitely many non-isomorphic real forms and this finiteness cannot be deduced from Theorem 5.4.

Let  $\zeta = e^{2i\pi/3}$ . We denote by  $X$  the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at the 12 points of the set  $\mathcal{P} = \{[1 : \zeta^i : \zeta^j], (i, j) \in \llbracket 0; 2 \rrbracket^2\} \cup \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$ . Let  $C_1, \dots, C_9$  be the lines of  $\mathbb{P}^2$  of equations  $(y = x)$ ,  $(y = \zeta x)$ ,  $(y = \zeta^2 x)$ ,  $(z = x)$ ,  $(z = \zeta x)$ ,  $(z = \zeta^2 x)$ ,  $(z = y)$ ,  $(z = \zeta y)$ ,  $(z = \zeta^2 y)$ . We can easily verify that each line  $C_i$  passes exactly through 4 of the points of  $\mathcal{P}$  and that each point blown-up is the intersection point of exactly 3 of the  $C_i$ : this is called the *dual of Hesse configuration*.<sup>11</sup>

Note that  $\left(X, \frac{1}{3} \sum_{i=1}^9 \widehat{C}_i\right)$  is a KLT Calabi-Yau pair because:

- $X$  is smooth;
- $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^9 \widehat{C}_i$  has simple normal crossings and its coefficients are  $< 1$ ;

10. A **pinched Hadamard manifold** is a complete simply connected Riemannian manifold whose all sectional curvatures lie between two negative constants.

11. Hesse configuration itself is not interesting for our purposes: since it contains exactly 9 points (and 12 lines), the surface obtained by blowing up these points has finitely many non-equivalent real structures by Theorem 5.4.

$$\bullet -K_X = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^9 \widehat{C}_i.$$

Now, let us give some results about  $\text{Aut } X$ . Firstly, one can show that if a line  $D$  passes through one of the points  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$ ,  $[0 : 0 : 1]$  and one of the  $[1 : \zeta^i : \zeta^j]$ , then  $D$  is one of the  $C_i$ : for example, if  $D$  passes through  $[1 : 0 : 0]$  and one of the  $[1 : \zeta^i : \zeta^j]$ , then, in the affine chart ( $x \neq 0$ ) of  $\mathbb{P}^2$ , we have  $D = (z = \zeta^{j-i}y)$ .

We claim that  $\boxed{\text{Aut}^\# X = \{\text{Id}\}}$ : since all the points blown-up belong to  $\mathbb{P}^2$ , Proposition 2.24 shows it suffices to verify that there does not exist any line passing through at least 11 of the 12 points of  $\mathcal{P}$ . But if  $D$  was such a line, then it would necessarily pass through one of the points  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$ ,  $[0 : 0 : 1]$  and one of the  $[1 : \zeta^i : \zeta^j]$ : thus,  $D$  would be one of the  $C_i$ . Since none of the  $C_i$  passes through 11 of the 12 points blown-up, we see that  $D$  does not exist: this proves the claim.

By the end of the example of [Tot10, §2], we have (denoting  $E := \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\zeta]$ ):

$$\boxed{\text{Aut } X \simeq \text{Aut}^* X = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \frac{GL_2(\mathbb{Z}[\zeta])}{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} = \text{Aut}((E \times E)/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}))}$$

Finally, we want to show that  $\text{Aut } X$  contains a subgroup isomorphic to  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ :

- it is well-known that  $SL_2(\mathbb{Z})$  contains finite index subgroups isomorphic to  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  (for example,  $S := \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$  has index 12, cf. [dlH00, II.25]) ;
- $GL_2(\mathbb{Z}[\zeta])$  acts on  $E \times E = \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}[\zeta]^2)$  by matrix product and  $\frac{GL_2(\mathbb{Z}[\zeta])}{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$  is the quotient by the subgroup generated by  $\zeta \cdot I_2$ . Clearly, two elements of  $SL_2(\mathbb{Z})$  (or even  $GL_2(\mathbb{Z})$ ) are never equal modulo  $\langle \zeta \cdot I_2 \rangle$  so  $SL_2(\mathbb{Z})$  injects into  $\frac{GL_2(\mathbb{Z}[\zeta])}{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ : this concludes the proof.

**Example 5.30.** ([DZ01, 6.10]) As promised, we now describe the example of a rational surface for which the finiteness problem for real forms remains open.

Let  $L_1, \dots, L_5$  be five lines in general linear position in  $\mathbb{P}^2$ . For  $i, j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$ , we denote by  $p_{ij}$  the intersection point of  $L_i$  and  $L_j$ . Let us fix a cubic  $C_3$  passing through the points  $p_{ij}$  and intersecting  $L_5$  at three distinct points  $q_1, q_2, q_3$ . Finally, let  $a$  be another point of  $L_5$ .

We consider the blow-up  $X$  of  $\mathbb{P}^2$  at the 10 points  $p_{ij}, q_k$  and  $a$ : it is a nodal Coble surface since  $|-K_X| = \emptyset$  and  $|-2K_X| = \{C_6 := R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + 2R_5\}$ , where the  $R_i$ 's are the strict transform of the  $L_i$ 's in  $X$  (note that  $X$  is nodal since  $R_1, \dots, R_4$  are  $(-2)$ -curves).

In [DZ01], it is claimed that  $\text{Aut } X$  has infinitely many orbits on the set of  $(-1)$ -curves of  $X$  but, in a private communication, Dolgachev explained me that there is a gap in the proof of this fact (more precisely, the elements of the group  $G$  constructed in *op. cit.* cannot be lifted to the double covering  $S(A)$  of  $X$  ramified along  $R_1 + \dots + R_4$ ). Note that if it were true, this would show that  $X$  does not contain a divisor  $\Delta$  such that  $(X, \Delta)$  is a KLT Calabi-Yau pair. For, if such a divisor existed, then Cone Theorem would imply that  $\text{Aut } X$  has finitely many orbits on the extremal rays of the nef cone of  $X$  and this would be true also for its dual cone, which is the cone of curves of  $X$  (cf. [Loo14, 4.1]): this is absurd because  $(-1)$ -curves form an  $\text{Aut } X$ -invariant subset of the set of extremal rays of  $\overline{NE}(X)$ .

However, note that  $\left(X, \frac{1}{2}C_6\right)$  is a log-canonical Calabi-Yau pair since  $\frac{1}{2}C_6 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + R_5$

has clearly simple normal crossings, has coefficients  $\leq 1$  and satisfies the condition  $K_X + \frac{1}{2}C_6 \equiv 0$ .

---

# Chapter 6

---

## Higher-dimensional varieties

In this last Chapter, we briefly tackle the finiteness problem for real structures on higher-dimensional smooth varieties, giving some partial results without any intention of completeness. We use especially variants of Theorem 5.1 which endows  $\text{Aut}^\# X$  with a natural real structure when  $X$  is a smooth irreducible projective complex variety equipped with a real structure.

**Theorem 6.1.** *If  $X$  is a smooth irreducible Fano variety over  $\mathbb{C}$  (of any dimension) equipped with a real structure  $\sigma$  then  $\text{Aut} X$  is a linear algebraic group defined over  $\mathbb{R}$  and  $X$  has finitely many real forms up to  $\mathbb{R}$ -isomorphism.*

*Proof.* Let  $m \in \mathbb{N}$  be such that  $-mK_X$  is very ample: thus it gives rise to an embedding  $\varphi_{|-mK_X|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(-mK_X))$ . Note that:

- if  $\sigma$  is a real structure on  $X$ , then  $\sigma^*(-mK_X) \sim -mK_X$ ;
- if  $\varphi \in \text{Aut} X$ , then  $\varphi^*(-mK_X) \sim -mK_X$ .

Hence, the same method as in the proof of Theorem 5.1 shows that:

- $\sigma$  gives rise to a real structure  $\sigma_1$  on  $\mathbb{P}(H^0(-mK_X))$  such that  $\varphi_{|-mK_X|}$  is equivariant (or real);
- every automorphism of  $X$  induces an automorphism of  $\mathbb{P}(H^0(-mK_X))$  and this correspondence gives an embedding of  $\text{Aut} X$  into  $\text{Aut} \mathbb{P}^n$ ;
- conjugation by  $\tilde{\sigma}$  is a real structure on  $\text{Aut} X$ .

Now, the result follows from (1) of Theorem 3.28. □

**Remark 6.2.** The cone of curves of a smooth Fano variety is rational polyhedral and has finitely many extremal rays by [Kol96, V.1.6] or [Tot12, 2.7]. Thus  $\text{Aut} X$  has finitely many orbits on its dual cone, which is the nef cone of  $X$  (cf. [Loo14, 4.1]). This proves that  $\text{Aut}^* X$  is finite and Theorem 5.1 gives the result, thanks to the exact sequence in Galois cohomology (cf. Theorem 3.22) as in the proof of Theorem 5.4.

Finally, the next result is a consequence of [BC13, 1.2]:

**Theorem 6.3.** *Let*

- $X'$  be a smooth irreducible projective variety with  $\text{Pic} X' \simeq \mathbb{Z}$ ;
- $r \in \mathbb{N}$  and  $X$  be a blow-up of  $X'$  at a finite number of smooth irreducible subvarieties of dimension  $\leq r$ ;
- $\sigma'$  (resp.  $\sigma$ ) be a real structure on  $X'$  (resp. on  $X$ ).

*If  $\dim X' > 2r + 2$  and if there is a birational morphism  $\pi : X \rightarrow X'$  which is real (i.e. which commutes with  $\sigma$  and  $\sigma'$ ), then this morphism induces a real embedding of  $\text{Aut} X$  into  $\text{Aut} X'$  (these are algebraic groups defined over  $\mathbb{R}$ ) and  $X$  has finitely many real forms up to  $\mathbb{R}$ -isomorphism.*

**Example 6.4.** In particular, if  $X' = \mathbb{P}^n$  for  $n \geq 3$ , then any blow-up at finitely many points has finitely many real forms up to  $\mathbb{R}$ -isomorphism.

*Proof.* First, let us note that  $\text{Pic } X' \simeq \mathbb{Z}$  is generated by an ample divisor class  $H$ . Since any automorphism  $\varphi$  of  $X'$  induces an isometry of  $\text{Pic } X'$  for the intersection form,  $\varphi^*(H) = \pm H$  and since  $-H$  is not effective (contrary to  $H$ ), we obtain that  $\varphi^*(H) = H$ : hence  $\text{Aut } X' = \text{Aut}^\# X'$ .

According to [BC13, 1.2], conjugation by  $\pi$  gives an embedding  $\tilde{\pi} : \text{Aut } X \hookrightarrow \text{Aut } X'$ . By Theorem 5.1,  $\text{Aut } X'$  is a linear algebraic group and conjugation by  $\sigma'$  defines a real structure  $\tilde{\sigma}'$  on it. Finally, since  $\pi$  is real (i.e.  $\sigma'\pi = \pi\sigma$ ), we see that conjugation by  $\sigma$  defines a real structure  $\tilde{\sigma} = (\tilde{\pi}|^{\text{Im } \tilde{\pi}})^{-1} \tilde{\sigma}' \tilde{\pi}$  on  $\text{Aut } X$ . Once again, the result follows from (1) of Theorem 3.28.  $\square$

# Appendix

In this appendix, we provide a detailed proof of Lemma 5.26, i.e. a detailed inspection of all the proofs of the results used by [Rat06] in the proof of [Rat06, 12.4.5] in order to replace  $\mathcal{H}^n$  by a closed convex subset  $N$ . We recall here the statement of Lemma 5.26:

**Lemma 5.26.** *Let  $\Gamma$  be a discrete subgroup of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$ ,  $L(\Gamma)$  the set of limit points of  $\Gamma$  in  $\overline{\mathcal{H}^n}$ ,  $C(\Gamma)$  the convex hull of  $L(\Gamma)$  in  $\overline{\mathcal{H}^n}$  and  $N$  a  $\Gamma$ -invariant closed convex subset of  $\mathcal{H}^n$ .*

*If the action of  $\Gamma$  on  $N$  has a finitely sided polyhedral fundamental domain  $P$ , then there exists a finite union (maybe empty)  $V_0$  of horocusp regions with disjoint closures such that  $(P \cap C(\Gamma)) \setminus V_0$  is compact.*

In what follows, all numbers like (12.4.2) refer to [Rat06]. Moreover, when some notations are undefined, please consider they are the same as in [Rat06], *mutatis mutandis*. Finally, when some results cited in the diagram page 91 are not cited in the text below, then these are general results which apply to our case either without any change, or changing only  $\mathcal{H}^n$  into  $N$ .

Some remarks are widely used below so we gather them here:

- if  $P_0$  is a fundamental polyhedron of the action of  $\Gamma$  on  $\mathcal{H}^n$ , then  $P = P_0 \cap N$  is a fundamental polyhedron of the action of  $\Gamma$  on  $\mathcal{H}^n$
- by (6.6.10, 8.5.7), like  $\mathcal{H}^n$ , a closed convex subset  $N$  of  $\mathcal{H}^n$  is a proper geodesically connected and geodesically complete metric space<sup>1</sup>: indeed,  $N$  is proper as a subspace of the proper metric space  $\mathcal{H}^n$ ,  $N$  is geodesically complete, as it is complete, and it is geodesically connected, since it is convex. From this fact, we can deduce that the action of  $\Gamma$  on  $N$  has a (locally finite) exact convex fundamental polyhedron, e.g. a Dirichlet polyhedron, by (5.3.5, 6.6.13) and (6.7.4 (2)) since the group is discrete (and hence acts properly discontinuously, cf. Lemma 5.24) and since there is a point  $a \in N$  whose stabilizer  $\Gamma_a$  is trivial (by (6.6.12)).
- if  $\Gamma$  is a discrete group of isometries of  $\mathcal{H}^n$  (seen as Poincaré half-space), then the stabilizer  $\Gamma_\infty$  of the point at infinity induces a discrete subgroup of  $\text{Isom}(\mathbb{R}^{n-1}) = \text{Isom}(\partial\mathcal{H}^n \setminus \{\infty\})$ . By (5.4.6), there is a  $\Gamma_\infty$ -invariant affine subspace  $Q$  of  $\mathbb{R}^{n-1}$  of dimension  $m \leq n - 1$  and  $\Gamma_\infty$  is a finite extension of a  $\mathbb{Z}^m$ . By (7.5.2),  $\Gamma_\infty$  is a crystallographic isometry group of  $\mathbb{R}^m \simeq Q$ , i.e.  $Q/\Gamma_\infty$  is compact
- for the other points, it is a question of replacing  $\mathcal{H}^n$  by  $N$  and checking that everything remains true (sometimes by using convexity and/or closedness of  $N$  in  $\mathcal{H}^n$ ).

**(12.3.7):**  $\Gamma$  is a discrete subgroup of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$  so we can define "limit point", "bounded parabolic point"... with regard to its action on the whole space  $\mathcal{H}^n$ . Note that  $a$  is a limit point if and only if  $\exists(g_i) \in \Gamma^{\mathbb{N}}, \forall x \in \mathcal{H}^n, g_i(x) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} a$ : in particular, if  $x \in N$ , then  $\forall i, g_i(x) \in N$ . The rest of the proof can be followed, except that we can check that the geodesic ray  $R_i$  is contained in  $N$ .

**(12.4.3)** Firstly, note that (12.4.2) is not necessary for our purposes since  $P$  is finitely-sided. We can make the same reasoning with  $N$  instead of  $\mathcal{H}^n$ : if  $P$  is a fundamental polyhedron of  $\Gamma$  acting on  $N$ , then  $\{g(P) \mid g \in \Gamma\}$  is an exact tessellation of  $N$  and  $\{\nu g(P) \mid g \in \Gamma\} = \mathcal{T}$  is an exact tessellation of  $\nu(N) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ . But  $\bigcup_{g \in \Gamma} g(P) = N$  so  $U \subseteq \nu(N)$ . Since  $U$  is an open closed subset of  $\mathbb{R}^{n-1}$  and  $U \subseteq \nu(N)$ , we see that  $U$  is

---

1. A metric space is **proper** or **finitely compact** if every bounded closed subset of it is compact.

open and closed in the non-empty connected space  $\nu(N)$  so that  $U = \nu(N)$ .

**(12.4.4)** The beginning of the proof remains valid: it shows that if  $x \in \overline{P} \cap L(\Gamma)$ , where  $\overline{P}$  is the closure of  $P$  in  $\mathcal{H}^n$ , then the stabilizer  $\Gamma_x$  is infinite and elementary of parabolic type (cf. 2.43). Of course,  $\mathcal{T}$  is an exact tessellation of  $\nu(N)$  instead of  $\mathbb{R}^{n-1}$ . If  $c \in N$  is a cusp point of  $\Gamma$ , then  $U(Q, r) \cap N \neq \emptyset$  because  $U(Q, r)$  is a neighborhood of  $c$ : thus it suffices to replace  $U(Q, r)$  by  $N \cap U(Q, r)$  in the end of the proof to conclude.

**(12.4.5)** Firstly, we note that (12.4 Cor. 3) is a direct corollary of (12.3.7), (12.4.1) and (12.4.4) and that  $\overline{P}$  is the closure of  $P$  in  $\mathcal{H}^n$ . It suffices to replace:

- " $\Gamma$  is geometrically finite" by "the fundamental polyhedron of  $\Gamma$  on  $N$  is finitely-sided" (see (§12.4, Example 1));
- in view of the statement of our Lemma 5.26, all the statements made in the proof of (12.4.5) concerning  $\pi, V, M$  are useless for our purposes and all we need is  $V_0 := \bigcup_{i=1}^m B_i$

and we have to note that  $K$  is a closed subset of  $B^n$  included in the closed subset  $N$  (since  $P \subseteq N$ ) hence  $K$  is a closed subset of  $N$ .

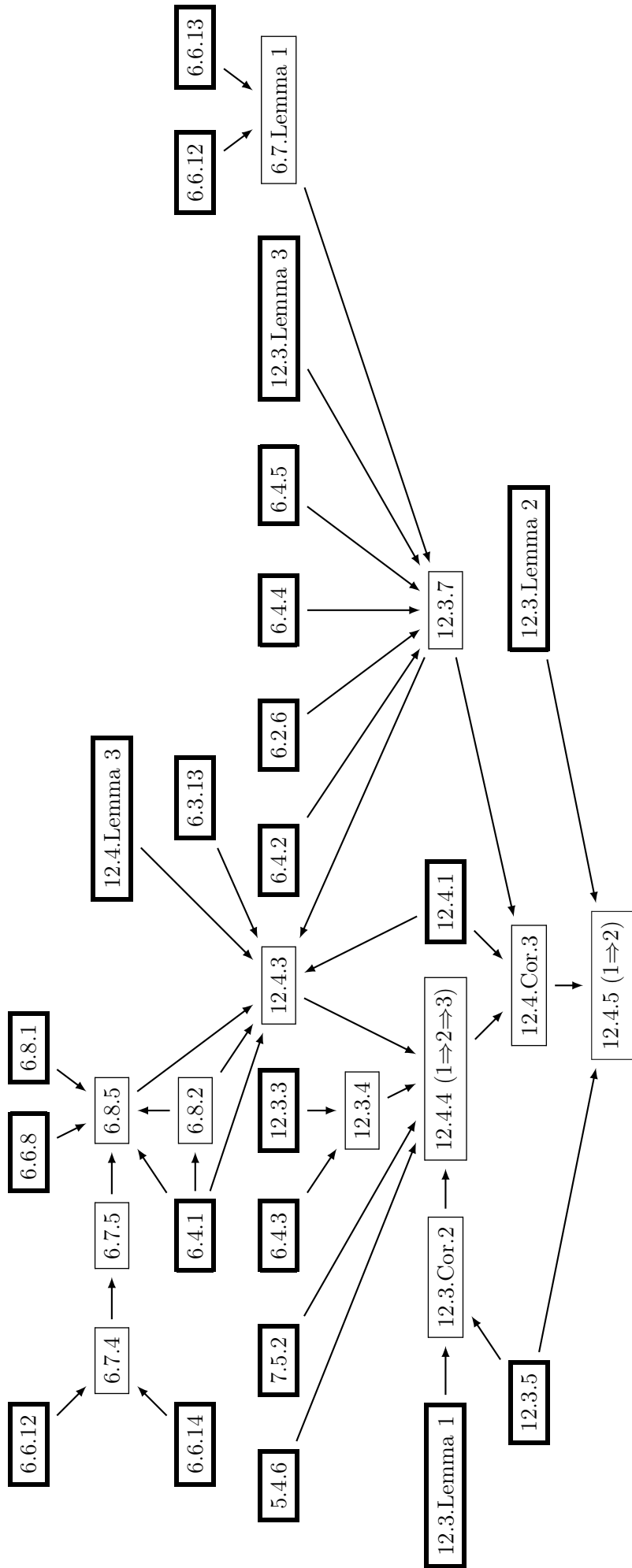


Figure G.1 – We framed with bold lines the "initial" results, i.e. those whose proof does not require anything else that standard definitions and results (in topology, group theory, etc.) or those whose statement can be adapted to our case without examining their proof and the results used by it.



# Bibliography

- [AM04] Valery ALEXEEV et Shigefumi MORI : Bounding singular surfaces of general type. *In Algebra, arithmetic and geometry with applications (West Lafayette, IN, 2000)*, pages 143–174. Springer, Berlin, 2004.
- [Apa00] Boris N. APANASOV : *Conformal geometry of discrete groups and manifolds*, volume 32 de *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.
- [Arn88] Vladimir I. ARNOL'D : The branched covering  $\mathbf{CP}^2 \rightarrow S^4$ , hyperbolicity and projective topology. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 29(5):36–47, 237, 1988.
- [BC13] Turgay BAYRAKTAR et Serge CANTAT : Constraints on automorphism groups of higher dimensional manifolds. *J. Math. Anal. Appl.*, 405(1):209–213, 2013.
- [Bea78] Arnaud BEAUVILLE : *Surfaces algébriques complexes*. Soc. Math. France, Paris, 1978. Astérisque, 54.
- [Ben16] Mohamed BENZERGA : Real structures on rational surfaces and automorphisms acting trivially on Picard groups. *Math. Z.*, 282(3-4):1127–1136, 2016.
- [BH99] Martin R. BRIDSON et André HAEFLIGER : *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BK10] Eric BEDFORD et Kyounghee KIM : Continuous families of rational surface automorphisms with positive entropy. *Math. Ann.*, 348(3):667–688, 2010.
- [Bla06] Jérémy BLANC : *Finite abelian subgroups of the plane Cremona group*. Thèse de doctorat, Université de Genève, 2006.
- [Bou59] Nicolas BOURBAKI : *Éléments de mathématique. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II: Algèbre. Chapitre 9: Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*. Actualités Sci. Ind. no. 1272. Hermann, Paris, 1959.
- [Bow95] Brian H. BOWDITCH : Geometrical finiteness with variable negative curvature. *Duke Math. J.*, 77(1):229–274, 1995.
- [BS64] Armand BOREL et Jean-Pierre SERRE : Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne. *Comment. Math. Helv.*, 39:111–164, 1964.
- [CD89] François COSSEC et Igor DOLGACHEV : *Enriques surfaces. I*, volume 76 de *Progr. Math.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1989.
- [CD12] Serge CANTAT et Igor DOLGACHEV : Rational surfaces with a large group of automorphisms. *J. Amer. Math. Soc.*, 25(3):863–905, 2012.
- [Com12] Annibale COMESSATTI : Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale. *Math. Ann.*, 73(1):1–72, 1912.
- [Con] Keith CONRAD : Complexification. [www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/linmultialg/complexification.pdf](http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/linmultialg/complexification.pdf).

- [Dés10] Julie DÉSERTE : Automorphismes d'entropie positive, le cas des surfaces rationnelles. arXiv:1005.2259v2, 2010.
- [DF01] Jeffrey DILLER et Charles FAVRE : Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6):1135–1169, 2001.
- [DI09] Igor DOLGACHEV et Vasily ISKOVSKIKH : Finite subgroups of the plane Cremona group. *In Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 de *Progr. Math.*, pages 443–548. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.
- [DIK00] Alexander DEGTYAREV, Ilia ITENBERG et Viatcheslav KHARLAMOV : *Real Enriques surfaces*, volume 1746 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [DK00] Alexander I. DEGTYAREV et Viatcheslav M. KHARLAMOV : Topological properties of real algebraic varieties: Rokhlin's way. *Uspekhi Mat. Nauk*, 55(4(334)):129–212, 2000.
- [dlH00] Pierre de la HARPE : *Topics in geometric group theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.
- [DO88] Igor DOLGACHEV et David ORTLAND : Point sets in projective spaces and theta functions. *Astérisque*, (165), 1988.
- [Dol82] Igor V. DOLGACHEV : Weighted projective varieties. *In Group actions and vector fields (Vancouver, B.C., 1981)*, volume 956 de *Lecture Notes in Math.*, pages 34–71. Springer, Berlin, 1982.
- [Dol83] Igor DOLGACHEV : Integral quadratic forms: applications to algebraic geometry (after V. Nikulin). *In Bourbaki seminar, Vol. 1982/83*, volume 105 de *Astérisque*, pages 251–278. Soc. Math. France, Paris, 1983.
- [Dol86] Igor DOLGACHEV : Infinite Coxeter groups and automorphisms of algebraic surfaces. *In The Lefschetz centennial conference, Part I (Mexico City, 1984)*, volume 58 de *Contemp. Math.*, pages 91–106. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [Dol08] Igor DOLGACHEV : Reflection groups in algebraic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 45(1):1–60, 2008.
- [Dol12] Igor DOLGACHEV : *Classical algebraic geometry. A modern view*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [Dou95] Adrien DOUADY : Cohomologie des groupes compacts totalement discontinus (d'après Tate). *In Séminaire Bourbaki, Vol. 5*, pages Exp. No. 189, 287–298. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [DPT80] Michel DEMAZURE, Henry Charles PINKHAM et Bernard TEISSIER, éditeurs. *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, volume 777 de *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1980. Held at the Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Palaiseau, 1976–1977.
- [DZ01] Igor V. DOLGACHEV et De-Qi ZHANG : Coble rational surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(1):79–114, 2001.
- [EH00] David EISENBUD et Joe HARRIS : *The geometry of schemes*, volume 197 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Gau09] Paul GAUDUCHON : Hirzebruch surfaces and weighted projective planes. *In Riemannian topology and geometric structures on manifolds*, volume 271 de *Progr. Math.*, pages 25–48. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2009.
- [GH78] Phillip GRIFFITHS et Joseph HARRIS : *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [Giz81] Marat H. GIZATULLIN : Rational  $G$ -surfaces. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 16(1):103, 1981.

- [GP99] Fritz GRUNEWALD et Vladimir PLATONOV : Rigidity results for groups with radical cohomology of finite groups and arithmeticity problems. *Duke Math. J.*, 100(2):321–358, 1999.
- [Gri16] Julien GRIVAUX : Parabolic automorphisms of projective surfaces (after M. H. Gizatullin). *Mosc. Math. J.*, 16(2):275–298, 2016.
- [Gro55] Alexander GROTHENDIECK : *A general theory of fibre spaces with structure sheaf*. National science foundation research project on geometry of function space. University of Kansas, Dept. of Mathematics, 1955.
- [Gro60] Alexander GROTHENDIECK : Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4):228, 1960.
- [Gro03] Mikhaïl GROMOV : On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4):217–235, 2003.
- [Gud69] Dmitrii A. GUDKOV : Complete topological classification of the disposition of ovals of a sixth order curve in the projective plane. *Gor'kov. Gos. Univ. Učen. Zap. Vyp.*, 87:118–153, 1969.
- [GW10] Ulrich GÖRTZ et Torsten WEDHORN : *Algebraic geometry I. Schemes with examples and exercises*. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg-Teubner, Wiesbaden, 2010.
- [Har76] Axel HARNACK : Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven. *Math. Ann.*, 10(2):189–198, 1876.
- [Har77] Robin HARTSHORNE : *Algebraic Geometry*, volume 52 de *Grad. Texts in Maths*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [Har85] Brian HARBOURNE : Blowings-up of  $\mathbb{P}^2$  and their blowings-down. *Duke Math. J.*, 52(1):129–148, 1985.
- [Har87a] Brian HARBOURNE : Automorphisms of  $K3$ -like rational surfaces. In *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, volume 46 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 17–28. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [Har87b] Brian HARBOURNE : Rational surfaces with infinite automorphism group and no antipluricanonical curve. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 99(3):409–414, 1987.
- [Hir88] André HIRSCHOWITZ : Symétries des surfaces rationnelles génériques. *Math. Ann.*, 281(2):255–261, 1988.
- [HMX13] Christopher D. HACON, James MCKERNAN et Chenyang XU : On the birational automorphisms of varieties of general type. *Ann. of Math. (2)*, 177(3):1077–1111, 2013.
- [Jar11] Moshe JARDEN : *Algebraic patching*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2011.
- [Kam75] Tatsuji KAMBAYASHI : On the absence of nontrivial separable forms of the affine plane. *J. Algebra*, 35:449–456, 1975.
- [Kha02] Viatcheslav KHARLAMOV : Topology, moduli and automorphisms of real algebraic surfaces. *Milan J. Math.*, 70:25–37, 2002.
- [Kle76] Felix KLEIN : Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. *Math. Ann.*, 10(2):199–209, 1876.
- [Koi88] Masanori KOITABASHI : Automorphism groups of generic rational surfaces. *J. Algebra*, 116(1):130–142, 1988.
- [Kol96] János KOLLÁR : *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

- [Kol97] János KOLLÁR : Real Algebraic Surfaces. arXiv:alg-geom/9712003, 1997.
- [Lam02] Stéphane LAMY : Une preuve géométrique du théorème de Jung. *Enseign. Math. (2)*, 48(3-4):291–315, 2002.
- [Liu02] Qing LIU : *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 de *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.
- [Loo14] Eduard LOOIJENGA : Discrete automorphism groups of convex cones of finite type. *Compos. Math.*, 150(11):1939–1962, 2014.
- [Man] Frédéric MANGOLTE : *Variétés algébriques réelles. en préparation.*
- [Man74] Yuri I. MANIN : *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974. Translated from the Russian by M. Hazewinkel, North-Holland Mathematical Library, Vol. 4.
- [Mat63] Hideyuki MATSUMURA : On algebraic groups of birational transformations. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)*, 34:151–155, 1963.
- [McM07] Curtis T. MCMULLEN : Dynamics on blowups of the projective plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105):49–89, 2007.
- [Nag60] Masayoshi NAGATA : On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 32:351–370, 1960.
- [Nag61] Masayoshi NAGATA : On rational surfaces. II. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.*, 33:271–293, 1960/1961.
- [Rat06] John G. RATCLIFFE : *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second édition, 2006.
- [Rus02] Francesco RUSSO : The antibirational involutions of the plane and the classification of real del Pezzo surfaces. In *Algebraic geometry*, pages 289–312. de Gruyter, Berlin, 2002.
- [Sch63] Ludwig SCHLAFLI : On the distribution of surfaces of the third order into species. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 153:193–241, 1863. Reprinted in : Ludwig Schläfli, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Birkhauser, 1953, vol. II.
- [Ser68] Jean-Pierre SERRE : *Corps locaux*, volume No. VIII de *Publ.Inst.Math.Univ.Nancago*. Hermann, Paris, Second edition, 1968.
- [Ser94] Jean-Pierre SERRE : *Cohomologie galoisienne*, volume 5 de *Lecture Notes in Math*. Springer-Verlag, Berlin, fifth édition, 1994.
- [sga71] *Revêtements étales et groupe fondamental*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 224.
- [Sil82] Robert SILHOL : Real abelian varieties and the theory of Comessatti. *Math. Z.*, 181(3):345–364, 1982.
- [Sil89] Robert SILHOL : *Real algebraic surfaces*, volume 1392 de *Lecture Notes in Math*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [Tot10] Burt TOTARO : The cone conjecture for Calabi-Yau pairs in dimension 2. *Duke Math. J.*, 154(2):241–263, 2010.
- [Tot12] Burt TOTARO : Algebraic surfaces and hyperbolic geometry. In *Current developments in algebraic geometry*, volume 59 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 405–426. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

- [Wei56] André WEIL : The field of definition of a variety. *Amer. J. Math.*, 78:509–524, 1956.
- [Wei94] Charles A. WEIBEL : *An introduction to homological algebra*, volume 38 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Wel00] Jean-Yves WELSCHINGER : *Courbes algébriques réelles et courbes flexibles sur les surfaces réglées*. Université Louis Pasteur, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 2000. Thèse de doctorat.
- [Wel03] Jean-Yves WELSCHINGER : Real structures on minimal ruled surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 78(2):418–446, 2003.
- [Wol84] Joseph A. WOLF : *Spaces of constant curvature*. Publish or Perish. Fifth edition, 1984.
- [Yom87] Yosef YOMDIN : Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3):285–300, 1987.
- [Zeu74] Hieronymus Georg ZEUTHEN : Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre. *Math. Ann.*, 7:410–432, 1874.
- [Zha08] De-Qi ZHANG : Automorphism groups and anti-pluricanonical curves. *Math. Res. Lett.*, 15(1):163–183, 2008.



# Index

- Aut <sup>\*</sup>, 29
- Aut <sup>#</sup>, 29
  - Éclatements simultanés, 32
  - Groupe algébrique linéaire réel, 75
  - Résolubilité de, 30
- Algebraic variety
  - complex, 57
  - real, 57
- Automorphismes de
  - $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ , 65
- Automorphisms of
  - $\mathcal{F}_0$ , 23
- Automorphisms of
  - $\mathcal{F}_n$ ,  $n \geq 2$ , 24
  - $\mathcal{F}_1$ , 26
  - $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , 23
  - the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at 2 distinct points, 26
  - the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at 2 infinitely near points, 27
  - the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at 3 collinear points, 29
  - the blow-up of  $\mathbb{P}^2$  at 3 non-collinear points, 28
- Base de racines, 16
- Bieberbach's Theorem, 37
- CAT(0) space, 81
  - Finiteness of real forms, 81
- Coble surface, 79
- Cohomologie galoisienne, 46
  - Classes de conjugaison d'involutions, 49
  - Groupes linéaires réels, 49
  - Groupes uniquement 2-divisibles, 50
  - Produit libre, 49
  - Suites exactes en, 47
  - Torsion des suites exactes en, 48
- Complexification, 39
- Cone theorem, 82
- Configuration exceptionnelle de Pic  $X$ , 15
- Contractions réelles, 52
- Courbe anormale, 19
- Courbes exceptionnelles, 19
  - des éclatés en  $r \geq 9$  points, 22
  - sur les surfaces de Del Pezzo, 20
- Del Pezzo (Surfaces de), 18
  - courbes exceptionnelles sur, 20
  - degré, 18
- Descent of automorphisms, 25
- Descente de Weil, 42
- Diagramme de Dynkin, 16
- Diviseurs exceptionnels, 19
- Dynamical degree (first), 35
- Éclatements réels, 51
- Égalisateur de morphismes, 53
- Formes réelles, 39
  - et structures réelles, 42
- Galois cohomology
  - Arithmetic groups, 58
  - Conjugacy classes of involutions, 58
  - Free product, 58
  - Linear algebraic groups over  $\mathbb{R}$ , 58
  - Uniquely 2-divisible group, 58
- Geometric marking, 33
- Groupe
  - de Coxeter, 17
  - de Weyl, 16
  - de Weyl  $W_X$ , 17, 33
- Groupe arithmétique, 51
- Groupe de Picard
  - d'un éclaté de  $\mathbb{P}^2$ , 15
- Halphen surface, 79
- Horoball, 83
- Horocusp region, 83
- Hyperbolic geometry, 34
  - Discrete isometry groups, 37
  - Elementary subgroup of  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$ , 37
  - Elliptic isometry, 34
  - Hyperbolic isometry, 34
  - Hyperboloid model, 83
  - Klein projective model, 83
  - Parabolic isometry, 34
  - Poincaré ball model, 83
- Independent automorphisms, 37
- Ingéalité de Noether, 17
- KLT Calabi-Yau
  - Cone theorem for, 82

- Finiteness of real forms, 82
- KLT Calabi-Yau pair, 82
- Lieu réel, 40
  - densité, 53
  - et équivalence de structures réelles, 52
- Lifting of automorphisms, 25
- Limit point, 83
- Marquage géométrique, 33
- Moderate growth, 37
- Position générale
  - au sens de Nagata et Hartshorne, 21
  - pour  $r \leq 8$ , 19
- Racines, 16
  - Base de, 16
  - simples, 16
  - Système de, 16
- Real form, 57
- Real locus, 57
  - and equivalence of real structures, 58
- Real structure, 57
- Real structures
  - and Galois cohomology, 57
  - Bedford-Kim's example, 78
  - equivalence of, 57
  - Mc Mullen's example, 78
- Réseau, 16
- Schéma quotient, 40
- Structures réelles, 40
  - équivalentes, 46
  - et cohomologie galoisienne, 47
  - et formes réelles, 42
  - sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ , 65
  - sur  $\mathcal{F}_0$ , 61
  - sur  $\mathcal{F}_n$ ,  $n \geq 2$ , 64
  - sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ , 65
  - sur  $\mathcal{F}_1$ , 66
  - sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , 59
  - sur l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en  $r \leq 8$  points, 73
  - sur l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en 2 points distincts, 66
  - sur l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en 2 points infiniment proches, 68
  - sur l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en 3 points alignés, 73
  - sur l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en 3 points non-alignés, 68
- Surface
  - de Coble, 79
  - de Del Pezzo, 18
  - de Halphen, 79
  - de Hirzebruch, 13
  - géométriquement réglée, 13
  - rationnelle, 13
  - rationnelle minimale, 14
  - rationnelle basique, 15
- Système de racines, 16
- Théorème
  - 90 de Hilbert, 49
  - de Castelnuovo, 15
- Tits alternative, 37
- Topological entropy, 35
  - and finiteness of real structures, 77
- Transformation birationnelle réelle, 51
- Universal property
  - of blowing-down, 25
  - of blowing-up, 24
- Variété algébrique
  - complexe, 39
  - réelle, 39, 46
- Weyl group, 16
  - $W_X$ , 17, 33





---

**Titre :** Structures réelles sur les surfaces rationnelles

**Mots clés :** Géométrie algébrique complexe ,Géométrie algébrique réelle, Surface rationnelle, Géométrie birationnelle, Structure réelle, Forme réelle, Descente de Weil, Entropie topologique, Espace métrique CAT(0)

**Résumé :** Le but de cette thèse est d'apporter des éléments de réponse au problème de la finitude du nombre de classes de  $\mathbb{R}$ -isomorphisme de formes réelles d'une surface rationnelle projective complexe lisse  $X$  quelconque, i.e. du nombre de classes d'isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -schémas dont le complexifié est isomorphe à  $X$ . Nous étudions ce problème en termes de structures réelles (ou involutions antiholomorphes, généralisant la conjugaison complexe) sur  $X$  : l'intérêt de cette approche est qu'elle permet une réécriture du problème faisant intervenir les groupes d'automorphismes de surfaces rationnelles, à travers la cohomologie galoisienne. Grâce à des résultats récents concernant ces groupes et en nous appuyant sur de la géométrie hyperbolique et aussi dans une moindre mesure sur de la dynamique holomorphe et de la géométrie métrique, nous prouvons plusieurs résultats généraux de finitude qui dépassent largement le seul cadre des surfaces de Del Pezzo et peuvent s'appliquer à certaines surfaces rationnelles à grands groupes d'automorphismes.

---

**Title :** Real structures on rational surfaces

**Keywords :** Complex algebraic geometry, Real algebraic geometry, Rational surface, Automorphism group, Blowing-up, Birational geometry, Real structure, Real form, Weil descent, Galois cohomology, Topological entropy, Hyperbolic geometry, CAT(0) metric space

**Abstract :** The aim of this PhD thesis is to give a partial answer to the finiteness problem for  $\mathbb{R}$ -isomorphism classes of real forms of any smooth projective complex rational surface  $X$ , i.e. for the isomorphism classes of  $\mathbb{R}$ -schemes whose complexification is isomorphic to  $X$ . We study this problem in terms of real structures (or antiholomorphic involutions, which generalize complex conjugation) on  $X$ : the advantage of this approach is that it helps us rephrasing our problem with automorphism groups of rational surfaces, via Galois cohomology. Thanks to recent results on these automorphism groups, using hyperbolic geometry and, to a lesser extent, holomorphic dynamics and metric geometry, we prove several finiteness results which go further than Del Pezzo surfaces and can apply to some rational surfaces with large automorphism groups.